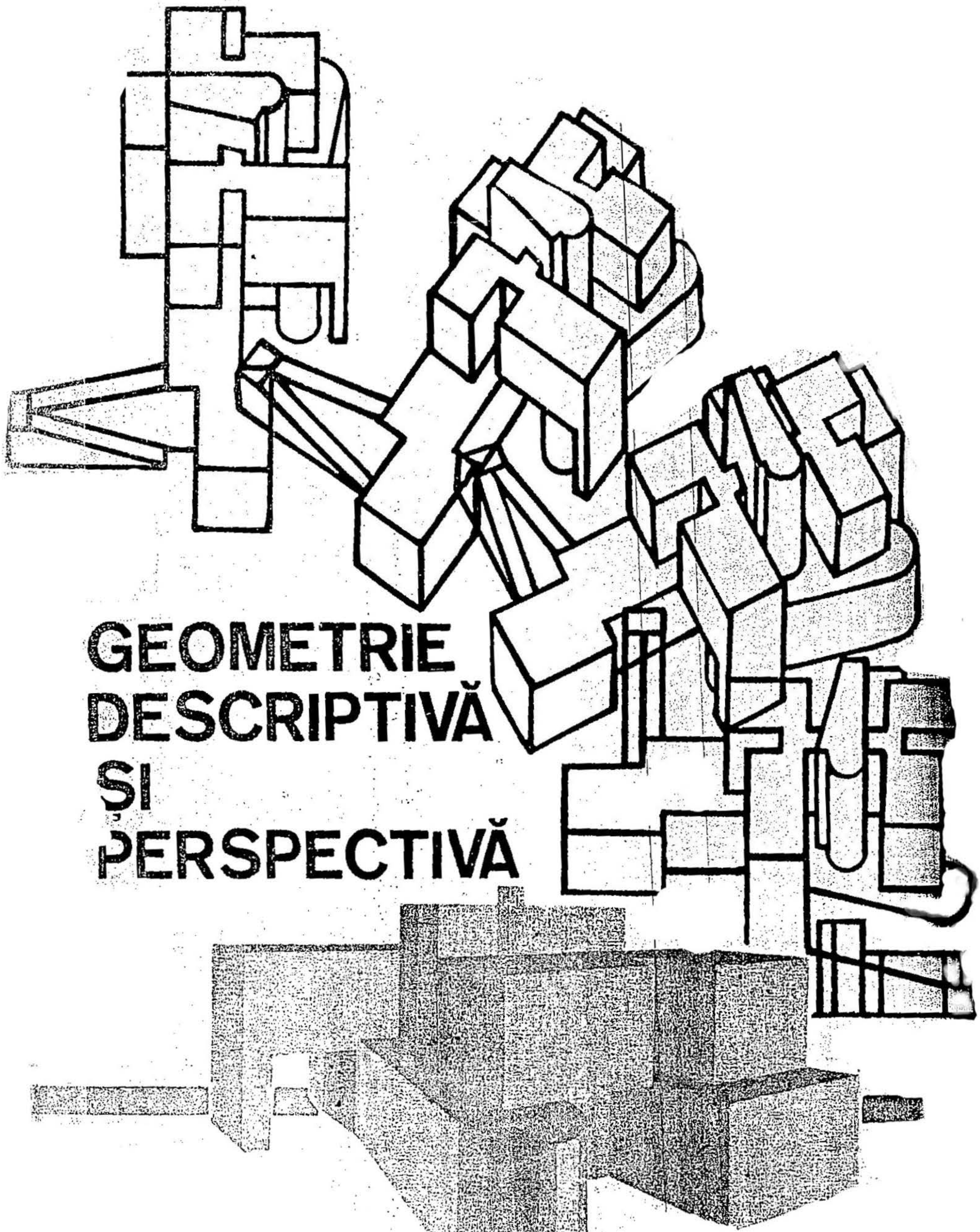
MIRCEA ENACHE

GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ ȘI PERSPECTIVĂ



CUPRINS

Cuvînt înainte

0. Introducere. Tipuri de reprezentări de arhitectură . . . 7

0.1. Reprezentări de arhitectură. Sisteme de proiecţie . . . 7
0.2. Transformări geometrice . . . 10
0.3. Tipuri de reprezentări de arhitectură . . . 16

Partea întîi

REPREZENTĂRI DE ARHITECTURĂ ÎN GEOMETRIA DESCRIPTIVĂ ŞI AXONOMETRIE

1. Elemente de geometrie descriptivă . . . 19

1.1. Punctul şi dreapta . . . 19
1.2. Planul . . . 31
1.3. Relaţiile dintre drepte şi plane . . . 38

2. Metodele geometriei descriptive . . . 43

2.1. Metoda schimbării planelor de proiecţie . . . 43
2.2. Metoda rotaţiei . . . 49
2.3. Metoda rabaterii . . . 56

3. Reprezentări axonometrice . . . 61

3.1. Introducere. Rezolvări intuitive . . . 61
3.2. Proprietăţile axonometriei ortogonale . . . 65
3.3. Tipurile de reprezentări axonometrice ortogonale . . . 73
3.4. Reprezentări axonometrice oblice . . . 76

4. Cercul şi sfera . . . 80

4.1. Cercul . . . 80
4.2. Sfera . . . 81

5. Forme poliedrale . . . 86

5.1. Poliedre. Reprezentare, secţiuni şi intersecţii . . . 86
5.2. Poliedrele regulate şi dualele lor . . . 93
5.3. Poliedrele semiregulate şi dualele lor . . . 104
5.4. Echipartiţii plane . . . 117
5.5. Echipartiţii spaţiale . . . 128
5.6. Cupole geodezice şi structuri spaţiale plane . . . 138
5.7. Suprafeţe cutate . . . 147

6. Suprafeţe riglate . . . 151

6.1. Definiţii. Clasificări . . . 151
6.2. Suprafeţe conice şi cilindrice . . . 152
6.3. Geometria bolţilor . . . 159
6.4. Hiperboloizi . . . 162
6.5. Paraboloizi hiperbolici . . . 163
6.6. Suprafeţe elicoidale . . . 171
6.7. Conoizi şi cilindroizi . . . 175

7. Rezolvarea problemelor de geometrie descriptivă şi axonometrie . . . 180

7.1. Trecerea datelor din tridimensional în bidimensional . . . 180
7.2. Rezolvarea problemelor în axonometrie . . . 183
7.3. Rezolvarea problemelor în geometria descriptivă . . . 185
7.4. Construcţii geometrice şi locuri geometrice plane . . . 186
7.5. Locuri geometrice în spaţiu . . . 189

8. Alte aplicaţii ale geometriei descriptive în arhitectură . . . 195

8.1. Rezolvarea acoperişurilor . . . 195
8.2. Sistematizare verticală . . . 204
8.3. Trasarea umbrelor . . . 208
8.4. Geometrie şi compoziţie . . . 225
8.5. Reprezentări geometrice ale spaţiului interior . . . 230

Partea a doua

REPREZENTĂRI DE ARHITECTURĂ ÎN PERSPECTIVĂ

9. Mecanismul perspectivei . . . 237

9.1. Introducere . . . 237
9.2. Vederea umană . . . 238

9.3. Geometrizarea simțului vederii 243
9.4. Clasificările perspectivei 251
9.5. Elementele sistemului perspectiv . . 253
9.6. Mecanismul perspectivei 254
9.7. Proprietățile geometrice ale perspectivei 256
9.8. Metodele de construcție a perspectivei . 256
9.9. Recomandări în practica desenului perspectiv 256

10. Perspectiva dependentă pe tablou vertical . . 257
10.1. Generalități 257
10.2. Perspectiva punctului 257
10.3. Construcția volumelor 259

11. Perspectiva liberă pe tablou vertical 262
11.1. Generalități. Definiții 262
11.2. Punctul și comparația verticalelor . . . 262
11.3. Dreapta și planul în perspectivă . . . 264
11.4. Drepte concurente în puncte inaccesibile 267
11.5. Diviziuni perspective 270
11.6. Puncte de fugă 274
11.7. Punctul de măsură 279
11.8. Punctul de distanță 280
11.9. Mărirea perspectivei direct în tablou . 282
11.10. Cercul și sfera în perspectivă 284

12. Construcția perspectivei de arhitectură . . . 289
12.1. Metode uzuale de construcție a perspectivei 289
12.2. Alegerea punctului de vedere 289
12.3. Exemplu practic de alegere a punctului de vedere 295
12.4. Perspectiva la două puncte de fugă cu orizontul supraînălțat 297
12.5. Perspectiva la două puncte de fugă la nivelul ochilor 300
12.6. Perspectiva frontală de exterior la nivelul ochilor 303
12.7. Perspectiva frontală cu orizontul supraînălțat 304
12.8. Perspectiva de interior 308
12.9. Perspectiva cu orizontul coborît . . . 311
12.10. Construcția perspectivei pornind de la elemente fixate direct în tabloul de perspectivă 313

13. Restituția perspectivă 316
13.1. Generalități 316
13.2. Metode de construcție a restituției perspective 316

14. Perspectiva pe tablou înclinat 318
14.1. Generalități 318
14.2. Trecerea de la perspectiva pe tablou vertical la perspectiva pe tablou înclinat 319
14.3. Configurația punctelor de fugă și de măsură 319
14.4. Construcția perspectivei pe tablou înclinat 320

15. Redarea unor aspecte naturale în perspectivă . . 323
15.1. Generalități 323
15.2. Scara intrinsecă a perspectivei 323
15.3. Oglindirile în perspectivă 326
15.4. Trasarea umbrelor în perspectivă . . . 332
15.5. Perspectiva aeriană 340

16. Prezentarea unei perspective de arhitectură . . 347
16.1. Generalități 347
16.2. Paginarea și limitarea tabloului 347
16.3. Efecte negative în perspectivă 351
16.4. Alegerea și plasarea anturajului 353
16.5. Redarea profunzimii 360
16.6. Alte tipuri de reprezentări perspective 364

Partea a treia

Anexe 369
Anexa 1. Elemente de geometrie în spațiu . 369
Anexa 2. Probleme de locuri geometrice plane 373
Anexa 3. Construcții grafice uzuale 377
Anexa 4. Probleme și aplicații de geometrie descriptivă și axonometrie 382
Anexa 5. Elemente de anturaj în perspectiva de arhitectură 396

Bibliografie 402

0. INTRODUCERE. TIPURI DE REPREZENTĂRI DE ARHITECTURĂ

0.1. REPREZENTĂRI DE ARHITECTURĂ. SISTEME DE PROIECŢIE

Reprezentările de arhitectură sînt de două tipuri tridimensionale sau spaţiale şi bidimensionale sau plane.

REPREZENTĂRILE TRIDIMENSIONALE SAU SPAŢIALE

Reprezentările tridimensionale sau spaţiale se numesc *machete* şi sînt percepute de către observator în mod foarte asemănător perceperii obiectului real. Pentru ca percepţia vizuală să fie cît mai aproape de realitate, trebuie îndeplinite anumite condiţii de distanţă şi unghi. Distanţa de la observator la machetă trebuie să fie redusă faţă de distanţa de la observator la obiectul real în aceeaşi măsură în care a fost redusă macheta faţă de obiectul real (această măsură este *scara machetei*). Chiar atunci cînd se respectă condiţiile de distanţă şi unghi, percepţia vizuală a machetei nu este identică cu cea a obiectului real datorită senzaţiei diferite de relief obţinute graţie vederii binoculare; mai apar, de asemenea, diferenţe de detalii, textură, culoare etc. Reprezentările tridimensionale nu fac obiectul prezentei lucrări.

REPREZENTĂRILE BIDIMENSIONALE SAU PLANE

Desenul plan care să producă aceeaşi imagine ca şi obiectul real se obţine într-o secţiune plană prin conul vizual al obiectului, cu condiţia de a fi privit sub direcţia şi de la depărtarea la care s-a făcut acea secţiune. Reprezentarea plană a obiectului din spaţiu rezultă din proiectarea punctelor sale pe planul de reprezentare — numit *plan de proiecţie* (fig. 0.1.1). Deci proiecţia este o operaţie geometrică ce schematizează procesul percepţiei vizuale (*Gheorghiu*, 1963).

În figura 0.1.1 centrul de proiecţie se află la distanţă finită, iar *proiecţia* se numeşte *centrală* sau *conică*. Acest tip de proiecţie fundamentează perspectiva de arhitectură. Dacă se consideră centrul de proiecţie la distanţă infinită, el este practic înlocuit cu o *direcţie de proiecţie*. În această situaţie, razele proiectante sînt paralele şi *proiecţia* se cheamă *paralelă* sau *cilindrică*. Acest tip de proiecţie stă la baza geometriei descriptive şi a desenului tehnic.

PROPRIETĂŢILE PROIECŢIILOR

Proiecţia deformează obiectele din spaţiu, reducîndu-le la figuri plane. Adevăratele lor forme şi mărimi nu sînt păstrate decît parţial şi în cazuri particulare. Proprietăţile proiecţiilor sînt prezentate în continuare.

— *Proiecţia unui punct este un punct*. Proiecţia pe planul [P] a punctului A din spaţiu se obţine la intersecţia cu planul [P] a razei vizuale care trece prin A (fig. 0.1.2).

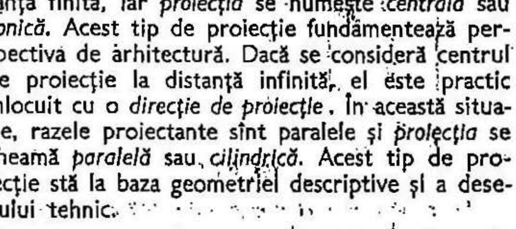


fig. 0.1.1

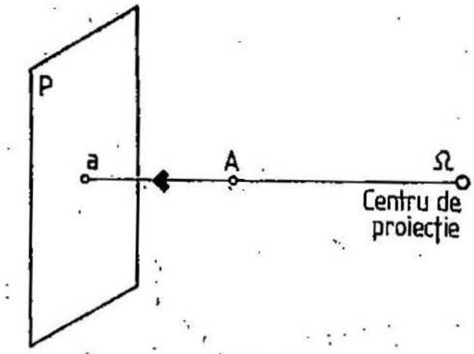


fig. 0.1.2

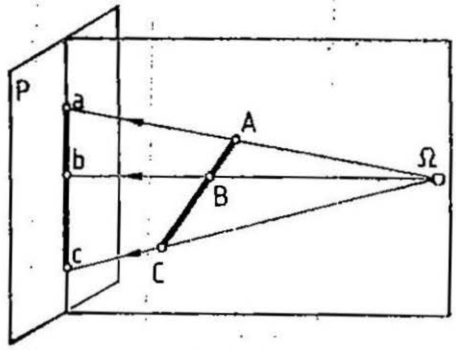


fig. 0.1.4

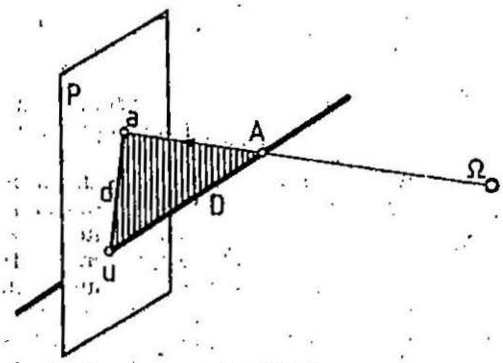


fig. 0.1.3

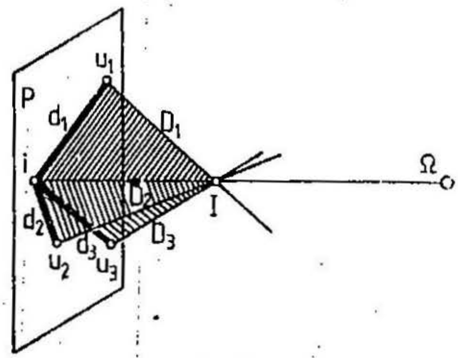


fig. 0.1.5

— Proiecția unei drepte este o dreaptă care trece prin urma ei. În general, o dreaptă înțeapă un plan într-un punct numit *urma* dreptei pe acel plan. Proiecția pe planul [P] a dreptei (D) este dreapta (d) care trece prin urma **u** (fig. 0.1.3). Proiecția unei drepte se reduce la un punct, dacă ea trece prin centrul de proiecție (în proiecția centrală), sau este paralelă cu direcția de proiecție (în proiecția paralelă). Planul razelor vizuale ce trec prin dreaptă se numește *plan proiectant*.

— Proiecțiile păstrează coliniaritatea punctelor din spațiu. Punctele **A**, **B** și **C** situate pe o dreaptă din spațiu (deci sînt coliniare) se proiectează după punctele **a**, **b** și **c** aflate tot pe o dreaptă. Această dreaptă se obține la intersecția planului proiectant dus prin dreapta din spațiu cu planul de proiecție [P] (fig. 0.1.4).

— Proiecțiile păstrează concurența dreptelor din spațiu. Dacă dreptele (D_1), (D_2) și (D_3) din spațiu sînt concurente în punctul **I**, proiecțiile lor (d_1), (d_2) și (d_3) sînt concurente în punctul **i** din planul de proiecție [P] (fig. 0.1.5). Raza vizuală Ii este dreapta de intersecție a planelor vizuale care trec prin cele trei drepte.

Sisteme de proiecție

Există două sisteme de proiecție: sistemul centr... (conic) de proiecție și sistemul paralel (cilindri...) de proiecție.

Sistemul central (conic) de proiecție. Dacă centrul d... proiecție se află la distanță finită, vom avea o *pr... iecție centrală sau conică.* Sistemul central de pr... iecție este alcătuit din două elemente (fig. 0.1.6
— un centru de proiecție **Ω**;
— un plan de proiecție [P].

Proiectînd triunghiul **ABC** din centrul de proiecț... **Ω** pe planul de proiecție [P], se obține proiec... centrală (conică) abc. Dreptele Ωa, Ωb și Ωc (ec... valente razelor vizuale din figura preceden...) se numesc *drepte proiectante.*

Proprietățile proiecției centrale (conice). În proiec... centrală se păstrează *biraportul* (sau raportul ar... monic) a patru puncte coliniare. În figura 0.1.7 poate vedea că:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{ma}}{\overline{mb}} : \frac{\overline{na}}{\overline{nb}} = \text{const.}$$

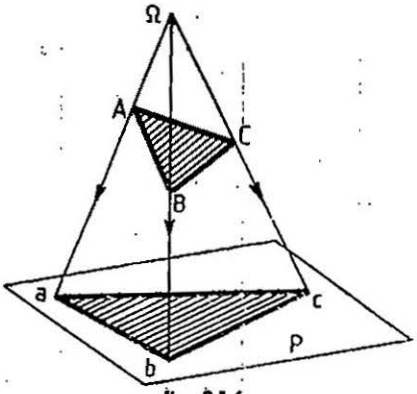


fig. 0.1.6

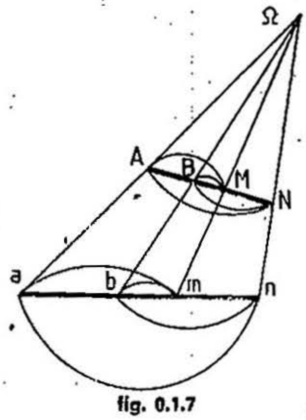


fig. 0.1.7

Biraportul este un invariant al proiecţiei centrale (conice). Dacă, în particular, valoarea unui biraport este —1, el se numeşte *raport armonic* pentru că:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = -1 \text{ presupune } \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}.$$

Punctele M şi N sînt conjugate armonic faţă de punctele A şi B şi invers.

În proiecţia centrală dreptele paralele din spaţiu se proiectează după drepte concurente (cu excepţia cazului în care dreptele paralele din spaţiu sînt paralele cu planul de proiecţie [P]). Demonstraţia acestei proprietăţi se face în capitolul 9, care explică mecanismul perspectivei.

Una din aplicaţiile proiecţiei centrale o constituie *fotografia* (fig. 0.1.8).

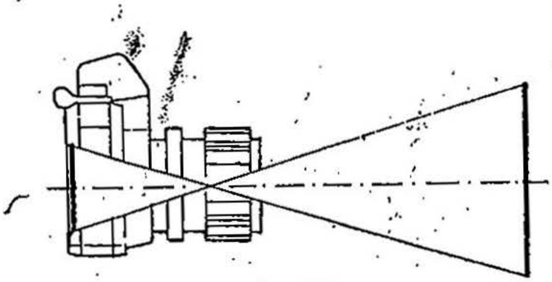


fig. 0.1.8

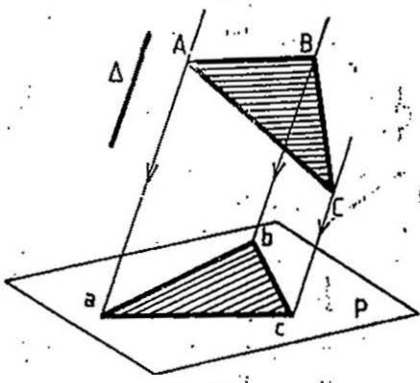


fig. 0.1.9

Sistemul paralel (cilindric) de proiecţie. Dacă centrul de proiecţie se află la distanţă infinită, el se transformă într-o direcţie de proiecţie, iar razele vizuale devin paralele între ele. Sistemul paralel de proiecţie este alcătuit din două elemente:

— o direcţie de proiecţie (Δ);

— un plan de proiecţie [P].

Proiectînd triunghiul ABC din spaţiu, paralel cu direcţia (Δ), pe planul de proiecţie [P], se obţine proiecţia paralelă abc (fig. 0.1.9). Dreptele Aa, Bb şi Cc se numesc şi ele *drepte proiectante*.

Proprietăţile proiecţiei paralele (*cilindrice*) sînt următoarele:

— În proiecţia paralelă se păstrează *raportul simplu* a trei puncte coliniare. În figura 0.1.10 se poate vedea că:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{am}}{\overline{mb}} = \text{const.}$$

Raportul simplu a trei puncte coliniare este un invariant al proiecţiei paralele (cilindrice).

— În proiecţia paralelă dreptele paralele din spaţiu se proiectează după drepte paralele. Se spune că proiecţia paralelă păstrează paralelismul dreptelor din spaţiu.

Una din aplicaţiile proiecţiei paralele o constituie *traseul umbrelor la soare* (fig. 0.1.11).

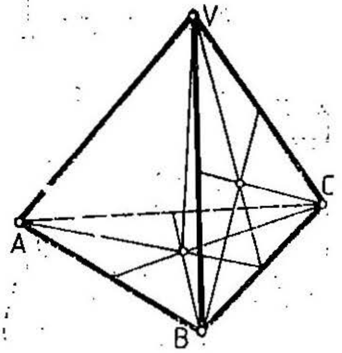


fig. 0.2.4

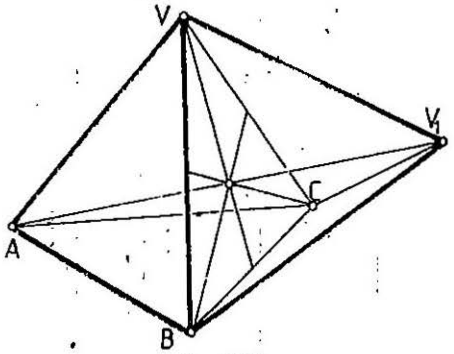


fig. 0.2.5

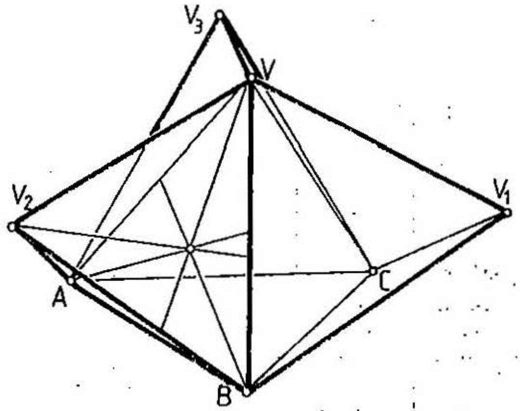


fig. 0.2.6

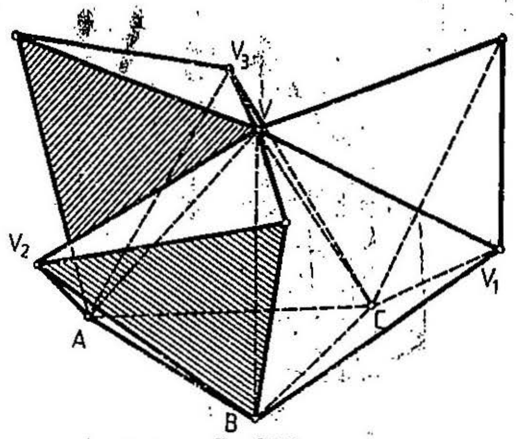


fig. 0.2.7

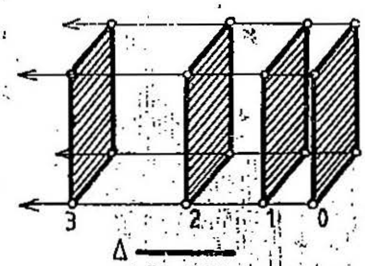


fig. 0.2.8

gulat de a cădea în centrul de greutate (aflat la intersecția medianelor) al triunghiului echilateral de bază. Se pot împărți laturile în două părți egale direct în axonometrie (pentru a construi medianele), întrucît axonometria este o proiecție paralelă și deci păstrează constant raportul simplu. În mod asemănător se obțin vîrfurile V_2 și V_3 ale celorlalți doi tetraedri regulați (fig. 0.2.6). Pentru amuzament, să se așeze încă trei tetraedri identici pe fețele AVV_3, BVV_2 și CVV_1 (fig. 0.2.7).

TRANSFORMAREA PRIN TRANSLAȚIE

Dreptunghiul din figura 0.2.8 este translatat prin deplasarea paralelă, după direcția (Δ), a fiecărui punct al dreptunghiului. Din poziția inițială, 0, dreptunghiul a fost translatat succesiv în pozițiile 1, 2 și 3. Prin translație, o figură plană poate genera un corp solid, dacă se rețin toate pozițiile intermediare ale figurii în mișcare. În acest caz, corpul generat prin translație este o prismă.

Aplicație a translației. Se poate translata și un corp solid, prin translație obținîndu-se un alt corp solid (dacă se rețin toate pozițiile corpului în mișcare). Figura 0.2.9 ilustrează translația unui cub (în reprezentarea axonometrică), iar solidul generat prin translație apare în figura 0.2.10.

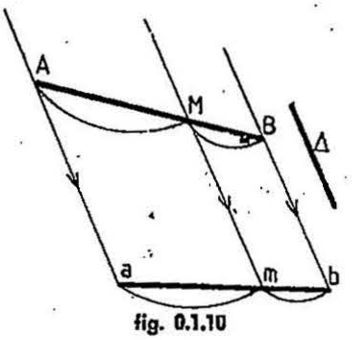


fig. 0.1.10

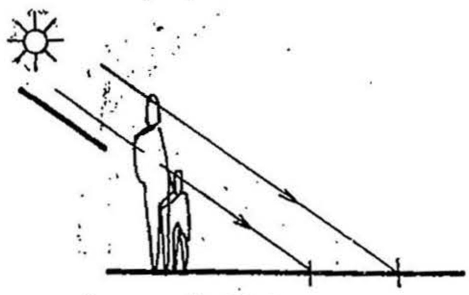


fig. 0.1.11

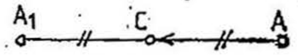


fig. 0.2.1

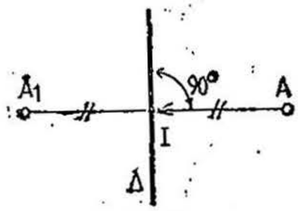


fig 0.2.2

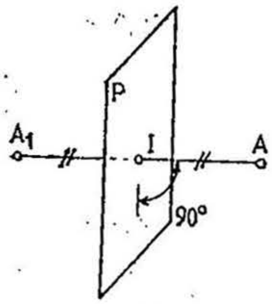


fig. 0.2.3

0.2. TRANSFORMĂRI GEOMETRICE

Cele două tipuri de proiecţii stau la baza celor două tipuri fundamentale de reprezentări plane de arhitectură: reprezentările ortogonale şi axonometrice, pe de o parte, şi perspectiva de arhitectură, pe de altă parte. Pentru a înţelege mai bine proprietăţile lor, se vor analiza unele proprietăţi şi aspecte suplimentare evidenţiate de transformările geometrice: transformarea prin simetrie, translaţie, rotaţie, rototranslaţie şi, în special, transformarea prin omologie.

TRANSFORMAREA PRIN SIMETRIE

Simetria faţă de un punct C (centrul de simetrie). Simetricul punctului A faţă de centrul de simetrie C se obţine unind punctul A cu punctul C şi luînd în prelungire un segment CA_1 egal cu segmentul AC. Punctul A_1 este simetricul lui A faţă de C (fig. 0.2.1).

Simetria faţă de o dreaptă (Δ) (axa de simetrie). Simetricul punctului A faţă de dreapta (Δ) se obţine ducînd din punctul A o perpendiculară pe (Δ) în I şi luînd de cealaltă parte a dreptei (Δ) un segment IA_1 egal cu AI. Se obţine simetricul A^1 al punctului A faţă de dreapta (Δ) (fig. 0.2.2).

Simetria faţă de un plan [P] (planul de simetrie). Simetricul punctului A faţă de planul P se obţine ducînd din punctul A o perpendiculară pe planul [P] şi luînd de cealaltă parte a lui un segment IA_1 egal cu AI. Se obţine simetricul A_1 al punctului A faţă de planul [P] (fig. 0.2.3). Oricare ar fi această simetrie, simetricul simetricului este punctul iniţial.

Două figuri sînt simetrice faţă de un punct, o axă sau un plan, dacă între punctele lor se poate stabili o corespondenţă biunivocă, astfel ca punctele corespunzătoare să fie simetrice în raport cu un punct, o axă sau un plan.

Aplicaţie a transformării prin simetrie. Se dă un tetraedru regulat ABCV (poliedru cu patru feţe triunghiuri echilaterale egale) reprezentat în axonometrie. Aşezaţi pe feţele sale laterale trei tetraedri identici (fig. 0.2.4).

Considerînd faţa laterală BCV drept plan de simetrie, se construieşte simetricul punctului A faţă de acest plan. Punctul V_1 astfel determinat este vîrful tetraedrului identic cu ABCV cu baza triunghiul echilateral BCV (fig. 0.2.5). Construcţia se bazează pe proprietatea înălţimii tetraedrului re-

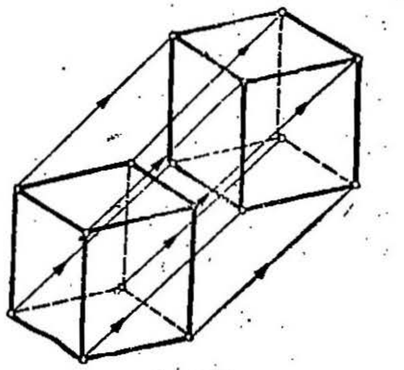


fig. 0.2.9

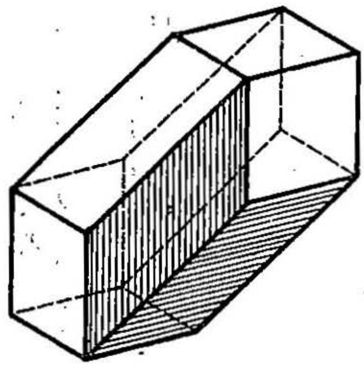


fig. 0.2.10

TRANSFORMAREA PRIN ROTAȚIE

Punctul B se rotește în jurul axei de rotație cu un anumit unghi, ajungînd în poziția B_1. Punctul B_1 (ca și toate punctele intermediare) se află situat pe un cerc aflat într-un plan perpendicular pe axa de rotație și cu centrul în ω (fig. 0.2.11). Rotația dreptei AB, paralelă cu axa de rotație, generează o suprafață cilindrică. Rotația va fi prezentată în capitolul 2 ca metodă a geometriei descriptive.

TRANSFORMAREA PRIN ROTOTRANSLAȚIE

Transformarea prin rototranslație este o combinație a transformării prin translație cu transformarea prin rotație. Punctul A se rotește în jurul axei de rotație și, simultan, avansează de-a lungul acestei axe. Fiecare punct în rototranslație descrie deci o elice (fig. 0.2.12). O dreaptă situată inițial în poziție oarecare față de axa de rotație va descrie prin rototranslație o suprafață curbă riglată.

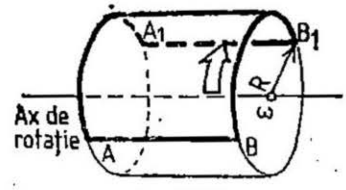


fig. 0.2.11

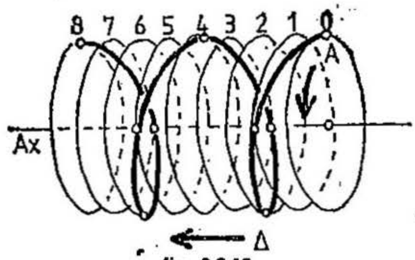


fig. 0.2.12

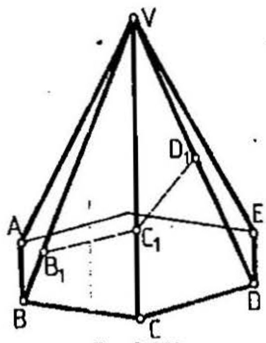


fig. 0.2.13

TRANSFORMAREA PRIN OMOLOGIE

Să încercăm să rezolvăm direct în axonometrie o problemă de secțiune plană într-o piramidă dreaptă hexagonală, sprijinindu-ne exclusiv pe cunoștințele dobîndite în studiul geometriei în spațiu.

Aplicație. Să se secționeze (direct în axonometrie) piramida dreaptă hexagonală ABCDEFV după planul definit de punctele B_1, C_1 și D_1 situate pe trei din muchiile laterale ale piramidei (fig. 0.2.13). Din geometria în spațiu se știe că trei plane oarecare se taie două cîte două după trei drepte concurente. În figura 0.2.14, planele [H], [S] și [L_1] se taie două cîte două după dreptele HS, SL_1 și HL_1 concurente în punctul 1. Analizînd problema propusă, se observă că planul de secțiune [S], planul feței laterale [L_1] și planul orizontal [H] se taie două cîte două după trei drepte concurente (fig. 0.2.15). Punctul de concurență **1** se obține la

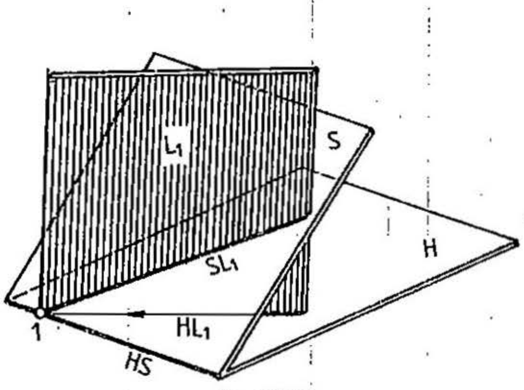


fig. 0.2.14

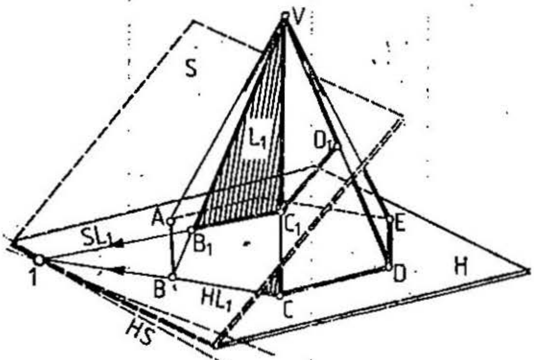


fig. 0.2.15

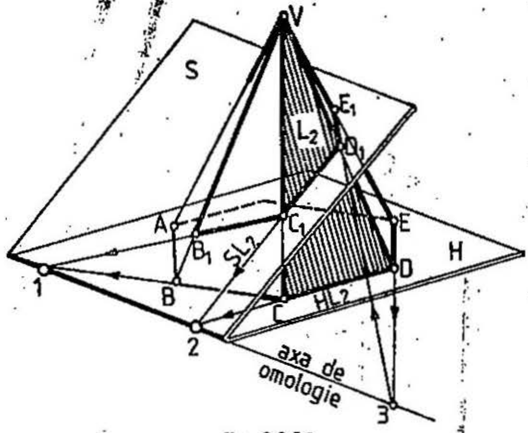


fig. 0.2.16

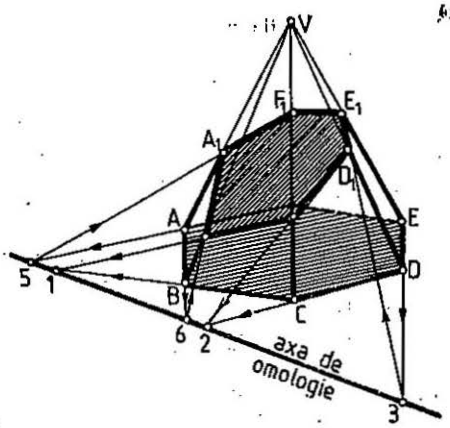


fig. 0.2.17

intersecția dreptelor SL_1 și HL_1; se știe că dreapta **HS** trece și ea prin punctul **1**, dar nu este încă determinată.

În figura 0.2.16, planul de secțiune [S], planul lateral [L_2] și planul orizontal [H] se taie și ele două cîte două după trei drepte concurente. Punctul de concurență **2** se obține la intersecția dreptelor SL_2 și HL_2. Întrucît dreapta HS trece prin punctele **1** și **2**, ea este acum determinată. Prelungind laturile hexagonului de bază pînă la intersecția cu dreapta **HS**, se obțin punctele **3**, **6** și **5** (punctul **4** iese din pagină) care, unite, respectiv, cu D_1, B_1 și A_1 determină laturile secțiunii hexagonale prin piramidă (fig. 0.2.17).

Să interpretăm rezolvarea găsită. Problema corespunde cazului cel mai general de transformare geometrică prin *omologie în spațiu*. Cele două hexagoane (hexagonul de bază și hexagonul de secțiune) se află în relație de omologie în spațiu sau de *perspectivitate*. Denumirea de perspectivitate provine din asocierea proiecției centrale (în cazul nostru cu centrul în punctul V) cu perspectiva.

Dreapta **HS** joacă un rol important și se numește *axă de omologie* sau *axă de perspectivitate*. Axa de omologie este dreapta de intersecție dintre planele care conțin figurile omoloage (în cazul nostru planele [H] și [S]).

OMOLOGIE ÎN SPAȚIU

Perspectivitate

În cazul general, *sistemul de omologie* este alcătuit din două elemente:

— un centru de omologie (în acest caz punctul **V**);
— o axă de omologie (în acest caz, dreapta **HS**).

Omologia presupune o *dublă corespondență* a celor două figuri omoloage.

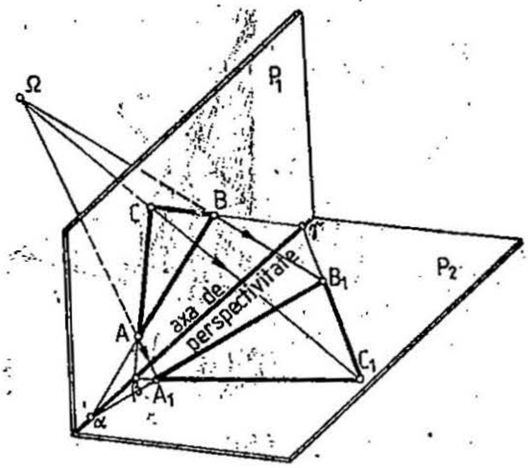


fig. 0.2.18

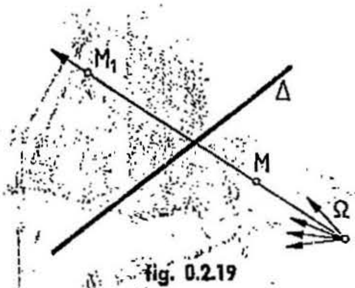


fig. 0.2.19

Laturile omoloage ale celor două figuri sînt concurente două cîte două pe axa de omologie (în acest caz, în punctele 1, 2, 3, 4, 5 şi 6). Dreptele care unesc vîrfuri omoloage sînt concurente în centrul de omologie (în acest caz, punctul V).

Aplicaţii ale omologiei în spaţiu (perspectivităţii). În afară de rezolvarea a numeroase probleme direct în axonometrie, omologia în spaţiu (perspectivitatea) are vaste aplicaţii în perspectiva de arhitectură, în trasarea umbrelor la lumină artificială etc. În figura 0.2.18:

— planul $[P_1]$ poate fi interpretat ca tablou de perspectivă pe care se obţine perspectiva ABC a triunghiului $A_1B_1C_1$ din planul orizontal $[P_2]$, văzută din punctul Ω;

— triunghiul $A_1B_1C_1$ poate fi interpretat ca pata de lumină aruncată pe planul orizontal $[P_2]$ de sursa de lumină artificială Ω prin fanta triunghiulară ABC practicată în planul opac $[P_1]$.

În ambele interpretări, punctul Ω este centrul de omologie în spaţiu, iar intersecţia dintre planele $[P_1]$ şi $[P_2]$ care conţin cele două figuri omoloage determină axa de perspectivitate $\alpha\beta\gamma$.

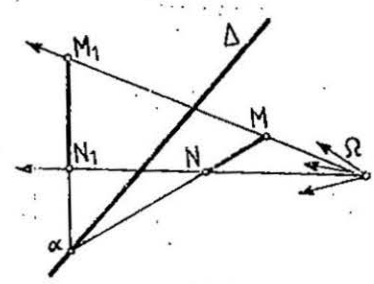


fig 0.2.20

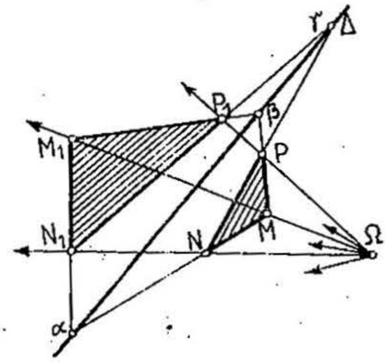


fig. 0.2.21

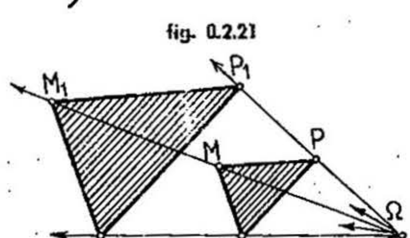


fig. 0.2.22

OMOLOGIE PLANĂ

Definiţii

În cazul general de omologie plană, sistemul de omologie este alcătuit din două elemente (fig. 0.2.19):

— un centru de omologie Ω;

— o axă de omologie (Δ).

Dacă punctul M_1 este omologul punctului M, el trebuie să se afle situat pe dreapta ΩM.

Prin definiţie, dacă punctul M_1 este omologul punctului M faţă de centrul de omologie Ω şi de axa de omologie (Δ), N_1 este omologul lui N faţă de acelaşi sistem de omologie atunci cînd:

— N_1 se află situat pe dreapta ΩN;

— MN şi M_1N_1 sînt concurente într-un punct aflat pe dreapta (Δ) — punctul α.

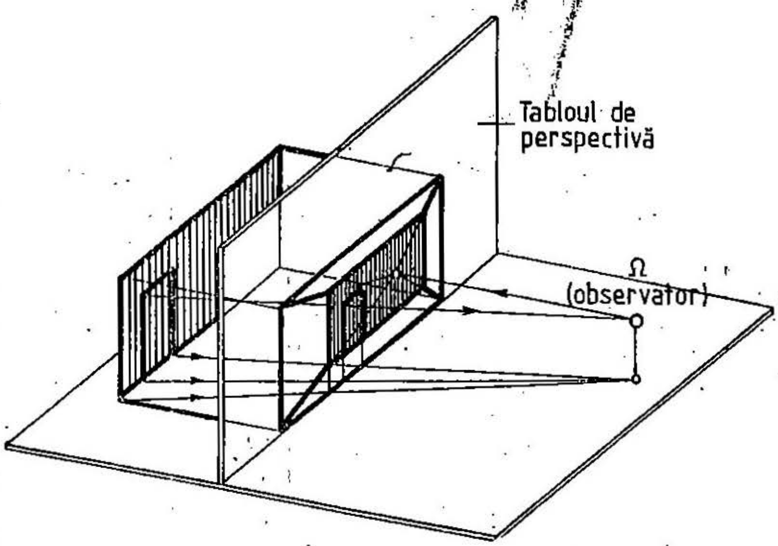


fig. 0.2.23

Rezultă de aici că dreapta M_1N_1 este omoloaga dreptei MN (fig. 0.2.20). În cazul omologiei a două triunghiuri, se observă că dreptele care unesc vîrfuri omoloage (MM_1, NN_1 şi PP_1) sînt concurente în Ω, în timp ce laturile omoloage ale celor două triunghiuri se întîlnesc două cîte două pe axa de omologie [Δ] (fig. 0.2.21):

$$MN \cap M_1N_1 \rightarrow \alpha;\ MP \cap M_1P_1 \rightarrow \beta;\ NP \cap N_1P_1 \rightarrow \gamma.$$

Punctele de intersecţie obţinute sînt α, β şi γ. În cazul omologiei plane generale a două triunghiuri se obţine o configuraţie de 10 puncte (cele şase vîrfuri ale celor două triunghiuri, punctele α, β şi γ şi centrul de omologie Ω), care se numeşte *configuraţia Desargues.*

OMOTETIE SAU ASEMĂNARE

Omotetia este un caz particular al omologiei generale care intervine atunci cînd dispare axa de omologie (Δ), respectiv este aruncată la infinit. Elementele sistemului de omotetie sînt:

un centru de omotetie Ω;

o axă de omotetie aflată la infinit.

În cazul omotetiei a două triunghiuri (fig. 0.2.22), se vede că se obţin două triunghiuri asemenea, întrucît laturile omoloage devin paralele (α, β şi γ fiind situate pe axa de omotetie care este la infinit, se află şi ele la infinit).

OMOTETIE ÎN SPAŢIU

Mecanismul perspectivei frontale. Omotetia în spaţiu are aceeaşi configuraţie de puncte, dar într-o interpretare spaţială. Un exemplu de aplicaţie îl constituie perspectiva frontală, în care elementele din realitate situate în plane paralele cu tabloul de perspectivă sînt asemenea cu reprezentările lor pe tablou (fig. 0.2.23).

AFINITATE

Afinitatea este un caz particular al omologiei generale care intervine atunci cînd dispare centrul de omologie Ω (este aruncat la infinit). Elementele sistemului de afinitate sînt deci:

— o direcţie de afinitate (provenind din aruncarea la infinit a centrului de omologie Ω);

— o axă de afinitate (Δ).

În cazul afinităţii a două triunghiuri (fig. 0.2.24), se obţine practic o proiecţie paralelă după direcţia de afinitate, laturile afine ale celor două triunghiuri întîlnindu-se două cîte două pe axa de afinitate în punctele α, β şi γ.

Aplicaţie a. afinităţii: construcţia unei figuri afine. Se dă, într-o reprezentare axonometrică oarecare, un pentagon regulat ABCDE. Cunoscînd vîrful A_1 al unei feţe pentagonale identice adiacente feţei ABCDE după latura DE, se cere să se deseneze această faţă în întregime (fig. 0.2.25).

— desenul tehnic, care redă la scară adevăratele forme şi mărimi şi care foloseşte proiecţia paralelă (cilindrică) ortogonală; direcţia de proiecţie este perpendiculară pe planul de proiecţie. Desenul perspectiv corespunde situaţiei în care observatorul (centrul de proiecţie) se află la o distanţă finită de obiect, în timp ce desenul tehnic corespunde situaţiei în care observatorul (centrul de proiecţie) se află la o distanţă infinită de obiect, proiecţia obiectului pe planul de proiecţie fiind astfel paralelă.

Desenul perspectiv, fiind o proiecţie dintr-un centru aflat la distanţă finită (fig. 0.3.1), redă obiectul mai aproape de percepţia sa în realitate decît desenul tehnic care este mai „abstract" din acest punct de vedere. Această asemănare cu realitatea (fig. 0.3.2) se face în dauna relaţiilor metrice (lungimi, suprafeţe, unghiuri) care se deformează, făcînd dificilă interpretarea metrică sau „măsurarea" obiectului reprezentat în desen perspectiv. Raportul a trei puncte coliniare nu se păstrează în perspectivă.

Desenul tehnic, fiind o proiecţie paralelă (de la distanţă infinită), păstrează paralelismul dreptelor din spaţiu şi raportul a trei puncte coliniare, dar se îndepărtează de percepţia vizuală a obiectului din natură. El are un grad mai mare de abstractizare.

Desenul tehnic prezintă două tipuri de reprezentări:

— *reprezentarea (proiecţia) axonometrică*, obţinută prin proiecţia obiectului pe un plan de proiecţie axonometric, aşezat înclinat faţă de axele de coordonate din spaţiu (fig. 0.3.3);

— *reprezentarea (proiecţia) ortogonală*, obţinută prin proiecţia obiectului pe plane paralele cu axele de coordonate din spaţiu (fig. 0.3.4); deoarece proiecţia pe un singur plan nu determină obiectul din spaţiu (ea dă o imagine calitativă de volum, dar nu şi cantitativă măsurabilă, decît în anumite condiţii), se adaugă proiecţii pe alte plane.

Cea mai simplă reprezentare ortogonală este *epura de geometrie descriptivă a lui Monge*, obţinută prin două proiecţii ortogonale pe două plane ortogonale, urmate de rabaterea unui plan pe celălalt.

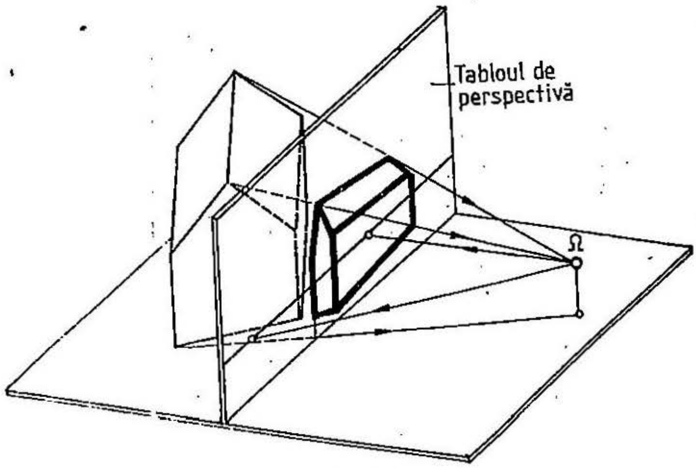


fig. 0.3.1

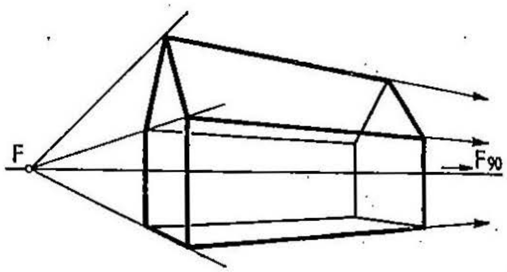


fig. 0.3.2

Dreapta DE va fi axa de afinitate. Succesiunea operaţiilor este cea din figura 0.2.26.

Afinitate în spaţiu: umbra la soare. În aplicaţia precedentă, pentagonul regulat ABCDE poate fi, de exemplu, una din feţele unui poliedru regulat cu 12 feţe pentagonale (dodecaedru regulat). Cu ajutorul afinităţii în spaţiu se poate construi întregul dodecaedru.

O altă aplicaţie a afinităţii în spaţiu o constituie trasarea umbrelor la soare. Cunoscînd umbra lăsată de un punct A al unei deschideri, se cere desenarea umbrei lăsate de întregul contur (fig. 0.2.27).

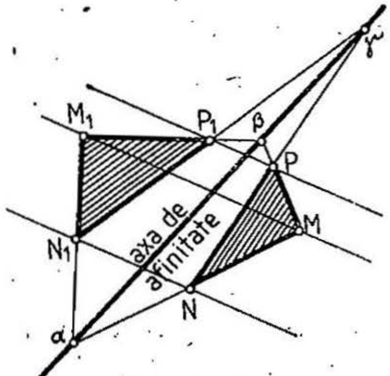


fig. 0.2.24

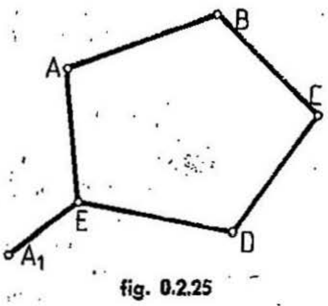


fig. 0.2.25

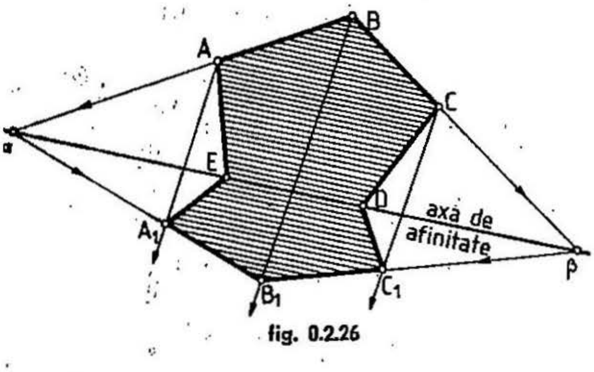


fig. 0.2.26

Axa de afinitate este dreapta de intersecţie dintre planul în care este cuprinsă deschiderea (uşa cu fereastra) şi planul pe care cade umbra. Rezolvarea problemei este dată în figura 0.2.28.

0.3. TIPURI DE REPREZENTĂRI DE ARHITECTURĂ

Tipologia reprezentărilor de arhitectură în bidimensional corespunde tipologiei sistemelor de proiecţie. Astfel, în arhitectură şi construcţii se folosesc două tipuri de desene, ca rezultat al sistemului de proiecţie folosit (*Gheorghiu*, 1963), şi anume:

— d e s e n u l p e r s p e c t i v, care redă aspectele din spaţiu şi foloseşte proiecţia centrală (conică);

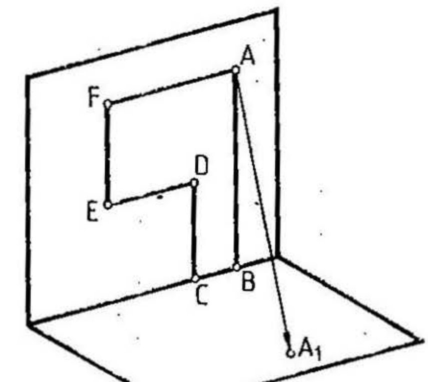


fig. 0.2.27

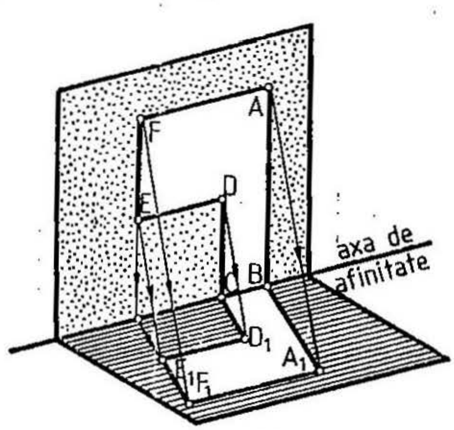


fig. 0.2.28

ntre cele două tipuri de reprezentări ale desenu- tehnic, reprezentarea axonometrică este mai roape de percepția vizuală a obiectului din natură, ɛrind o imagine calitativă de volum (fig. 0.3.5); ıd însă o proiecție pe un singur plan, ea 'permite toate tipurile de măsurători. De exemu, deși raportul a trei puncte coliniare (raportul nplu) se păstrează, nu se păstrează alte relații ɛtrice cum sînt suprafețele și unghiurile, care ar deformate.

ura de geometrie descriptivă a lui Monge corecɪză aceste defecte metrice, oferind două proiecții togonale care păstrează toate relațiile metrice, :lusiv suprafețele și unghiurile. Ea prezintă însă gradul cel mai înalt de abstractizare dintre toate reprezentările bidimensionale și se îndepărtează cel mai mult de percepția vizuală a obiectului din natură. Deși sistemul de cotare permite determinarea metrică a obiectului din două proiecții ortogonale, de multe ori este necesară introducerea unei a treia proiecții pentru înțelegerea obiectului (fig. 0.3.6). Practic, un obiect de arhitectură complicat necesită multiple reprezentări: planuri, secțiuni, fațade etc.

Reprezentările în proiecție ortogonală sînt atît de precise încît permit construcția obiectului de arhitectură. Planurile de execuție pot fi: planuri de fundații, planurile diferitelor niveluri, planuri de cofrare, secțiuni caracteristice, planuri de învelitoare, detalii de fațadă, detalii de finisaj etc. Datorită gradului ridicat de abstractizare, aceste reprezentări constituie un limbaj specific de arhitectură și construcții și descifrarea și înțelegerea lor necesită o pregătire de specialitate.

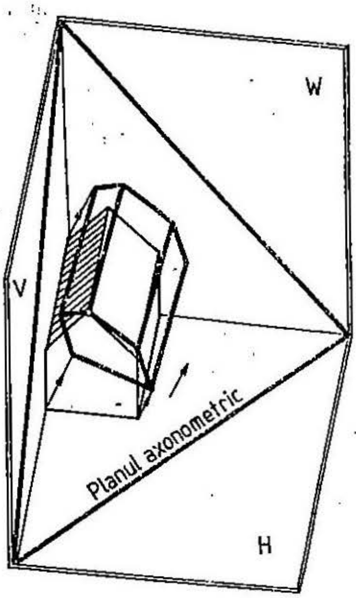


fig. 0.3.3

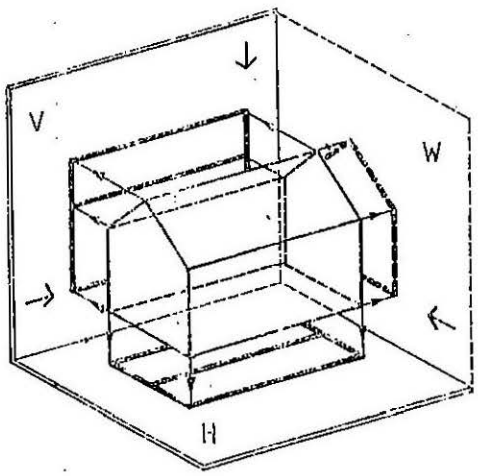
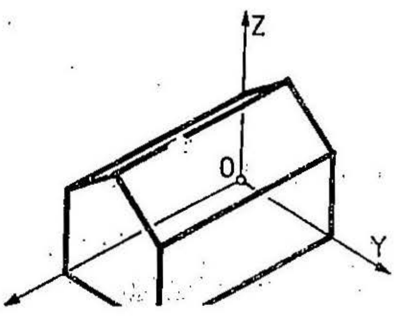
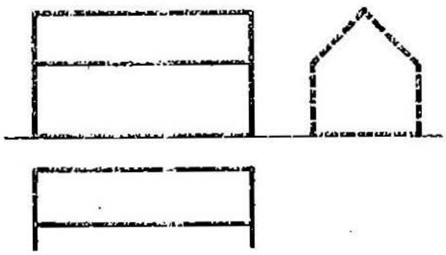


fig. 0.3.4





Partea întîi

REPREZENTĂRI DE ARHITECTURĂ ÎN GEOMETRIA DESCRIPTIVĂ ŞI AXONOMETRIE

1. ELEMENTE DE GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

1.1. PUNCTUL ŞI DREAPTA

SISTEMUL DE PROIECŢIE DUBLU ORTOGONAL MONGE

Sistemul de proiecţie dublu ortogonal (numit Monge) este alcătuit din două plane perpendiculare [H] şi [V] care se numesc *plane de proiecţie*. [H] este planul orizontal de proiecţie şi [V] este planul vertical de proiecţie.

Dreapta de intersecţie OX dintre aceste două plane de proiecţie se numeşte *linie de pămînt*. Cele două plane de proiecţie [H] şi [V] sînt nelimitate şi împart spaţiul în patru zone numite *diedre*. Cele patru unghiuri diedre se notează de la I la IV (fig. 1.1.1.). Un punct A din spaţiu se va proiecta pe cele două plane H şi V în două puncte a şi a', numite proiecţiile punctului A.

AL TREILEA PLAN DE PROIECŢIE

Pentru redarea mai completă a formei obiectului reprezentat, se introduce un al treilea plan de proiecţie, perpendicular pe celelalte două plane [H] şi [V]. El se numeşte planul lateral de proiecţie şi se notează [W] (fig. 1.1.2.). Planul lateral de proiecţie [W] este perpendicular pe linia de pămînt OX. În această reprezentare, orice obiect va avea trei proiecţii: proiecţia orizontală pe planul [H], proiecţia verticală pe planul [V], proiecţia laterală pe planul [W]. Se presupune un obiect în spaţiu (de exemplu un scaun) aşezat ca în figura 1.1.3. Proiectînd fiecare punct al obiectului respectiv pe cele trei plane de proiecţie, se obţin cele *trei proiecţii* ale obiectului. Pentru a fi reprezentate în două dimensiuni, deci pe un plan (planşetă, tablă, caiet), cele două proiecţii pe planele [H] şi [W]

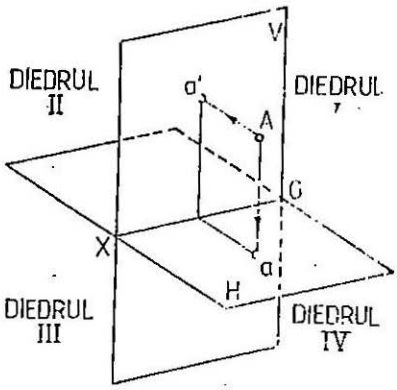


fig. 1.1.1

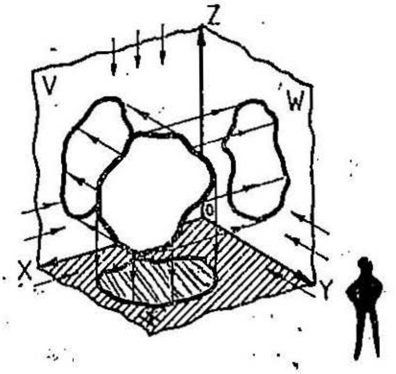


fig. 1.1.2

trebuie aduse în planul proiecției verticale, respectiv în [V]. Astfel, planul [H] se rotește în jurul liniei de pămînt OX pînă cînd se suprapune peste planul [V], iar planul [W] se rotește în jurul axei OZ pînă cînd se suprapune și el peste planul [V] (fig. 1.1.4.). Pe același plan se obțin cele trei proiecții (orizontală, verticală și laterală) ale obiectului reprezentat. În figura 1.1.4. se poate observa corespondența celor trei proiecții. Prin introducerea planului lateral de proiecție [W], spațiul nu mai este divizat în patru unghiuri diedre, ci în 8 unghiuri *triedre* (fig. 1.1.5.). Cele opt triedre se notează de la I la VIII.

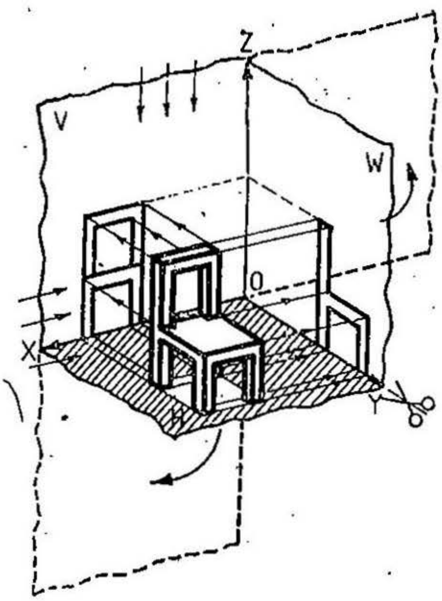


fig. 1.1.3

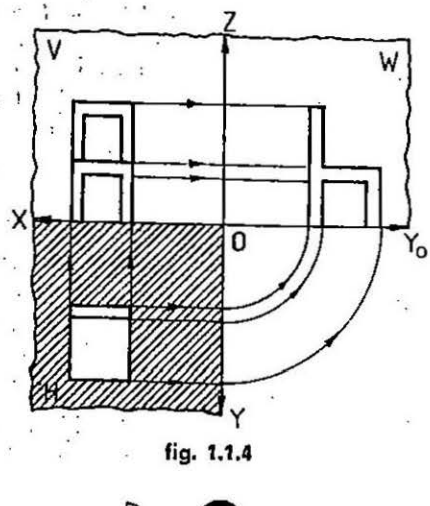


fig. 1.1.4

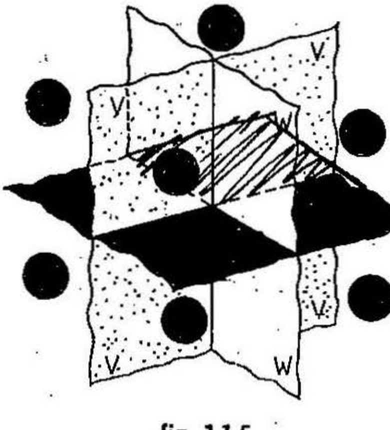


fig. 1.1.5

COORDONATELE DESCRIPTIVE

Poziția unui punct A din spațiu este determinată de trei coordonate descriptive, abscisa, depărtarea și cota. *Abscisa* punctului este distanța lui față de planul lateral de proiecție [W] și se măsoară pe axa OX. *Depărtarea* punctului este distanța lui de planul vertical de proiecție [V] și se măsoară pe axa OY. *Cota* punctului este distanța lui de planul orizontal de proiecție [H] și se măsoară pe axa OZ. Punctul O este originea sistemului OX, OY, OZ. Prin *rabaterea* (suprapunerea) planelor de proiecție [H] și [W] pe planul vertical de proiecție [V] se obține o reprezentare bidimensională [în două dimensiuni) a punctului A din spațiu, prin cele trei proiecții pe planele [H], [V] și [W]. În figurile 1.1.6 și 1.1.7 se văd segmentele de dreaptă care măsoară abscisa, depărtarea și cota punctului A, situate respectiv pe axele OX, OY și OZ. Întrucît cele trei plane de proiecție sînt perpendiculare toate între ele (formează un *triedru tridreptunghic*), abscisa, depărtarea și cota punctelor din spațiu se pot măsura în mai multe feluri, ca în figurile 1.1.8, 1.1.9 și 1.1.10. Corespondențele respective în *epură* (adică în triplă proiecție ortogonală) se văd și ele în cele trei cazuri (pentru abscisă, depărtare și cotă). Coordonatele unui punct sînt scrise în paranteză, în ordinea prezentată: abscisă, depărtare, cotă, de exemplu A (11, --6, 9). Pentru un punct situat în *triedrul* 1 (cel reprezentat în figurile 1.1.8 1.1.9 și 1.1.10), toate *coordonatele* (abscisa, depărtarea și cota) sînt *pozitive*. Aceste coordonate se măsoară pe axele OX, OY și OZ pornind de la punctul O *în direcția indicată de săgeți*.

Coordonatele sînt *negative* atunci cînd sînt situate dincolo de punctul O și se măsoară în sens invers pe axele de coordonate. Punctele situate în celelalte triedre (II. . . VIII) au cel puțin una din coordonate negativă. Reprezentarea punctelor din aceste

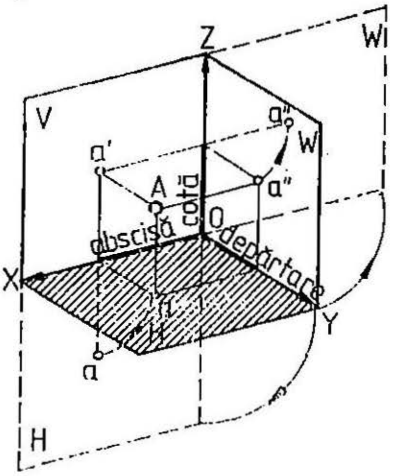


fig. 1.1.6

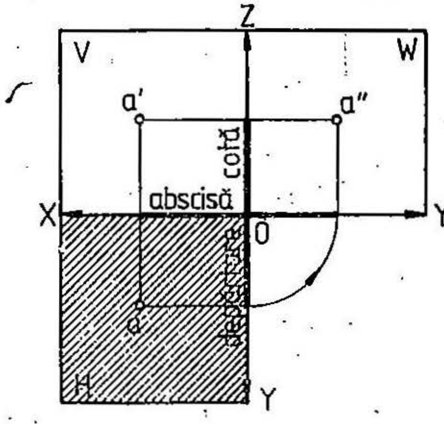


fig. 1.1.7

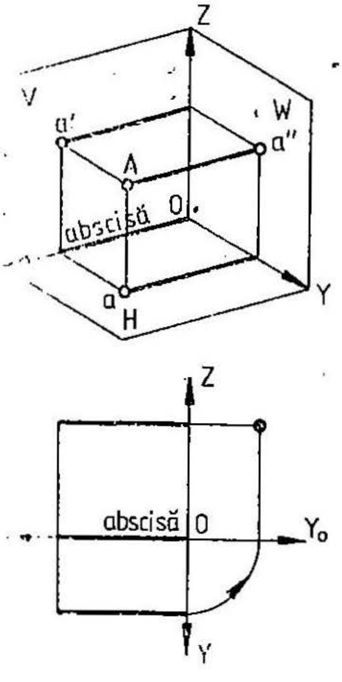


fig. 1.1.8

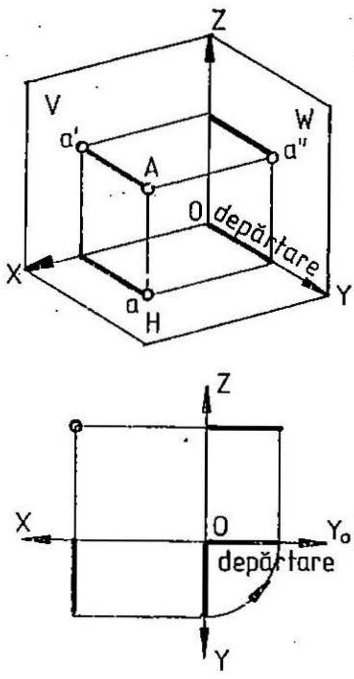


fig. 1.1.9

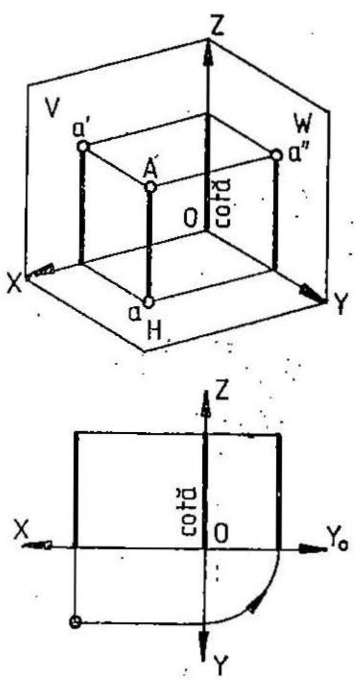


fig. 1.1.10

··· direct în proiecţia triortogonală este ceva ···plicată, întrucît corespondenţele dintre ··· proiecţii ale punctului sînt mai puţin evi··· aceea, este recomandabilă analiza mai ···respondenţelor *în spaţiu*, fie pe machetă, ···hiţa axonometrică. O asemenea analiză pentru toate situaţiile este reprezentată în figurile 1.1.11...1.1.18. Figurile 1.1.19...1.1.24 ilustrează *poziţiile particulare* ale punctelor din spaţiu, respectiv pe axele de coordonate OX, OY şi OZ, atît în porţiunea negativă, cît şi în porţiunea pozitivă a acestor axe.

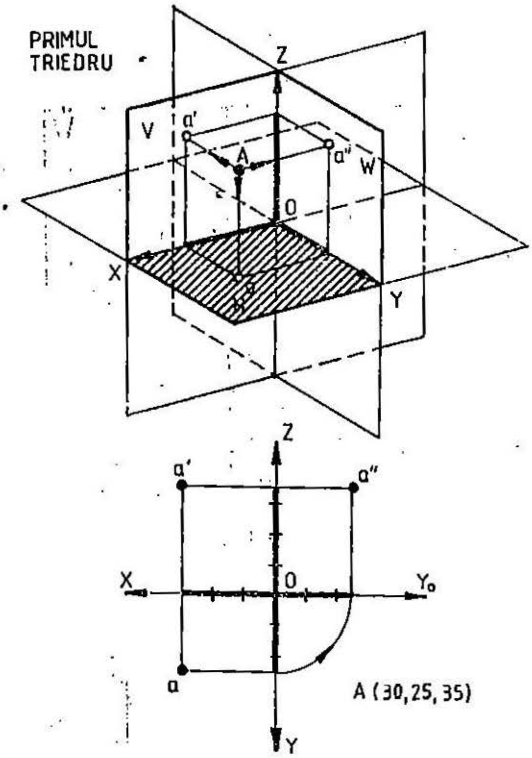


fig. 1.1.11

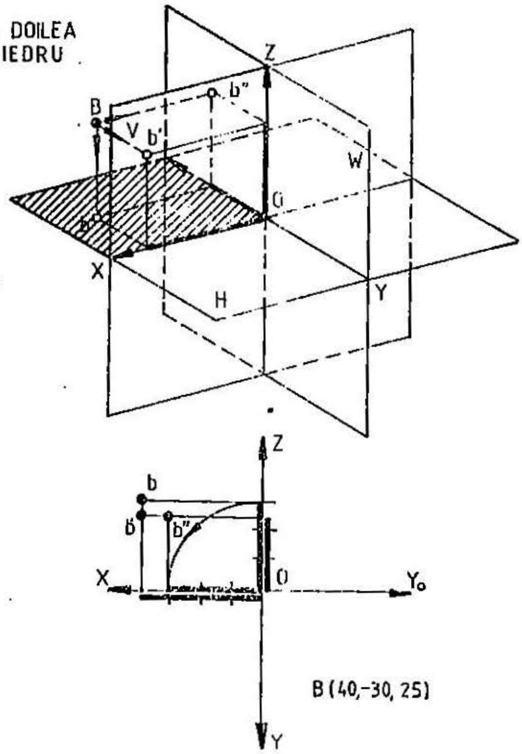
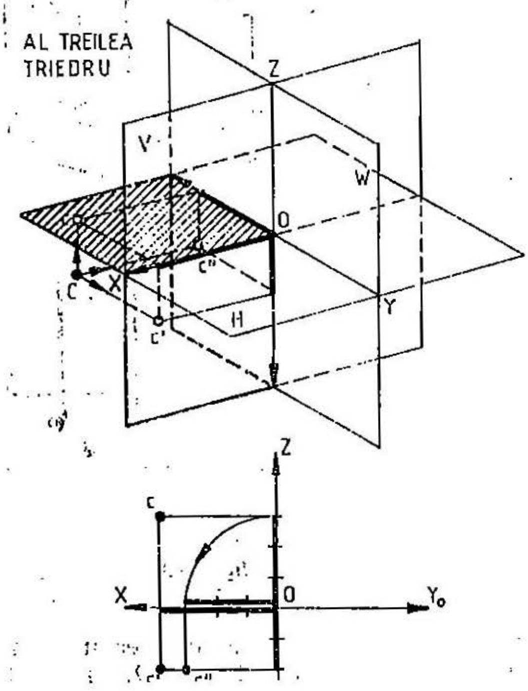
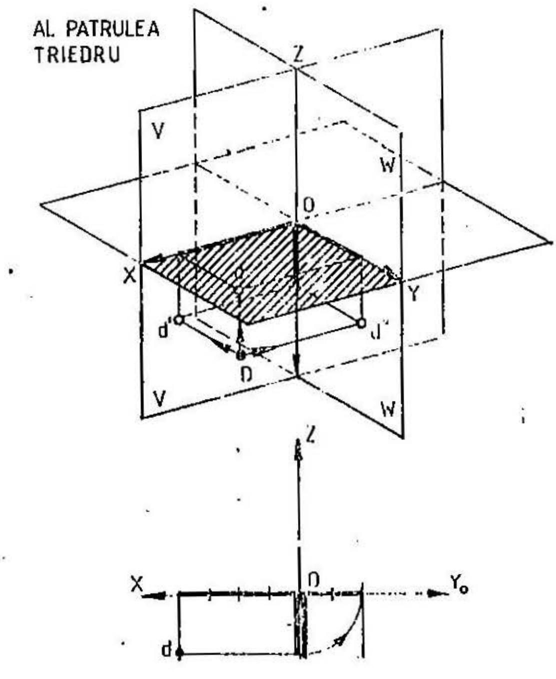


fig. 1.1.12





AL CINCILEA TRIEDRU

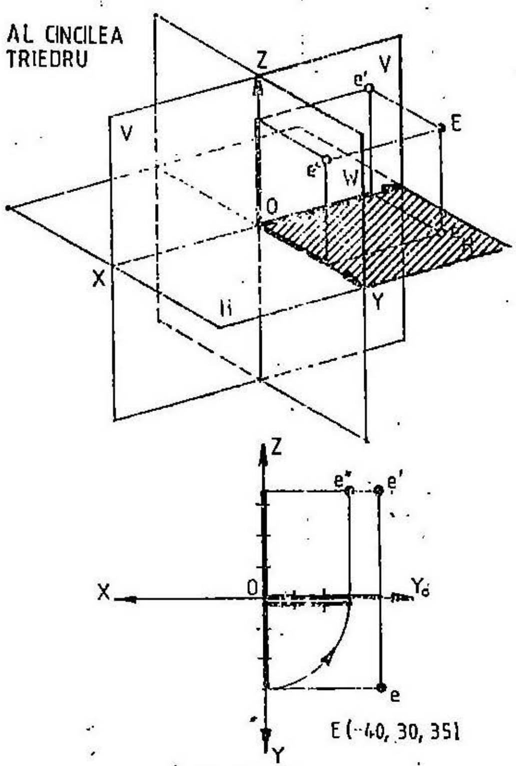


fig. 1.1.15

AL ŞASELEA TRIEDRU

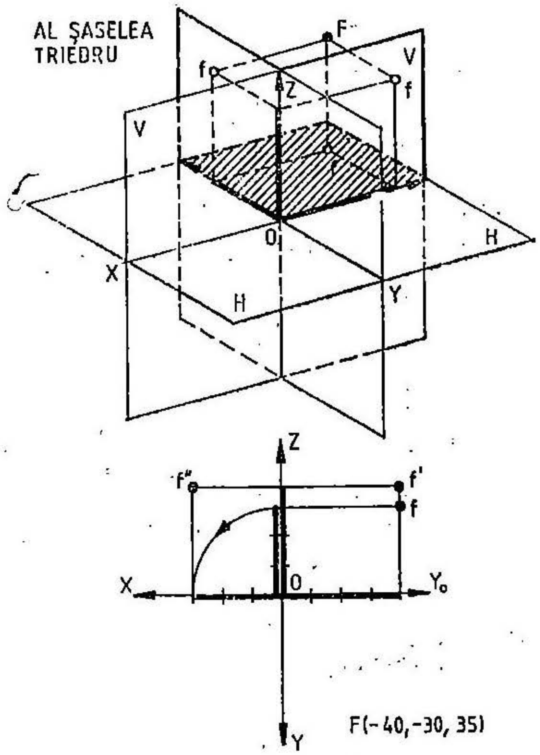


fig. 1.1.16

AL ŞAPTELEA TRIEDRU

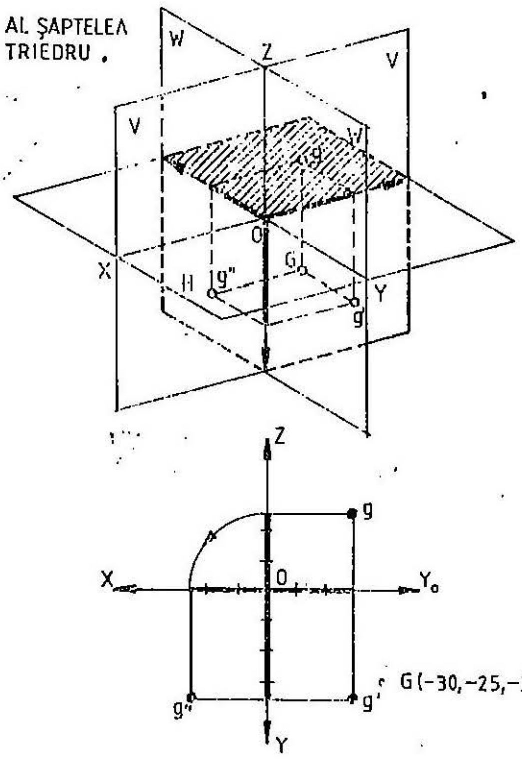


fig. 1.1.17

AL OPTULEA TRIEDRU

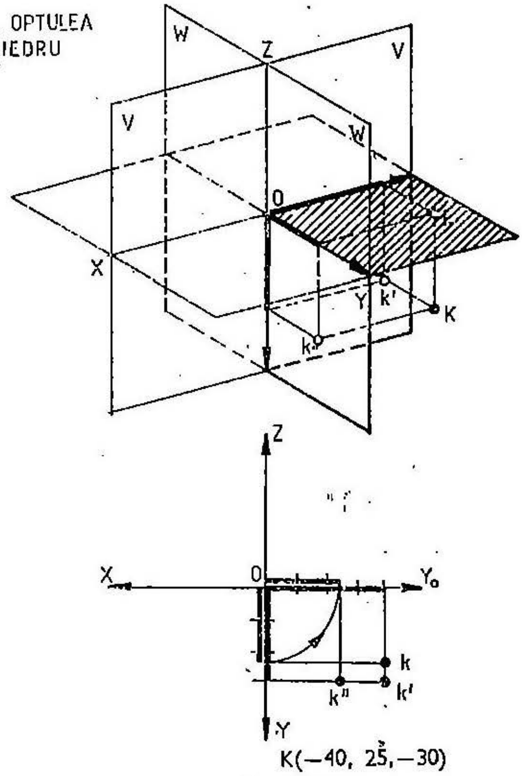


fig. 1.1.18

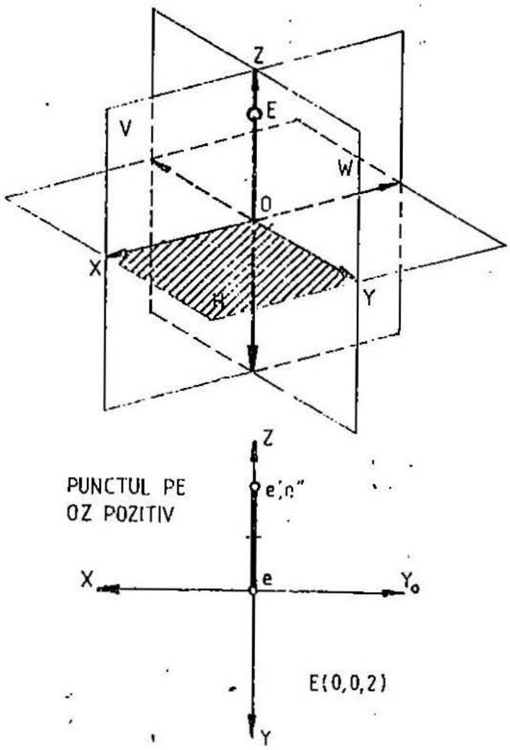


fig. 1.1.23

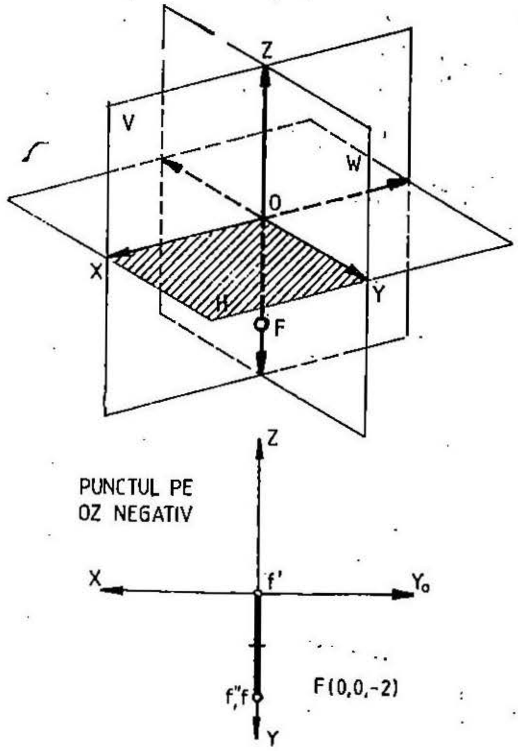


fig. 1.1.24

DREAPTA ÎN SISTEMUL DE PROIECȚIE

Se presupune că există două puncte situate în triedrul I; A (4, 1, 2) și B (1, 3, 4) ale căror proiecții pe cele trei planuri de proiecție sînt: a, a', a'' și b, b', b'' (fig. 1.1.25.). Unind a cu b, a' cu b' și a'' cu b'', se obțin proiecțiile segmentului de dreaptă AB și anume: ab — proiecție orizontală, a'b' — proiecție verticală, a''b'' — proiecție laterală. În figura 1.1.26 se observă corespondența celor trei proiecții. Întrucît dreapta AB nu este paralelă sau perpendiculară pe nici unul dintre cele trei plane de proiecție [H], [V], [W], ea se numește *dreaptă oarecare*. În cazul mai general, proiecțiile dreptei se notează (d), (d') și (d'') (fig. 1.1.27).

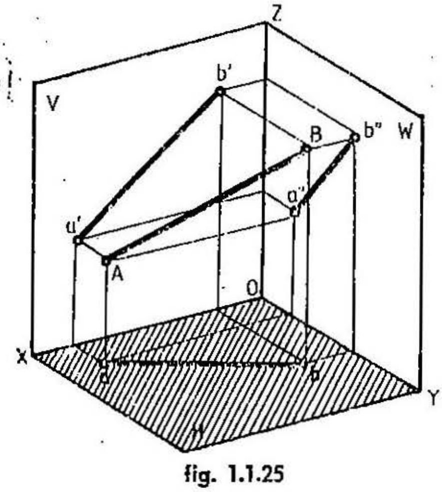


fig. 1.1.25

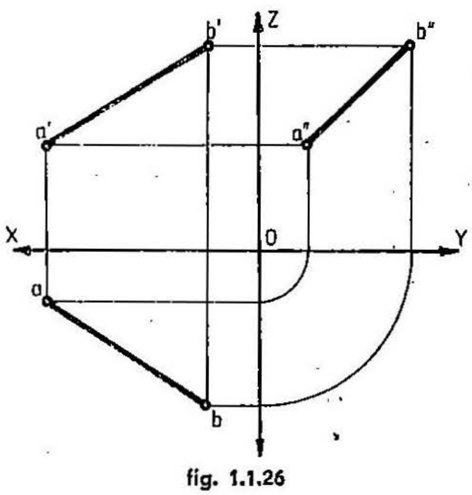


fig. 1.1.26

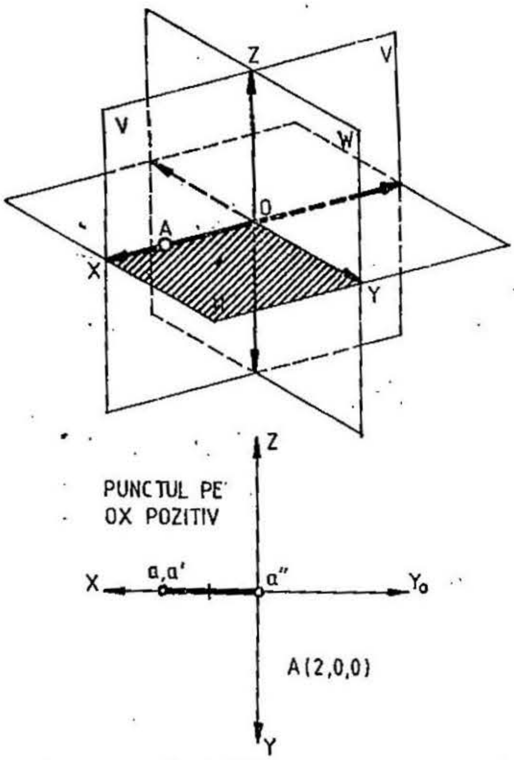


fig. 1.1.19

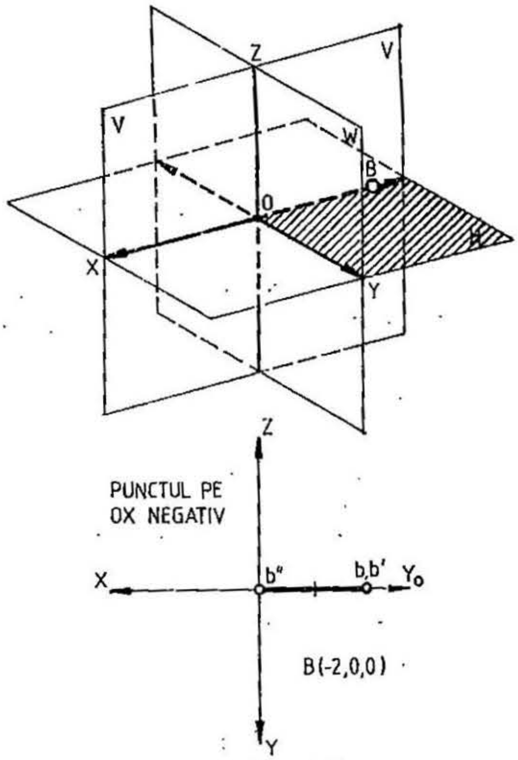


fig. 1.1.20

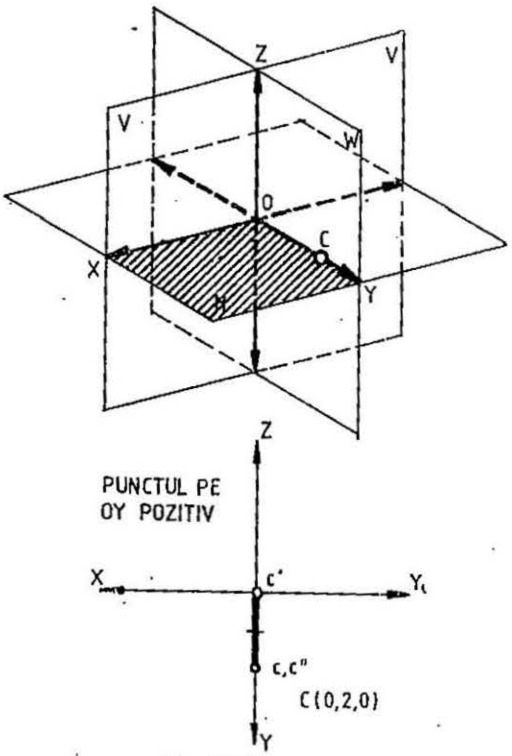


fig. 1.1.21

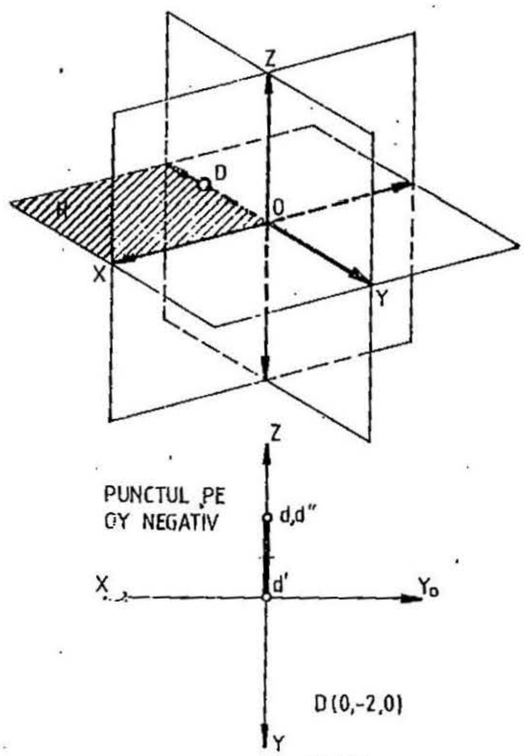


fig. 1.1.22

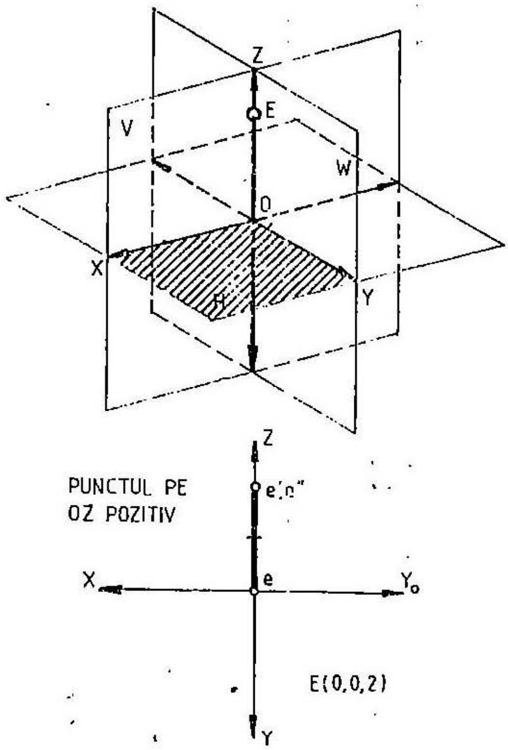


fig. 1.1.23

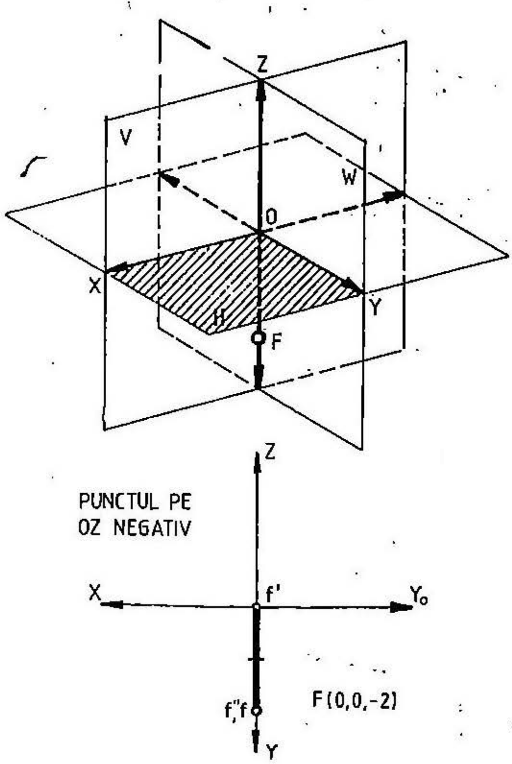


fig. 1.1.24

DREAPTA ÎN SISTEMUL DE PROIECȚIE

Se presupune că există două puncte situate în triedrul I; A (4, 1. 2) și B(1, 3, 4) ale căror proiecții pe cele trei planuri de proiecție sînt: a, a', a'' și b, b', b'' (fig. 1.1.25.). Unind a cu b, a' cu b' și a'' cu b'', se obțin proiecțiile segmentului de dreaptă AB și anume: ab — proiecție orizontală, a'b' — proiecție verticală, a''b'' — proiecție laterală. În figura 1.1.26 se observă corespondența celor trei proiecții. Întrucît dreapta AB nu este paralelă sau perpendiculară pe nici unul dintre cele trei plane de proiecție [H], [V], [W], ea se numește *dreaptă oarecare*. În cazul mai general, proiecțiile dreptei se notează (d), (d') și (d'') (fig. 1.1.27).

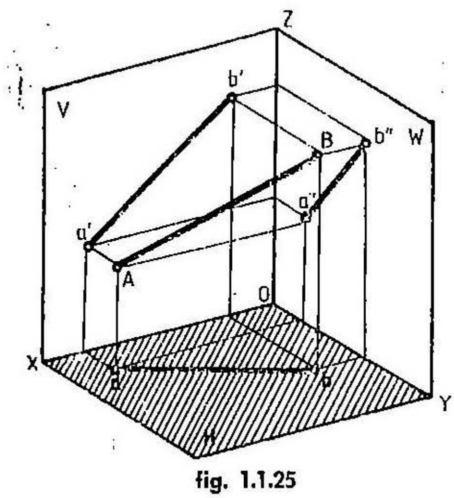


fig. 1.1.25

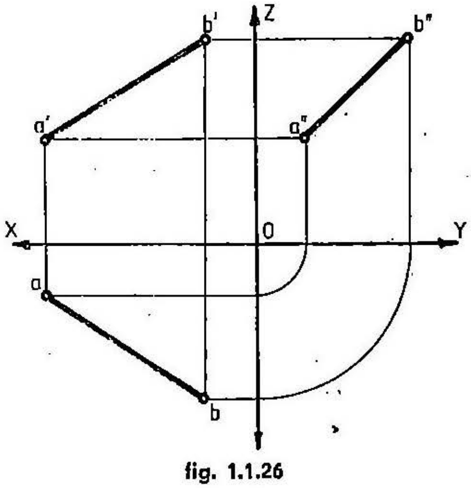


fig. 1.1.26

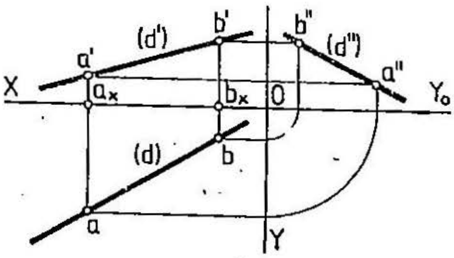


fig 1.1.27

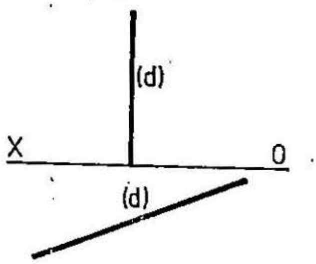


fig. 1.1.28

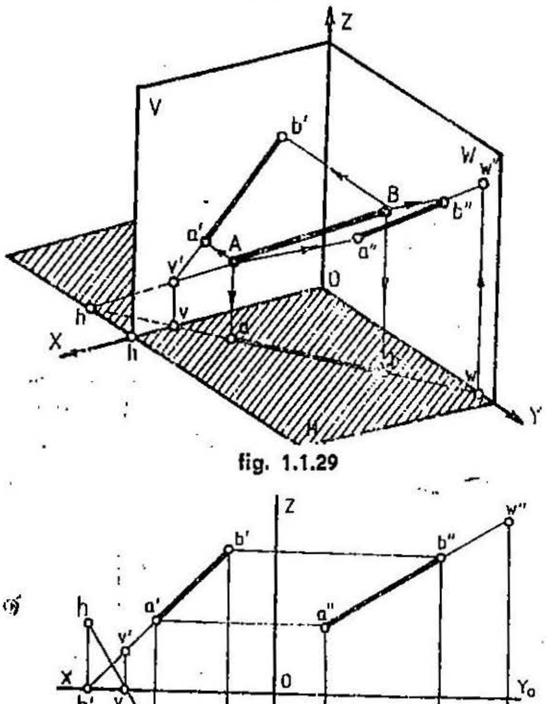


fig. 1.1.29

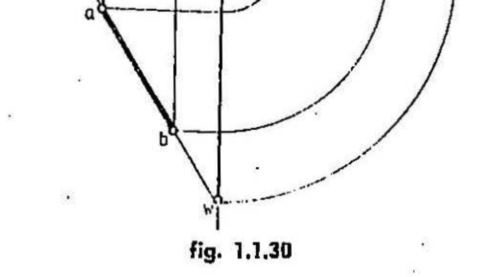


fig. 1.1.30

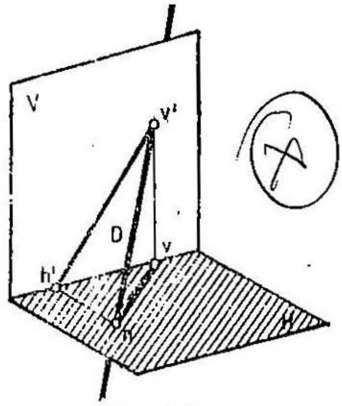


fig. 1.1.31

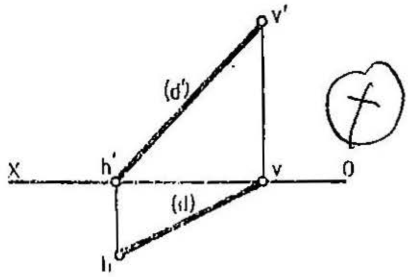


fig. 1.1.32

Celor două proiecții, orizontală și verticală (d d'), le corespunde întotdeauna în mod biunivoc o dreaptă în spațiu și reciproc, cu condiția ca unui punct dat în proiecție orizontală pe (d) să-i corespundă un punct în proiecția verticală pe (d'). În figura 1.1.28 cele două proiecții nu îndeplinesc condiția enunțată anterior, de aceea proiecțiile (d) și (d') nu pot reprezenta o dreaptă în spațiu.

Urmele dreptei pe cele trei plane de proiecție. Punctele de intersecție ale unei drepte cu planele de proiecție se numesc *urmele dreptei*. Urmele *orizontală*, *verticală* și *laterală* ale dreptei sînt de fapt punctele dreptei care au respectiv *cota*, *depărtarea* sau *abscisa* nule. Urmele dreptei se notează de obicei (h, h'), (v, v'), (w, w') ca în figura 1.1.29. Figura 1.1.30 reprezintă construcția direct în epură a urmelor dreptei AB. În sistemul de proiecție Monge (dublu ortogonal), cele două urme (h, h') și (v, v') ale unei drepte (d, d') pe cele două plane de proiecție [H] și [V] se obțin ca în figurile 1.1.31 și 1.1.32.

În epură (fig. 1.1.32) se observă că urma orizontală se determină mai întîi prin proiecția ei verticală h', în timp ce urma verticală se determină mai întîi prin proiecția ei orizontală v. Celelalte proiecții se obțin prin simpla corespondență biunivocă a proiecției punctelor, proprietatea de bază a geometriei descriptive .

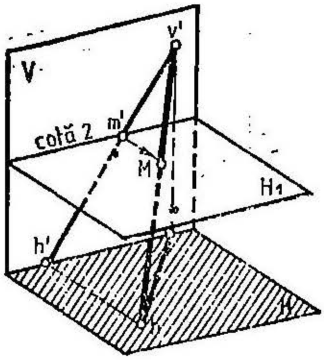


fig. 1.1.33

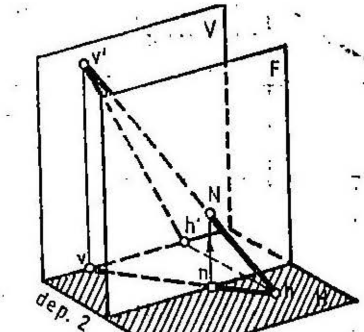


fig. 1.1.35

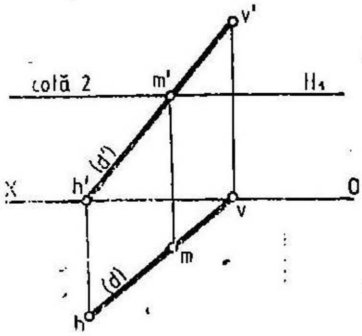


fig. 1.1.34

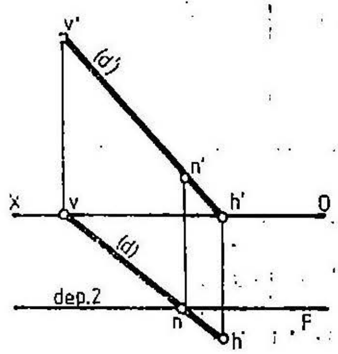


fig. 1.1.36

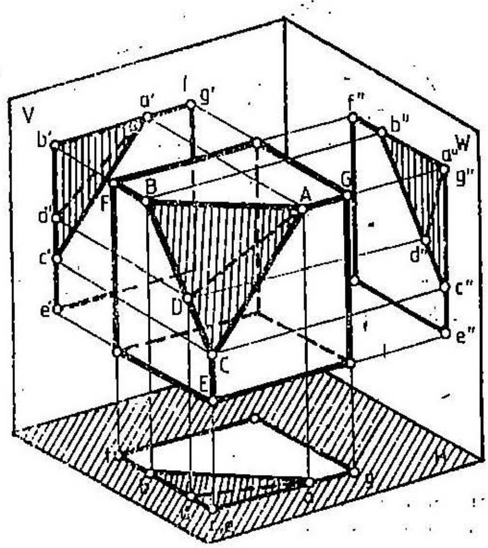


fig. 1.1.37

Determinarea pe o dreaptă a unui punct de cotă dată. Să se determine pe dreapta D (d, d') un punct M (m, m') de cotă 2. Se observă că punctul căutat rezultă din intersecția dreptei date cu un plan orizontal de cotă 2 (fig. 1.1.33). În epura 1.1.34 se duce o paralelă la linia de pămînt OX la cota 2 și se găsește proiecția m'. Apoi, prin corespondență, se determină proiecția orizontală m a punctului M căutat.

Determinarea pe o dreaptă a unui punct de depărtare dată. Să se determine pe dreapta D (d, d') un punct N (n, n') de depărtare 2 (fig. 1.1.35.). Analog cu problema precedentă, intersectînd dreapta dată cu un plan frontal de depărtare 2 față de planul vertical de proiecție, se obține punctul N căutat. În epură (fig. 1.1.36) se duce o paralelă la linia de pămînt OX la depărtarea 2 și se găsește proiecția n. Apoi, prin corespondență, se determină proiecția verticală n' a punctului N.

POZIȚIILE CARACTERISTICE ALE DREPTEI

În figura 1.1.37 sînt redate pozițiile caracteristice ale dreptei și reprezentarea lor în sistemul de proiecție triortogonal (fig. 1.1.38, a...g). Pentru comparație, se poate vedea dreapta oarecare AD. În concluzie, dreptele paralele cu planele [H], [V] și [W] sînt, respectiv, *dreapta orizontală, frontală* și *de profil*; iar dreptele perpendiculare pe planele [H], [V] și [W] sînt, respectiv, *dreapta verticală, de capăt* și cea *fronto-orizontală*. Așa cum este sin-

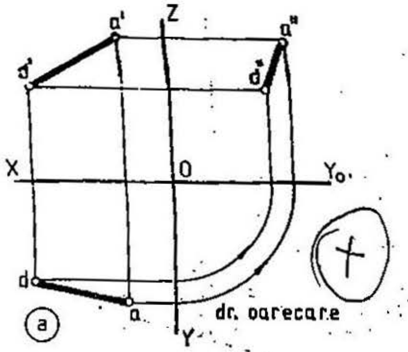


fig. 1.1.38, a

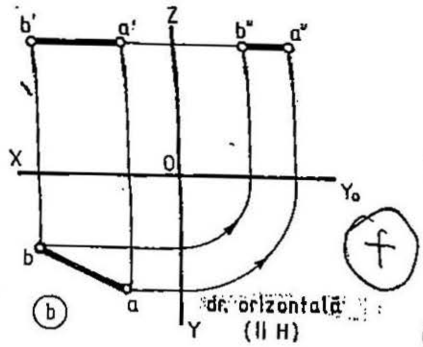


fig. 1.1.38, b

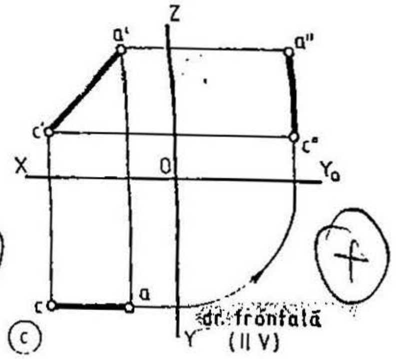


fig. 1.1.38, c

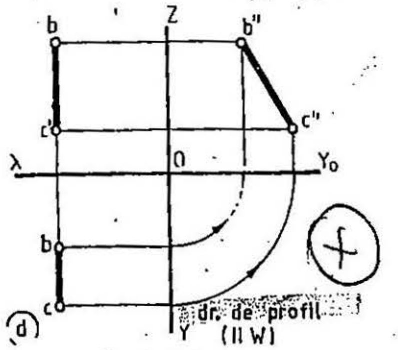


fig. 1.1.38, d

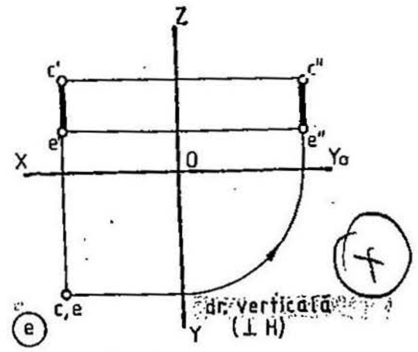


fig. 1.1.38, e

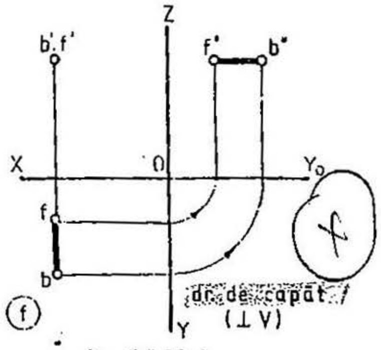


fig. 1.1.38, f

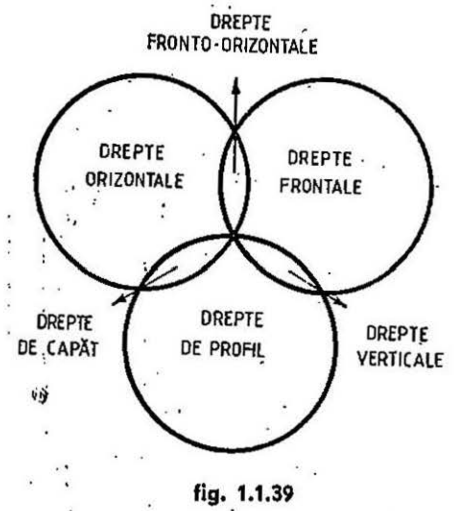


fig. 1.1.39

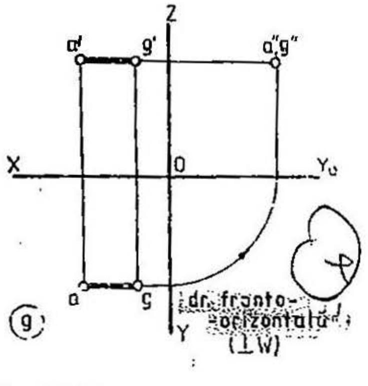


fig. 1.1.38, g

tetizat în figura 1.1.39, dreptele fronto-orizontale sînt în același timp și orizontale și frontale. Dreptele de capăt sînt simultan orizontale și de profil, iar dreptele verticale sînt în același timp drepte frontale și drepte de profil. Pentru evitarea confuziilor, dreptele orizontale care nu sînt nici de capăt nici fronto-orizontale pot fi numite *orizontale oarecare*. În mod similar, se pot numi frontale oarecare și dreptele de profil oarecare.

POZIȚIA RELATIVĂ A DOUĂ DREPTE

[illegible]. Condiția necesară și suficientă ca două drepte să fie paralele în spațiu este ca proiecțiile lor de același nume să fie paralele. Așa cum se vede în figura 1.1.40, ab este paralelă cu cd și a'b' este paralelă cu c'd'. Pentru ca enunțul să fie corect, este necesar ca și în cea de a treia proiecție (pe planul [W]), cele două drepte să fie paralele (fig. 1.1.41). Reciproca este adevărată — proiecțiile celor două drepte pe [H], [V] și [W] nu pot fi două

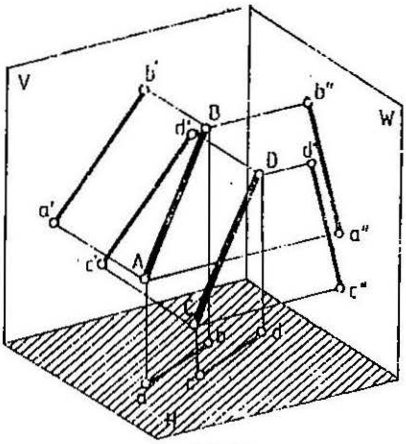


fig. 1.1.40

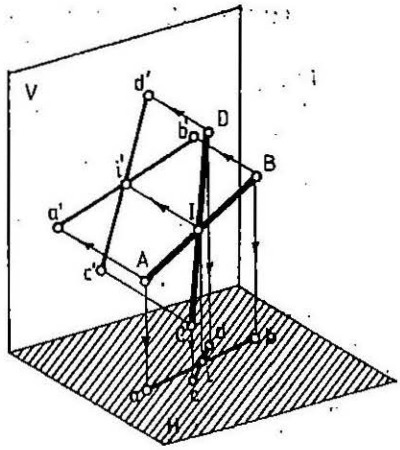


fig. 1.1.42

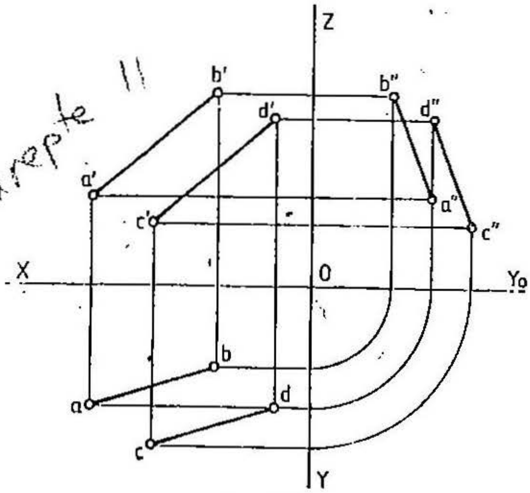


fig. 1.1.41

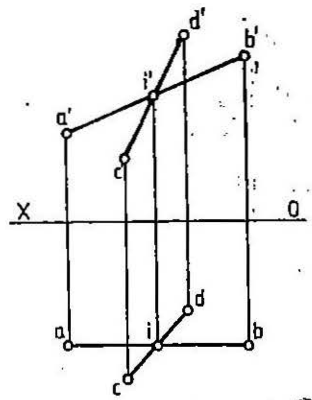


fig. 1.1.43

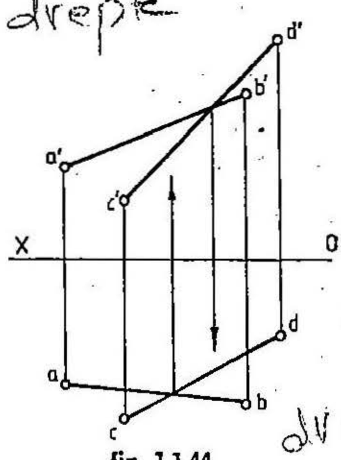


fig. 1.1.44

cîte două paralele decît dacă cele două drepte sînt paralele în spațiu.

Drepte concurente. Condiția necesară și suficientă ca două drepte să fie concurente în spațiu este ca proiecțiile lor de același nume să fie concurente respectiv în două puncte situate pe aceeași linie de ordine perpendiculară pe **OX**. În figurile 1.1.42 și 1.1.43, aceste două puncte, I și I', definesc punctul I din spațiu. Condiția este necesară pentru toate cele trei proiecții ale dreptelor pe planele [H], [V] și [W].

În majoritatea cazurilor sînt suficiente cele două proiecții ortogonale în sistemul de proiecție Monge.

Drepte neparalele și neconcurente sînt dreptele ale căror proiecții nu satisfac nici condiția de paralelism și nici condiția de concurență. Ele sînt *drepte oarecare.*

Verificarea concurenței unor drepte se face ca în figura 1.1.44. Prin punctul de concurență al unor proiecții (de exemplu cele verticale) se duce o linie de ordine perpendiculară pe **OX**. Dacă ea întîlnește punctul de concurență al celorlalte proiecții, dreptele sînt concurente, dacă nu, ele sînt oarecare una față de cealaltă.

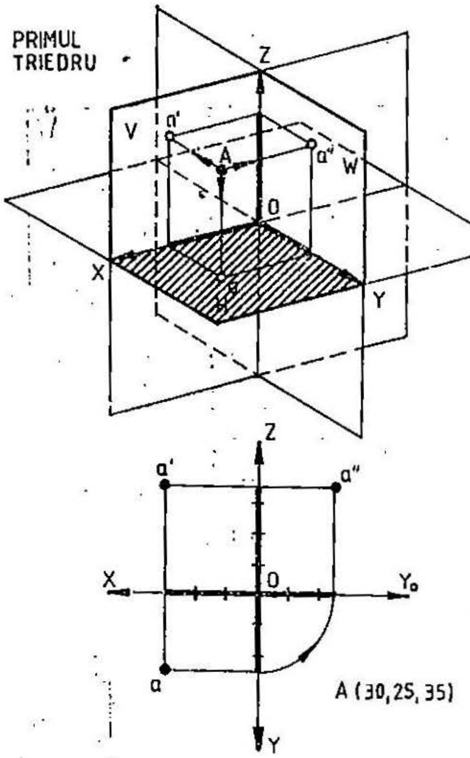


fig. 1.1.11

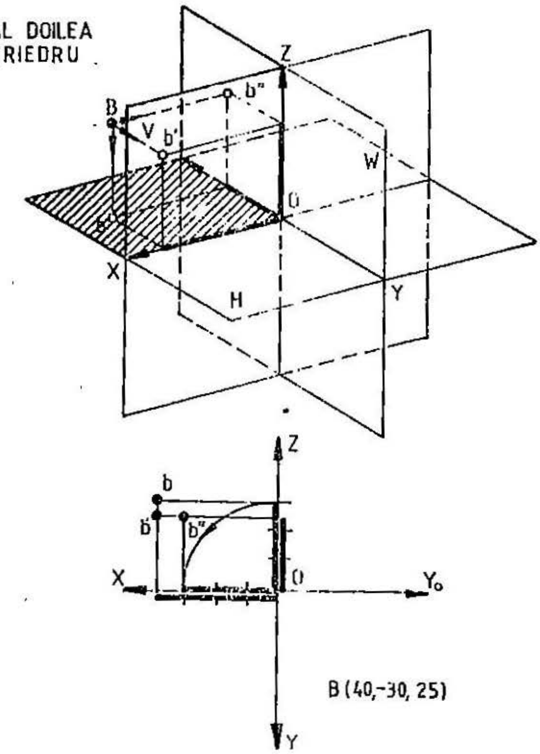
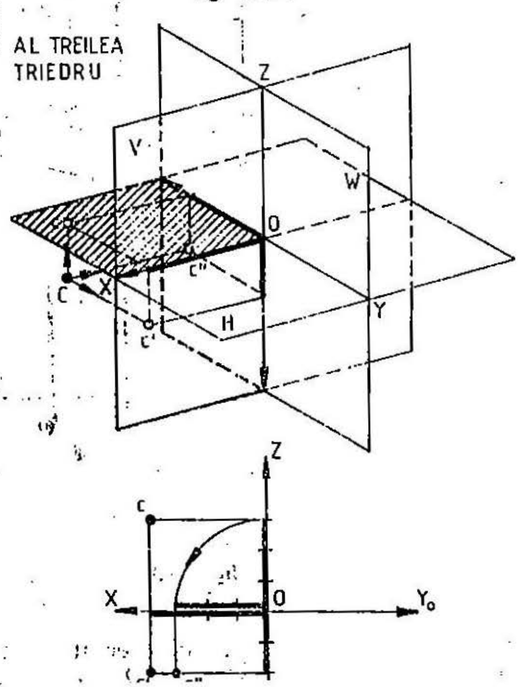
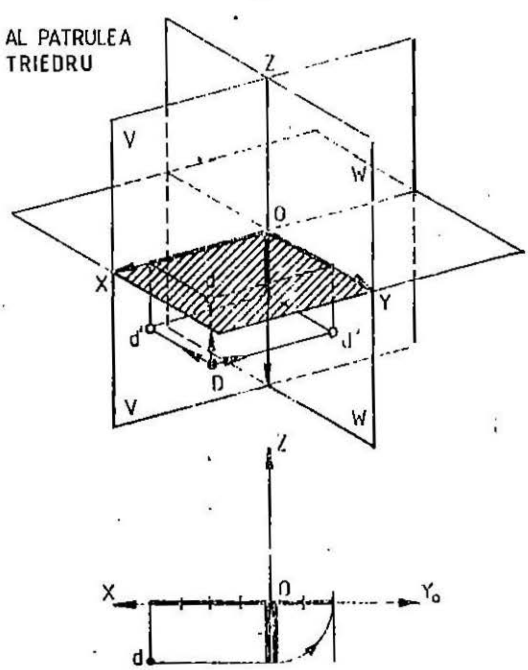


fig. 1.1.12





$[V_1]$ și $[V_2]$ — $[V_1]$ prin latura MN a triunghiului MNP și $[V_2]$ prin latura BC a triunghiului ABC. Planul $[V_1]$ va intersecta triunghiul ABC după dreapta 12, punctele 1 și 2 fiind situate pe laturile AB, respectiv AC ale triunghiului. Se observă că dreapta 12 întîlnește latura MN, latură prin care a fost dus planul $[V_1]$, în punctul R. În mod asemănător planul $[V_2]$ va intersecta triunghiul MNP după dreapta 34, puncte situate pe laturile MP, respectiv MN. Se observă, de asemenea, că această dreaptă 34 va întîlni latura BC (latură prin care s-a dus planul $[V_2]$ în punctul S. Unind cele două puncte R și S, se obține intersecția dintre plăcile triunghiulare date (fig. 1. 2. 34). Vizibilitatea intersecției se studiază în proiecție orizontală, analizînd diferența de cote a punctelor, iar în proiecție verticală comparînd depărtările punctelor.

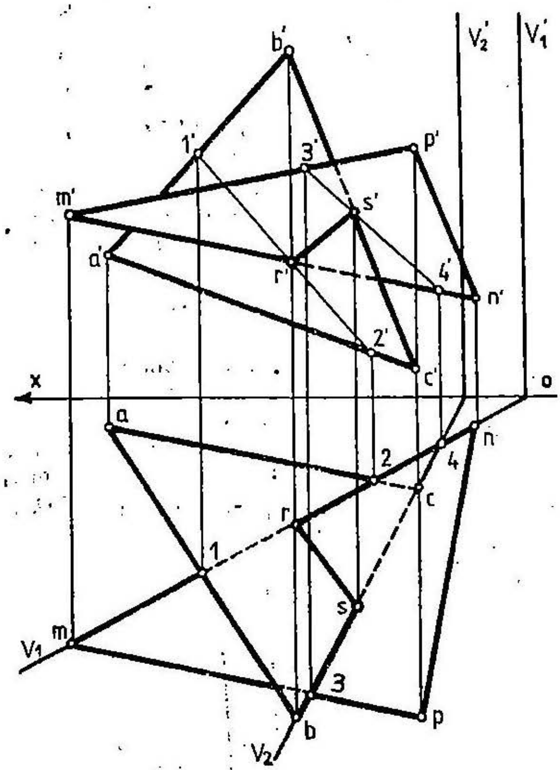


fig. 1.2.34

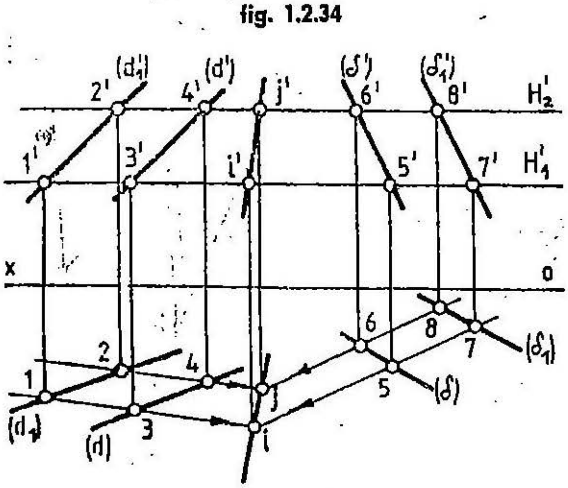


fig. 1.2.35

Să se determine proiecțiile dreptei de intersecție a două plane date fiecare prin cîte două drepte paralele. Se duc două plane auxiliare de nivel $[H']$ și $[H'_1]$ (fig. 1. 2. 35). Planul $[H']$ intersectează fiecare din planele date după cîte o orizontală. Cele două orizontale se întîlnesc în punctul J(j, j'), care este astfel punct comun celor două plane date inițial. Planul $[H'_1]$ intersectează și el cele două plane după două orizontale care se întîlnesc în punctul I (i, i'). Întrucît și punctul I (i, i') este punct comun celor două plane inițiale, rezultă că dreapta de intersecție a acestora este dreapta IJ (i j, i' j').

1.3. RELAȚIILE DINTRE DREPTE ȘI PLANE

INTERSECȚII DINTRE DREPTE ȘI PLANE

Intersecția dintre o dreaptă verticală și un plan oarecare. Problema se reduce la determinarea unui punct pe suprafața planului, care să aparțină în același timp și dreptei. Verticala este locul geometric al tuturor punctelor de abscisă și depărtare constante și de cotă variabilă. Pe acest loc geometric trebuie determinată cota punctului care se află pe suprafața planului (fig. 1.3.1). Punctul de intersecție căutat se va găsi deci la intersecția dintre verticala dată și o dreaptă oarecare conținută în planul dat. În figura 1.3.2, s-a ales dreapta care se sprijină pe vîrful M(m, m') și pe urma orizontală a planului (P) și care este concurentă cu verticala în punctul I(i, i'). Cota punctului I(i, i') este astfel determinată în proiecția verticală. Punctul de intersecție dintre dreapta verticală și planul oarecare poate fi determinat și cu ajutorul unei drepte frontale sau orizontale care se sprijină pe verticala dată și aparține planului [P] (fig. 1.3.3 și 1.3.4). În sfîrșit, se mai poate folosi și o dreaptă de cea mai mare pantă a planului în raport cu planul orizontal de proiecție [H] (fig. 1.3.5 și 1.3.6).

Intersecția dintre o dreaptă de capăt și un plan oarecare. Ca și la dreapta verticală, intersecția dintre o dreaptă de capăt și un plan oarecare, se reduce la problema determinării unui punct pe suprafața planului. Dreapta de capăt este locul geometric al tuturor punctelor de cotă și abscisă constante și

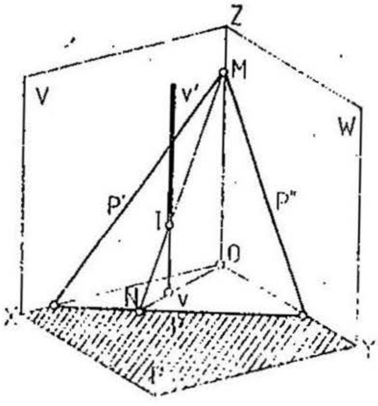


fig. 1.3.1

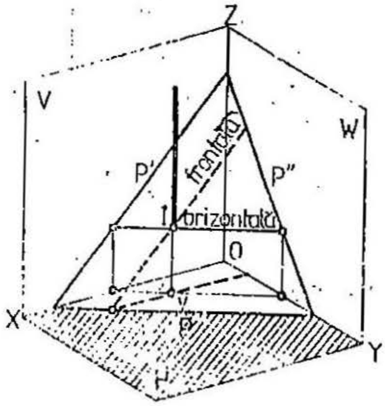


fig. 1.3.3

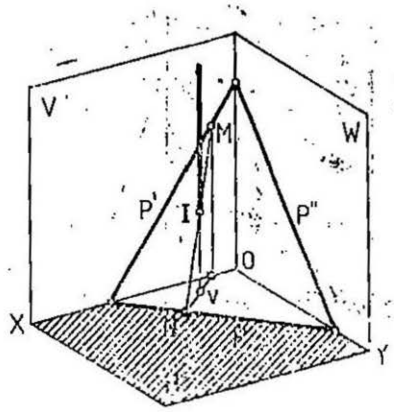


fig. 1.3.5

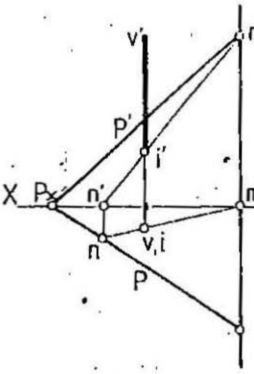


fig. 1.3.2

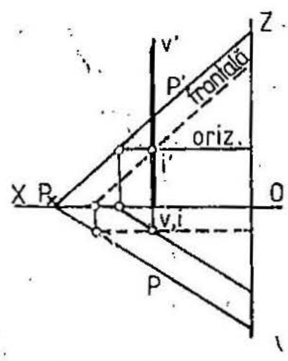


fig. 1.3.4

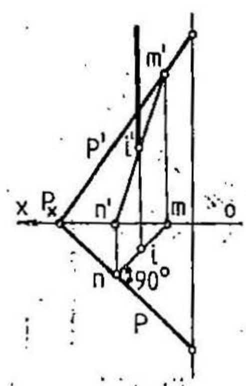


fig. 1.3.6

de depărtare variabilă. Se va determina deci depărtarea punctului de pe dreapta de capăt, care se situează în planul dat. Punctul de intersecție căutat se poate determina situîndu-l pe o dreaptă caracteristică a planului (orizontală, frontală sau de cea mai mare pantă față de planul vertical de proiecție [V]). În figurile 1.3.7, 1.3.8, intersecția dintre planul [P] și dreapta de capăt este rezolvată cu ajutorul orizontalei planului care se sprijină și pe dreapta de capăt.

Intersecția dintre o dreaptă oarecare și un plan oarecare. Se consideră dreapta oarecare (D) și planul oarecare [P] (fig. 1.3.9). Prin dreapta (D) se duce un plan auxiliar, de capăt [C]. Cele două plane, [P] și [C], se intersectează după o dreaptă HV (hv, h'v'). Dreapta D(d, d') este conținută în planul [C] (fig. 1.3.10). Dreapta HV (hv, h'v') este conținută atît în planul [C], cît și în planul [P]. Întrucît ambele drepte sînt conținute în planul auxiliar [C], ele se vor intersecta. Punctul lor de intersecție I(i, i') este punctul de intersecție dintre dreapta oarecare (D) și planul oarecare [P]. În figurile 1.3.11 și 1.3.12 se rezolvă aceeași problemă, ducînd, de data aceasta, prin dreapta (D), un plan auxiliar vertical. Se intersectează planul vertical cu planul oarecare [P], iar dreapta lor de intersecție va tăia dreapta (D) în punctul I, care este chiar punctul de intersecție dintre dreapta (D) și planul [P].

O b s e r v a ț i e. În cazul intersecției unui plan cu o dreaptă oarecare, planul auxiliar care se duce prin această dreaptă este un *plan de capăt* sau un *plan vertical*, și nu un plan oarecare. Planele de capăt și cele verticale, fiind *plane proiectante*, au urmele verticale, respectiv orizontale, identice cu *proiecțiile* lor verticale, respectiv orizontale. Din această cauză, punctele lor de intersecție cu orice dreaptă se determină imediat, întrucît proiecțiile lor verticale se află pe urma verticală a planului (în cazul planului de capăt) sau proiecțiile lor orizontale se află pe urma orizontală a planului (în cazul planului vertical).

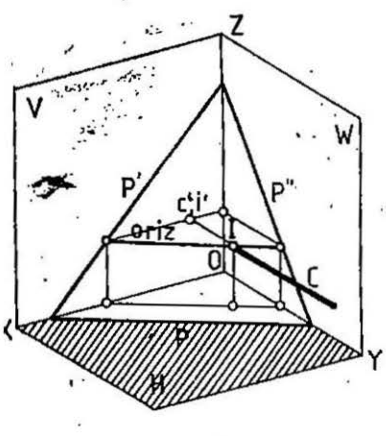


fig. 1.3.7

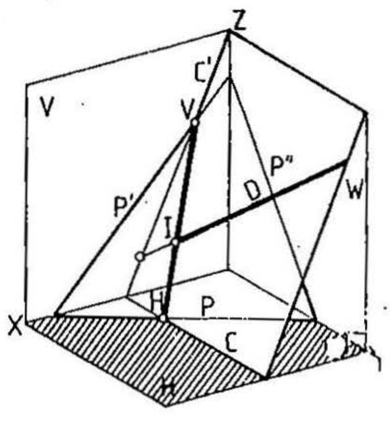


fig. 1.3.9

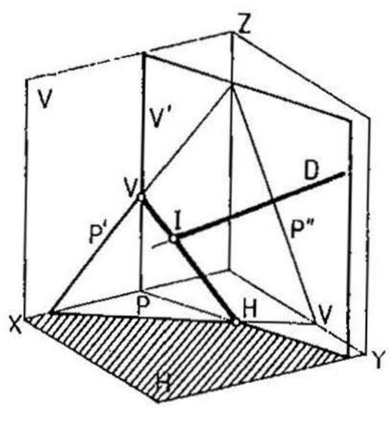


fig. 1.3.11

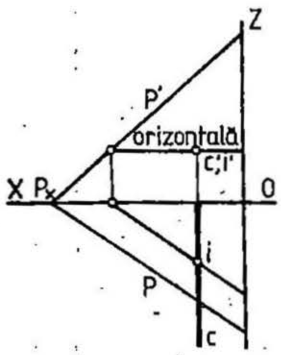


fig. 1.3.8

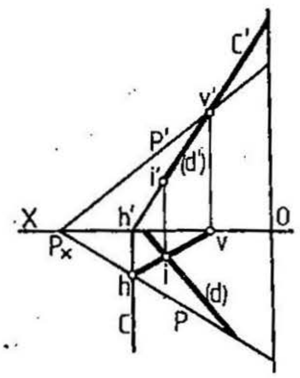


fig. 1.3.10

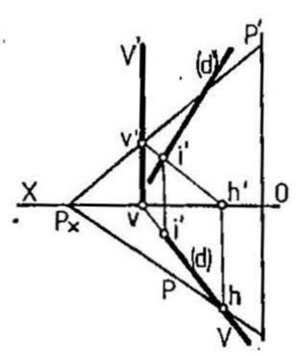


fig. 1.3.12

Să se determine proiecțiile punctului M(m,m') *în care dreapta* D(d, d') *întîlnește planul triunghiului* ABC. Prin dreapta (D) se duce planul auxiliar vertical [P] (fig. 1.3.13). Acest plan se intersectează cu planul triunghiului după dreapta (1 2, 1'2'), care se taie cu dreapta (D) în punctul M(m, m'). Acesta este punctul de intersecție dintre dreapta (D) și planul triunghiului ABC. Vizibilitatea intersecției se studiază în proiecție orizontală, analizînd diferența de cote a punctelor, iar în proiecție verticală, comparînd depărtările diverselor puncte.

Prin punctul A(a,a') *dat, să se ducă o dreaptă* G(g,g') *care să întîlnească dreptele* D(d,d') *și* Δ(δ, δ') *aflate în poziție oarecare una față de cealaltă.* După cum se vede în schița axonometrică 1.3.14, se poate defini mai bine planul determinat de dreapta (D) și punctul A, ducînd prin A o paralelă (D_1) la dreapta (D). Intersecția dintre acest plan și dreapta Δ (δ, δ') se obține în modul cunoscut, ducînd prin dreaptă un plan auxiliar vertical [V_1] și intersectîndu-l cu planul definit de dreptele paralele (D) și (D_1). Dreapta de intersecție care rezultă (1 2, 1'2') determină punctul de intersecție β, β' pe dreapta

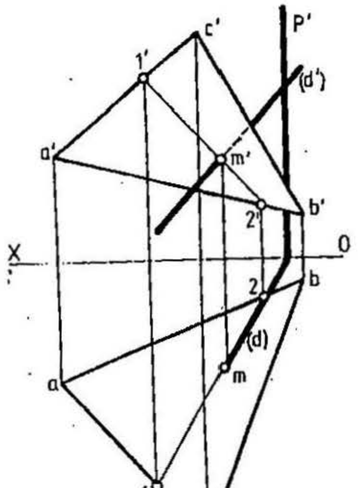


fig. 1.3.13

Δ(δ, δ'). Dreapta G(g, g') se obține unind pe A cu β. Transpunerea rezolvării în dublă proiecție ortogonală este ilustrată în figura 1.3.15. Soluția problemei este dreapta G(g, g'), care trece prin punctul A și se sprijină pe dreptele D(d, d') și Δ (δ, δ').

DREPTE ȘI PLANE PERPENDICULARE

Dreaptă perpendiculară pe un plan. T e o r e m a d e p e r p e n d i c u l a r i t a t e afirmă că o dreaptă perpendiculară pe un plan are proiecțiile perpendiculare respectiv pe urmele de același nume ale planului (fig. 1.3.16). Se ia dreapta (D), perpendiculară pe planul [P]. Planul ei proiectant (hașurat în figură) este perpendicular atît pe planul [P], cît și pe planul [H], deci este perpendicular și pe dreapta lor de intersecție, urma orizontală (P) a planului. Urma (P), fiind perpendiculară pe planul proiectant, este perpendiculară pe orice dreaptă din acest plan, deci, implicit, și pe proiecția orizontală (d) a dreptei (D) (fig. 1.3.17). În mod asemănător se demonstrează perpendicularitatea în proiecție verticală.

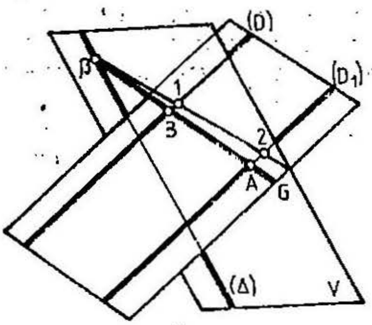


fig. 1.3.14

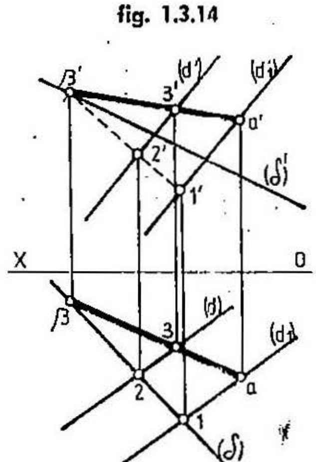


fig. 1.3.15

Plan perpendicular pe o dreaptă. Să se determine urmele (P) și (P') ale planului care trece prin punctul A(a, a') și este perpendicular pe o dreaptă D(d, d') dată. Se consideră punctul A(a, a') situat pe o dreaptă orizontală a planului căutat (fig. 1.3.18). Orizontala Δ (δ, δ') a viitorului plan [P]

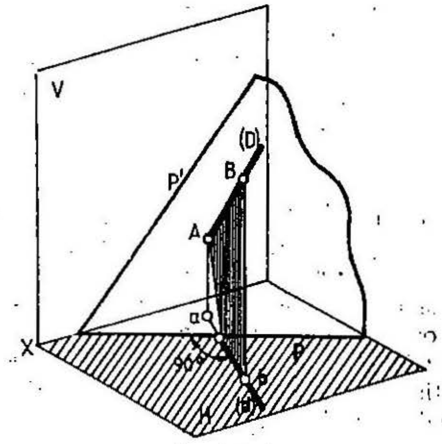


fig. 1.3.16

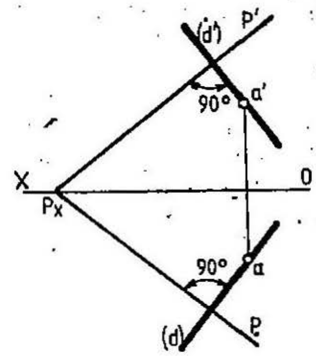


fig. 1.3.17

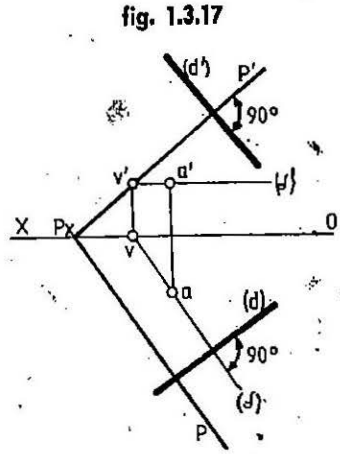


fig. 1.3.18

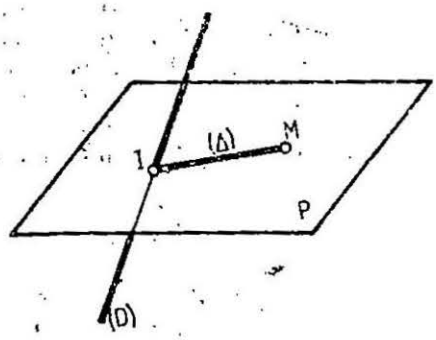


fig. 1.3.19

dusă prin punctul A(a, a'), astfel încît δ să fie perpendiculară pe (d), are urma verticală v'. Perpendiculara dusă în v' pe (d') este urma verticală (P') a planului căutat. Rezultă P_x, prin care se duce urma orizontală (P) paralelă cu (δ). Planul (PP'), avînd urmele sale perpendiculare, respectiv pe proiecțiile de același nume ale dreptei (D), va fi perpendicular pe dreapta (D).

Dreaptă perpendiculară pe o dreaptă. Să se construiască proiecțiile unei perpendiculare Δ (δ, δ') pe o dreaptă oarecare D(d, d') dusă dintr-un punct M(m, m') exterior ei. În figura 1.3.19, se duce prin punctul M un plan perpendicular pe dreapta (D), pe care o va intersecta în punctul I. Dreapta IM este perpendiculara căutată. În figura 1.3.20, pro-

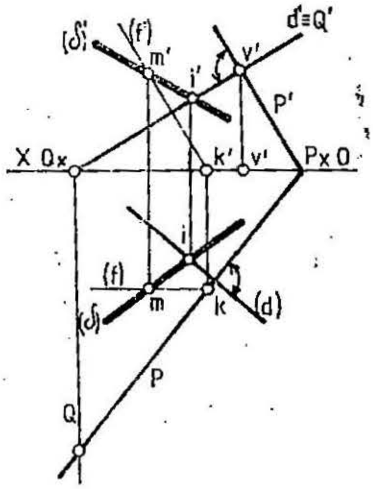


fig. 1.3.20

blema se va rezolva astfel: cu ajutorul frontalei F(f, f'), se duce prin punctul M(m, m') planul (PP') perpendicular pe dreapta dată D(d, d'). Acest plan (PP') este intersectat de dreapta D(d, d') în punctul I(i, i'), care se obține cu ajutorul planului auxiliar de capăt (QQ') dus prin dreapta (D). Perpendiculara Δ(δ, δ') este determinată prin proiecțiile dreptei MI (mi, m'i'). Ca și la problema precedentă, urmele planului (PP') se puteau obține și cu ajutorul unei orizontale duse prin punctul M(m, m').

2.

METODELE GEOMETRIEI DESCRIPTIVE

Reprezentarea în proiecție a volumelor din spațiu se face cu ajutorul unor construcții geometrice, construcții care nu se pot realiza dacă nu se cunosc adevăratele mărimi și unghiuri ale unor elemente plane ale acestor volume.

Secțiunile, intersecțiile și lipirile de volume cer anumite transformări ale proiecțiilor, astfel încît să se obțină unele elemente și figuri plane în adevărată mărime. Pentru a se obține acest lucru este necesar să se aducă figura plană paralelă cu unul din planele de proiecție. Metodele de transformare a proiecțiilor sînt:

— metoda schimbării planelor de proiecție;
— metoda rotației;
— metoda rabaterii.

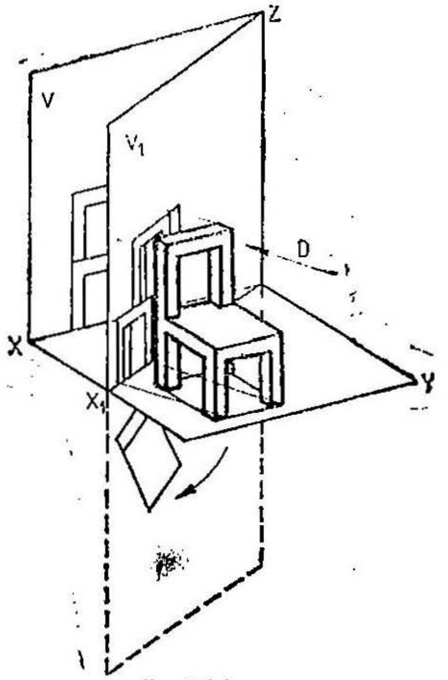


fig. 2.1.1

2.1. METODA SCHIMBĂRII PLANELOR DE PROIECȚIE

Această metodă este ilustrată în schița axonometrică din figura 2.1.1. De exemplu, pentru obținerea unei alte imagini (proiecții) a unui obiect sau volum din spațiu se poate efectua o *schimbare de plan vertical de proiecție*. Astfel, în loc de a proiecta obiectul pe planul vertical de proiecție [V], se va proiecta pe un plan vertical oarecare [V_1] ales în funcție de intenția observatorului (de exemplu direcția D). În figura 2.1.2 în cazul schimbării planului vertical de proiecție, proiecția orizontală a obiectului sau volumului rămîne aceeași, modificîndu-se numai proiecția verticală. În funcție de poziția noului plan vertical de proiecție [V_1] rezultă o nouă linie de pămînt, care se va nota O_1X_1.

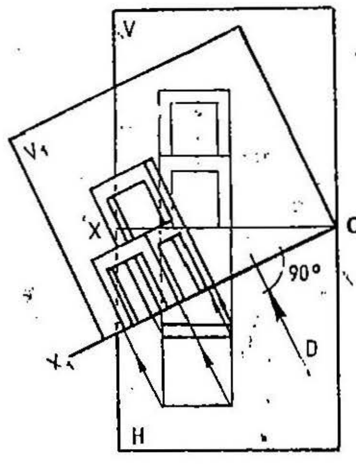


fig. 2.1.2

SCHIMBAREA DE PLAN VERTICAL DE PROIECȚIE PENTRU UN PUNCT

Se consideră un punct **A** în spațiu. Păstrînd planul orizontal [H], se ia un alt plan vertical $[V_1]$, care va intersecta planul [H] după noua linie de pămînt O_1X_1 (fig. 2.1.3). Se observă că, în schimbarea de plan vertical de proiecție, rămîn invariante *cota punctului* și *proiecția lui orizontală* și se schimbă depărtarea punctului și proiecția *lui verticală* (fig. 2.1.4).

SCHIMBAREA DE PLAN ORIZONTAL DE PROIECȚIE PENTRU UN PUNCT

Se consideră un punct **B** în spațiu. Păstrînd planul vertical de proiecție [V], se ia un alt plan orizontal de proiecție $[H_1]$ care va intersecta planul [V] după noua linie de pămînt O_1X_1 (fig. 2.1.5).
Se observă că în schimbarea de plan orizontal de proiecție rămîn invariante (fig. 2.1.6) *depărtarea punctului* și *proiecția lui verticală* și se schimbă *cota punctului* și *proiecția lui orizontală*.

SCHIMBAREA DE PLAN VERTICAL DE PROIECȚIE PENTRU O DREAPTĂ

Se dă segmentul de dreaptă A (a, a′) și B (b, b′). Se alege un nou plan vertical de proiecție $[V_1]$ (fig. 2.1.7). Noile proiecții verticale ale punctelor **A** și **B** vor fi a_1' și b_1'. Se obține astfel noua proiecție verticală a segmentului AB.

SCHIMBAREA DE PLAN ORIZONTAL DE PROIECȚIE PENTRU O DREAPTĂ

Se procedează analog cu cazul precedent și se obține noua proiecție orizontală a dreptei a_1b_1 (fig. 2.1.8).
Transformarea unei drepte oarecare în dreaptă frontală se poate obține prin schimbarea planului vertical de proiecție (fig. 2.1.9). Noua linie de pămînt O_1X_1 trebuie să fie astfel aleasă, încît să fie paralelă cu proiecția orizontală ab a dreptei.

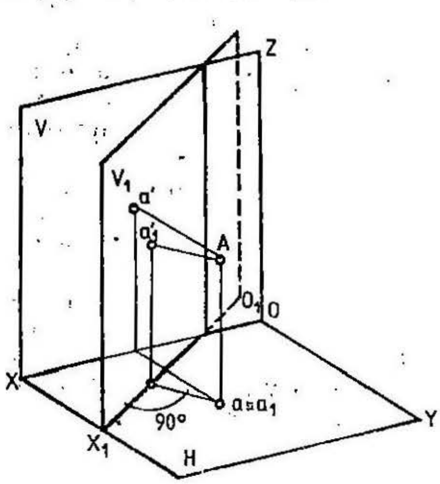


fig. 2.1.3

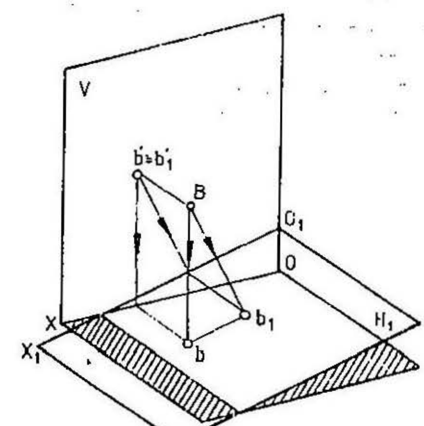
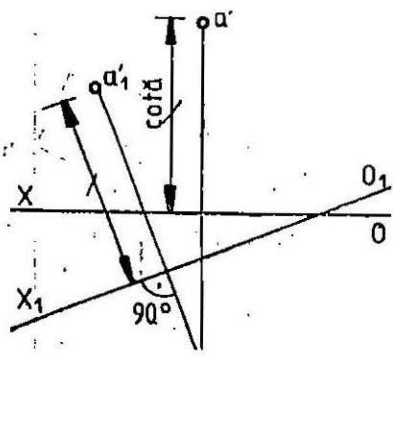
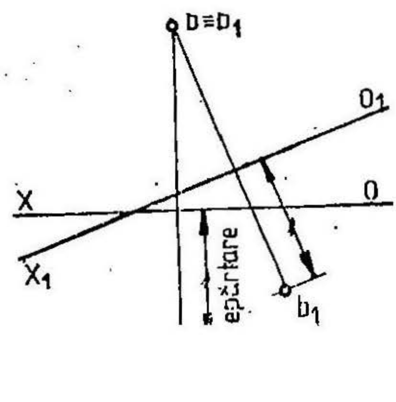


fig. 2.1.5





Transformarea unei drepte oarecare în dreaptă orizontală se obține prin schimbarea de plan orizontal de proiecție (fig. 2.1.10). Noua linie de pămînt O_1X_1 trebuie să fie astfel aleasă încît să fie paralelă cu proiecția verticală **a'b'** a dreptei. Unghiul β pe care dreapta orizontală îl face cu planul vertical de proiecție apare în adevărată mărime.
Transformarea unei drepte oarecare în dreaptă verticală. Pentru această transformare sînt necesare două schimbări de plan (fig. 2.1.11); printr-o schimbare de plan vertical $[V_1]$, dreapta oarecare devine dreaptă frontală. Urmează a doua schimbare de plan orizontal $[H_2]$ prin care dreapta frontală devine dreaptă verticală.
Transformarea unei drepte oarecare în dreaptă de capăt. La această transformare sînt necesare două schimbări de plan (fig. 2.1.12): printr-o schimbare de plan orizontal $[H_2]$, dreapta oarecare devine dreaptă orizontală, iar la a doua schimbare de plan vertical $[V_2]$, se transformă în dreaptă de capăt.

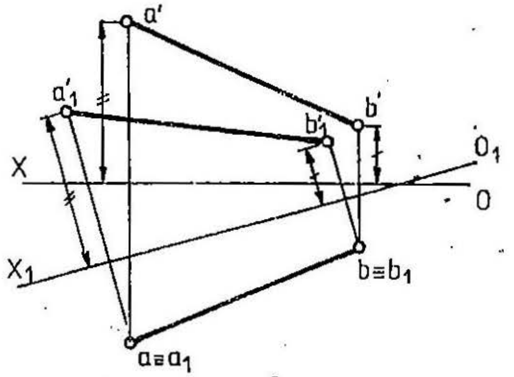


fig. 2.1.7

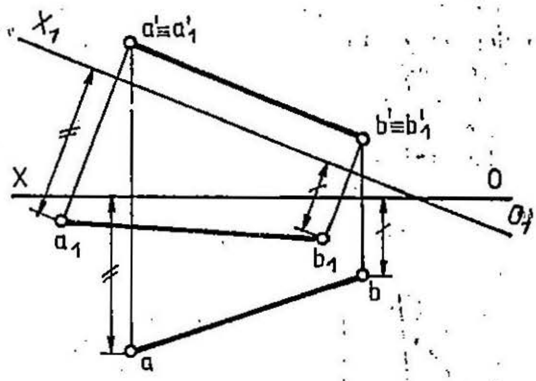


fig. 2.1.10

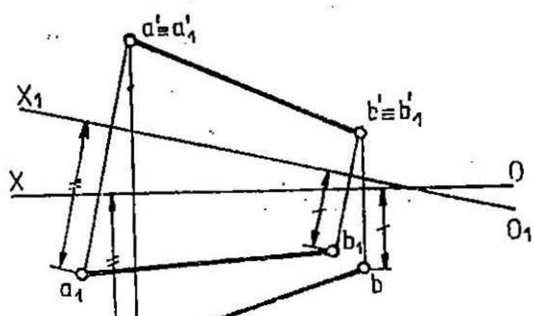


fig. 2.1.8

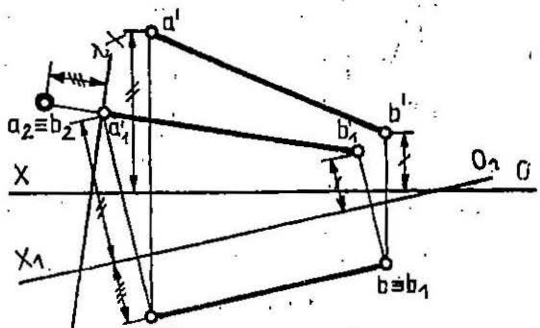


fig. 2.1.11

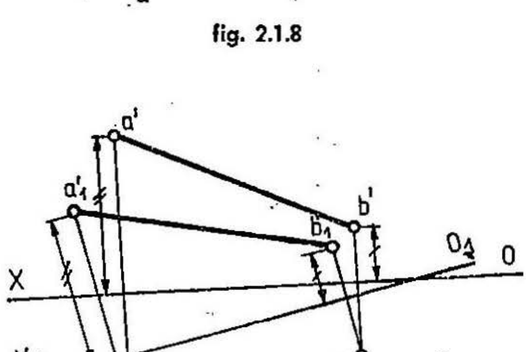


fig. 2.1.9

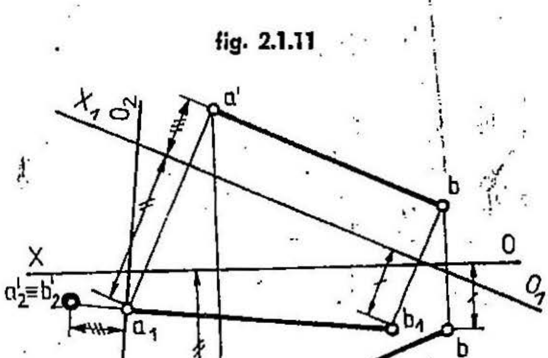


fig. 2.1.12

Distanța de la un punct la o dreaptă. Se dau punctul M (m, m') și dreapta AB (ab, a'b'). Prin schimbare de plan vertical de proiecție (fig. 2.1.13), se aduce dreapta în poziție frontală. Se duce perpendiculara $m_1'p_1'$ pe noua proiecție verticală și se obțin proiecțiile segmentului (mp, m'p') care măsoară distanța de la punct la dreaptă. Printr-o a doua schimbare de plan orizontal de proiecție rezultă $m_2p_2=m_2b_2$ adevărata mărime a segmentului care măsoară distanța de la punctul M la dreaptă.

Distanța dintre două drepte paralele. Se dau dreptele paralele D (d, d') și Δ (δ, δ'), (fig. 2.1.14). Se fac două schimbări de plan de proiecție, în așa fel încît se aduc cele două drepte paralele în poziție frontală, iar apoi în poziție verticală. Adevărata mărime a distanței dintre cele două drepte se măsoară în noua proiecție orizontală, a_2b_2 c_2d_2.

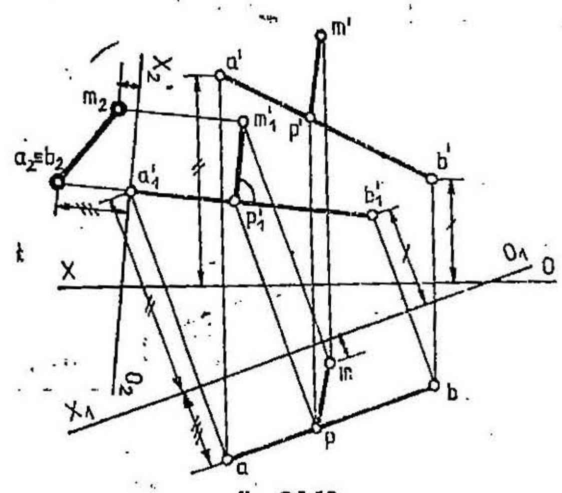


fig. 2.1.13

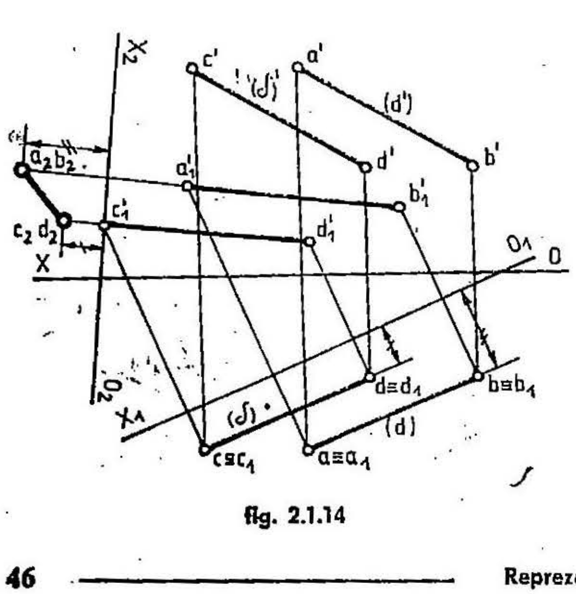


fig. 2.1.14

SCHIMBAREA DE PLAN VERTICAL DE PROIECȚIE PENTRU UN PLAN

Se dă un plan oarecare (PP_xP'), reprezentat prin urme (fig. 2.1.15). Se alege un nou plan vertical de proiecție [V_1], noua linie de pămînt fiind O_1X_1. Urma orizontală a planului (P) va rămîne aceeași.

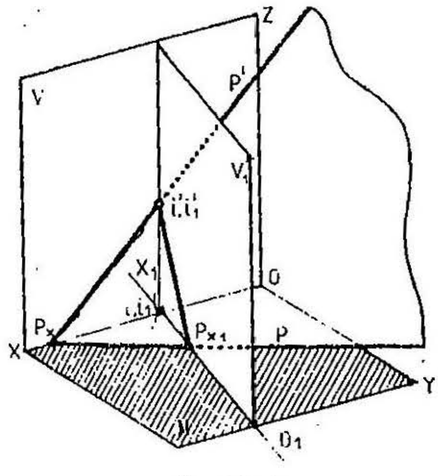


fig. 2.1.15

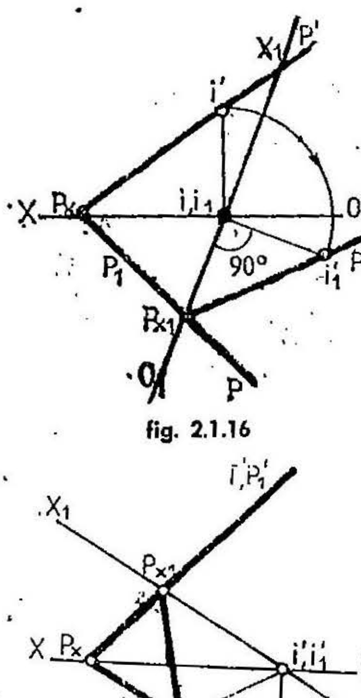


fig. 2.1.16

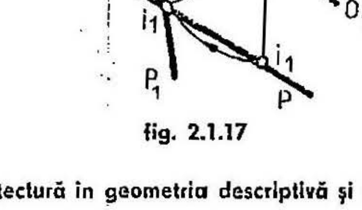


fig. 2.1.17

Urma verticală însă se va obține unind punctul P_{x1} (aflat pe noua linie de pămînt) cu punctul I (i, i') de pe vechea urmă verticală a planului, care se păstrează și pe noua urmă verticală. În epură (fig. 2.1.16) acest punct I (i, i'), care se păstrează pe urma verticală a planului, trebuie raportat la noua linie de pămînt O_1X_1. După cum se observă, proiecția orizontală i a punctului I rămîne aceeași în cele două situații. Din i se va ridica o perpendiculară pe O_1X_1 și se va lua cota (invariantă) lui I, obținînd proiecția sa verticală i_1'. Unind proiecția i_1' cu P_{x1}, se obține noua urmă verticală a planului (P_1'). În figura 2.1.17 este arătată o altă variantă de schimbare de plan vertical de proiecție a unui plan oarecare (PP_xP'). Ca și în figura 2.1.16, se păstrează invariante: *urma orizontală a planului* și *cota punctului* I(i, i').

SCHIMBAREA DE PLAN ORIZONTAL DE PROIECȚIE PENTRU UN PLAN

Se dă planul oarecare (PP_x P'), reprezentat prin urme (fig. 2.1.18). Se alege un nou plan orizontal de proiecție [H_1], noua linie de pămînt fiind O_1X_1. Se procedează analog cu cazul precedent. Epurele din figurile 2.1.19 și 2.1.20 ilustrează două variante de schimbare de plan orizontal de proiecție. În ambele cazuri se păstrează invariante: *urma verticală a planului* și *depărtarea punctului* I (i, i').

Transformarea unui plan oarecare în plan vertical. Se efectuează o schimbare de plan orizontal de proiecție, alegîndu-se noua linie de pămînt astfel încît să fie perpendiculară pe urma verticală a planului (fig. 2.1.21).

Transformarea unui plan oarecare în plan de capăt. Se efectuează o schimbare de plan vertical de proiecție, astfel încît noua linie de pămînt O_1X_1 să fie perpendiculară pe urma orizontală a planului (fig. 2.1.22).

Distanța de la un punct la un plan. Se dă punctul A (a, a') și planul oarecare PP_xP' (fig. 2.1.23). Se transformă planul în plan de capăt, luînd noua linie de pămînt O_1X_1 perpendiculară pe urma orizontală a planului. Noua proiecție verticală a punctului A este a_1', iar perpendiculara $a_1's_1'$ pe noua urmă verticală P_1' a planului de capăt, măsoară distanța de la punct la plan.

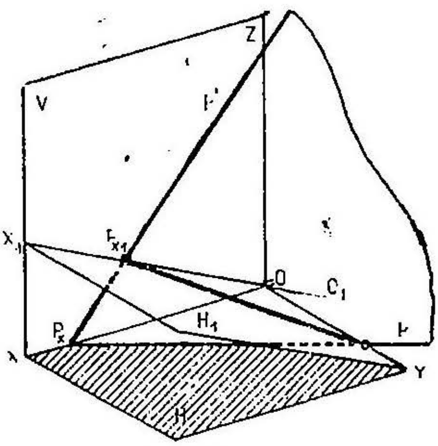


fig. 2.1.18

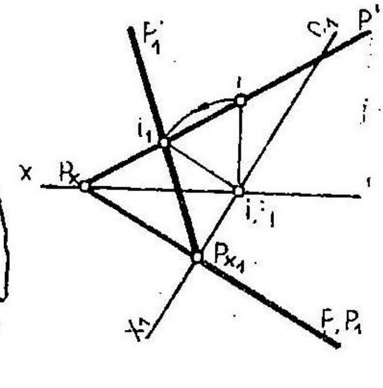


fig. 2.1.19

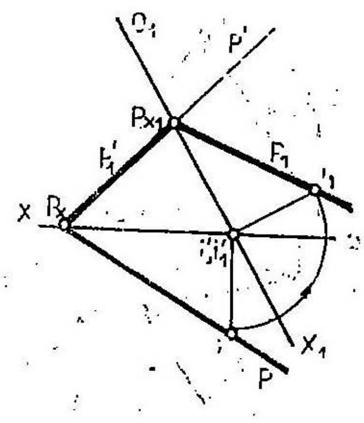


fig. 2.1.20

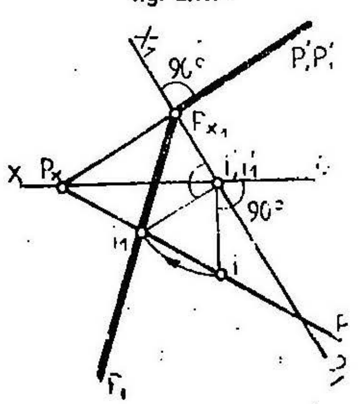


fig. 2.1.21

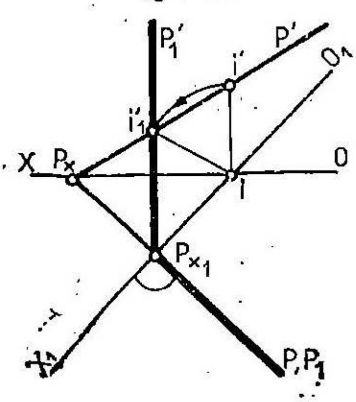


fig. 2.1.22

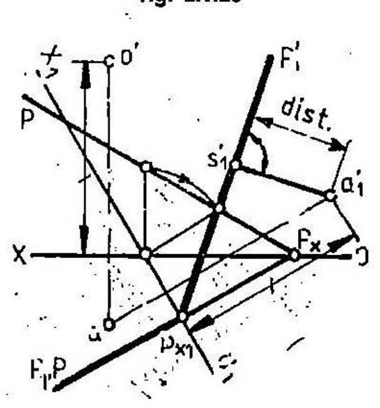


fig. 2.1.23

Adevărata mărime a unei figuri plane. Se dă un triunghi oarecare **ABC** (fig. 2.1.24). Printr-o schimbare de plan vertical de proiecţie, se poate transforma planul acestui triunghi într-un plan de capăt. Pentru aceasta se duce o orizontală a triunghiului CM (cm, c'm') prin vîrful C (c, c') şi se alege noua linie de pămînt O_1X_1 perpendiculară pe proiecţia orizontală a orizontalei CM. În acest fel, prin schimbarea de plan vertical de proiecţie, orizontala devine dreaptă de capăt, iar planul triunghiului devine plan de capăt. Printr-o nouă schimbare de plan orizontal de proiecţie, se aduce planul triunghiului într-un plan orizontal. În proiecţia orizontală se poate citi triunghiul în adevărată mărime.

Perpendiculara comună a două drepte oarecare. Cele două drepte oarecare sînt D (d, d') şi Δ (δ, δ') (fig. 2.1.25). Se alege un punct A arbitrar pe dreapta (D) şi se duce o paralelă (Δ_1) la dreapta (Δ). Se alege un punct oarecare **B** pe (Δ) şi se duce perpendiculara din **B** pe planul determinat de dreptele (D) şi (Δ_1). Translatînd această perpendiculară după direcţia dreptei (Δ) pînă atinge dreapta (D), se obţine perpendiculara comună a celor două drepte (D) şi (Δ). In epură (fig. 2.1.26), planul determinat de dreptele (D) şi (Δ_1) se transformă într-un plan de capăt. Punctul oarecare B (bb') de pe dreapta (Δ) se transformă în B_1 (b_1, b_1'), unde $b_1 \equiv b$. Perpendiculara $b_1' c_1'$ dusă din b_1' pe (P_1') este perpendiculara comună. Făcînd să alunece segmentul **bc** pînă cînd întîlneşte dreapta (D), se obţin proiecţiile (**mn**, **m'n'**) ale perpendicularei MN comună dreptelor (D) şi (Δ).

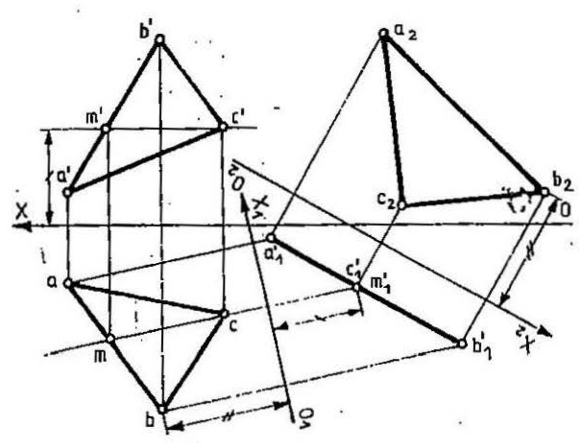


fig. 2.1.24

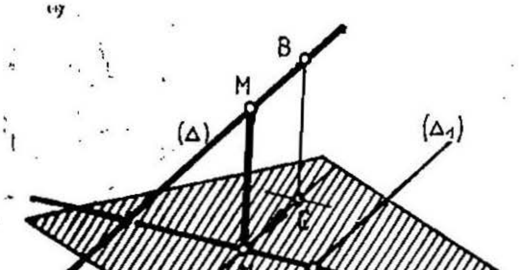


fig. 2.1.25

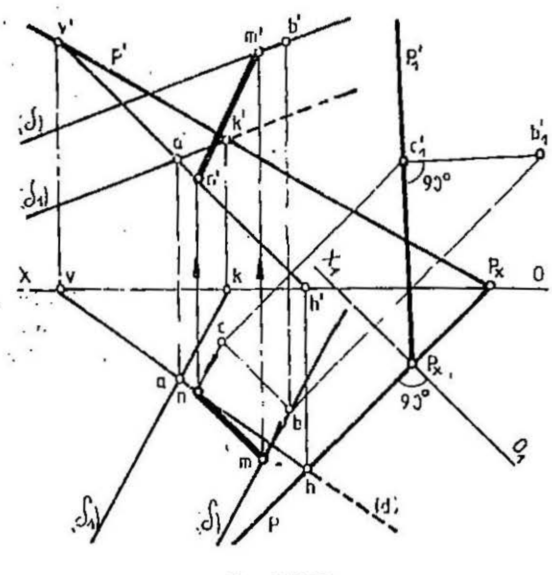


fig. 2.1.26

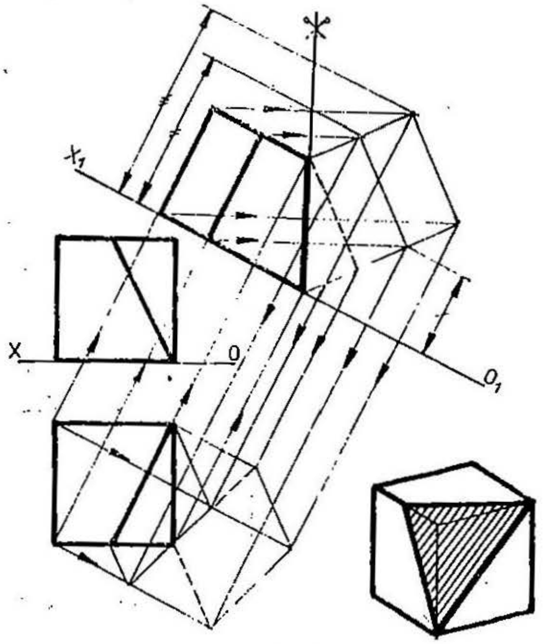
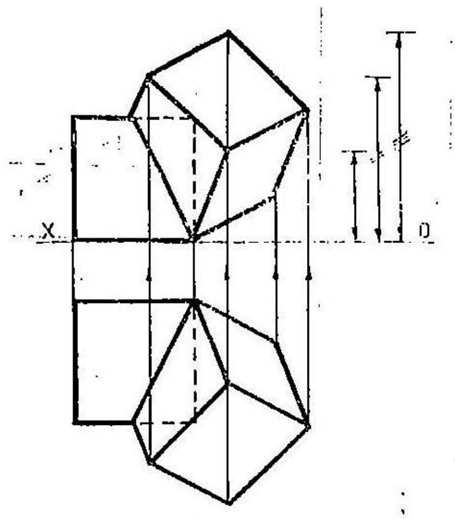


fig. 2.1.27


fig. 2.1.28

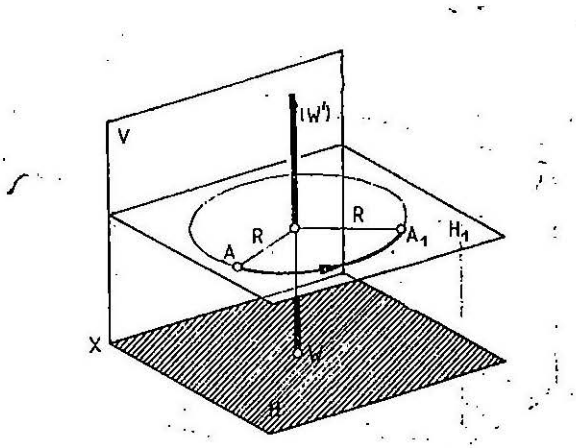


fig. 2.2.1

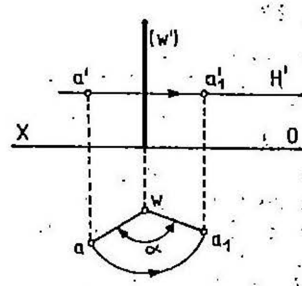


fig. 2.2.2

Aplicație a schimbării de plan. Se dă un cub secționat ca în figura 2.1.27, așezat pe planul orizontal de proiecție. Se cere să se așeze peste el un cub identic, astfel încît cele două triunghiuri de secțiune să se suprapună perfect. Se efectuează o schimbare de plan de proiecție, alegîndu-se noua linie de pămînt O_1X_1 astfel încît planul triunghiului de secțiune să devină plan de capăt. Se folosește apoi transformarea prin simetrie, construindu-se simetricul cubului inițial față de planul de secțiune. Întrucît este o schimbare de plan de proiecție, se păstrează invariante cotele punctelor și proiecția orizontală a volumului. În transformarea prin simetrie s-au dus simetricele tuturor vîrfurilor volumului dat. Întrucît planul de simetrie a devenit plan de capăt, problema s-a transformat în problemă plană. În proiecție verticală, simetricul volumului se poate obține direct prin decalcare (fig. 2.1.28.). Simetricul astfel obținut se coboară apoi în proiecție orizontală și se așază apoi în proiecția inițială a cubului.

2.2. METODA ROTAȚIEI

Spre deosebire de metoda schimbării planelor de proiecție, în care unul din planele de proiecție își modifică poziția, în metoda rotației sistemul de proiecție rămîne pe loc, iar volumul studiat își schimbă poziția, rotindu-se în jurul unei axe de rotație. În acest fel, se modifică ambele proiecții ale volumului, nu numai una dintre ele (ca la metoda schimbării planului de proiecție). Axele de rotație folosite sînt fie perpendiculare, fie paralele cu planele de proiecție.

ROTAȚIA DE NIVEL A PUNCTULUI

Se numește rotație de nivel, rotația în jurul unei axe verticale (fig. 2.2.1). În rotația de nivel, *cotele punctelor* rămîn invariante, iar *proiecția orizontală își păstrează forma*, modificîndu-și doar poziția (fig. 2.2.2). De asemenea, se observă că:

— orice punct descrie prin rotația în jurul unei axe un cerc;
— planul cercului este perpendicular pe axă;
— centrul cercului se află la intersecția axei cu planul cercului;
— raza cercului este distanța de la punct la centrul cercului (în adevărată mărime).

În cazul de mai sus, axa fiind verticală, rotația punctului se face într-un plan de nivel.

ROTAȚIA DE FRONT A PUNCTULUI

Se numește rotație de front rotația în jurul unei axe de capăt (fig. 2.2.3). În acest caz, rotația punctului A în spațiu se efectuează într-un plan de front [F] situat la depărtarea punctului A față de planul vertical. *Cercul și unghiul de rotație* se proiectează în adevărata lor mărime pe planul vertical de proiecție. Proiecția orizontală a se deplasează pe o

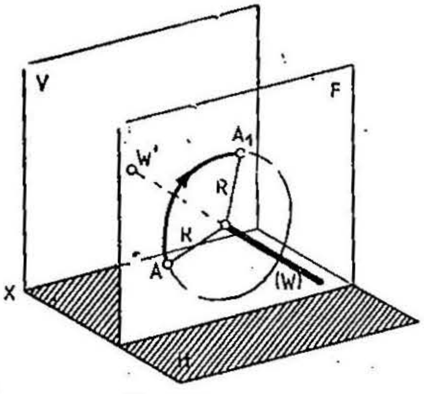


fig. 2.2.3

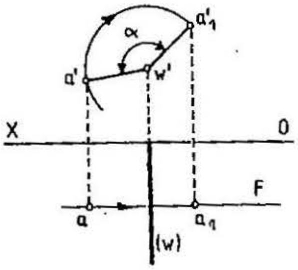


fig. 2.2.4

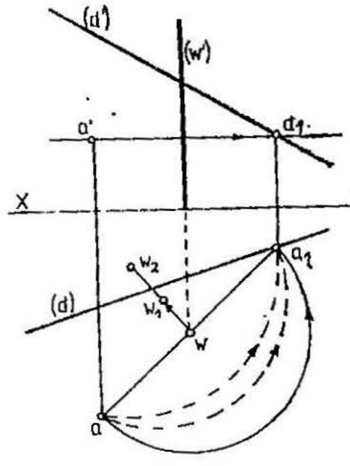


fig. 2.2.5

paralelă la linia de pămînt OX (fig. 2.2.4). În rotația de front rămîn invariante *depărtările punctelor*, iar *proiecția verticală își păstrează forma*, modificîndu-se doar poziția.

Rotația punctului astfel încît să se situeze pe o dreaptă. Se efectuează o rotație de nivel a punctului A (a, a'). În figura 2.2.5, pentru a determina poziția axei de rotație, trebuie să se ducă un plan de nivel prin punctul A și să se găsească intersecția A_1 (a_1, a'_1) a dreptei cu planul de nivel. Pentru ca punctul A prin rotație să ajungă pe dreapta D (d, d'), axa de rotație verticală trebuie aleasă pe mediatoarea segmentului AA_1 (oriunde pe această mediatoare, inclusiv în mijlocul lui AA_1).

Rotația punctului astfel încît să se situeze într-un plan. Se efectuează o rotație de nivel a punctului A (a, a'). În figura 2.2.6, cele două soluții ale problemei se găsesc la intersecția cercului descris de punctul A cu orizontala planului D (d, d') care se află la cota punctului A.

ROTAȚIA DE NIVEL A DREPTEI

Se duce perpendiculara **wa** pe proiecția orizontală (**d**) a dreptei și cu raza **wa** se descrie arcul de cerc $\mathbf{aa_1}$ corespunzător unghiului α (fig. 2.2.7). Tangenta în $\mathbf{a_1}$ la acest cerc este proiecția orizontală rotită ($\mathbf{d_1}$) a dreptei D (d, d'). Proiecția a' descrie o paralelă la OX și întîlnește în $\mathbf{a'_1}$ linia de ordine ridicată în $\mathbf{a_1}$. Pentru a fixa proiecția verticală rotită (d'_1) a dreptei (d), se mai rotește punctul B (b, b') ales arbitrar pe dreapta (D). Se remarcă faptul că un observator care privește din **w** spre punctul a, vede în stînga sa proiecția **b**. Analog, privind spre $\mathbf{a_1}$, acest observator din **w** va trebui să vadă tot în stînga sa proiecția rotită $\mathbf{b_1}$. În figura 2.2.8 se poate vedea că, dacă axa de rotație întîlnește dreapta dată, este suficient să se rotească un singur punct al dreptei, deoarece există un alt punct care rămîne propriul său rotit (punctul de intersecție dintre dreaptă și axă).

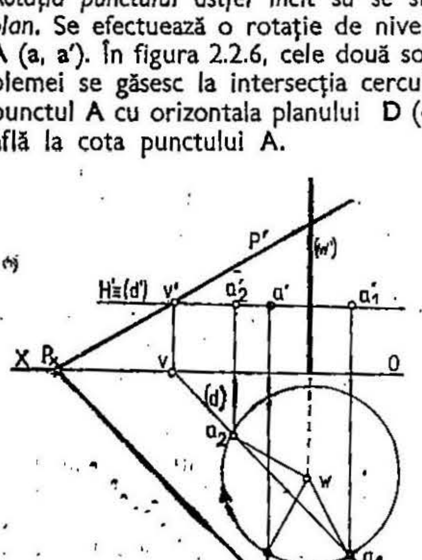


fig. 2.2.6

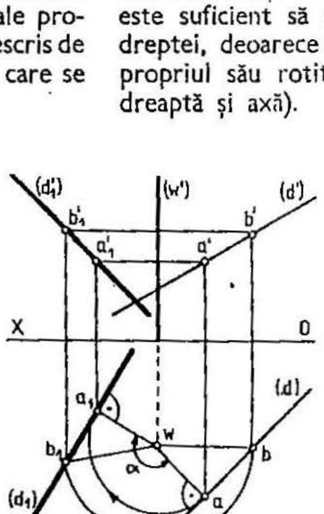


fig. 2.2.7

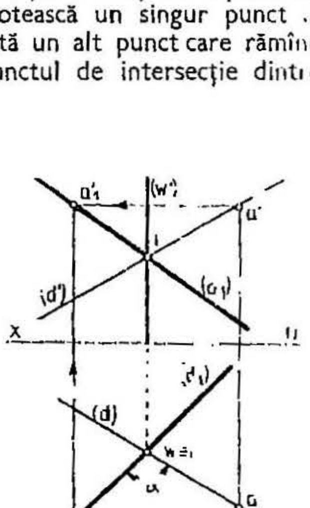


fig. 2.2.8

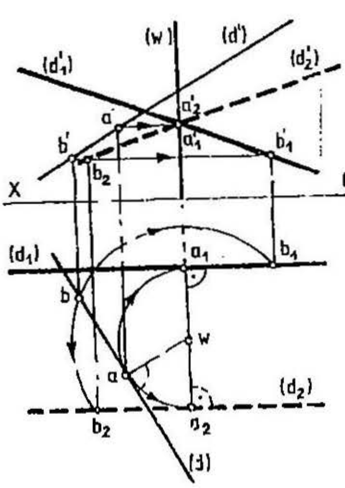


fig. 2.2.9

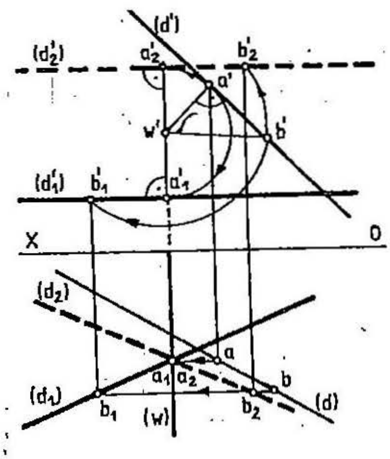


fig. 2.2.10

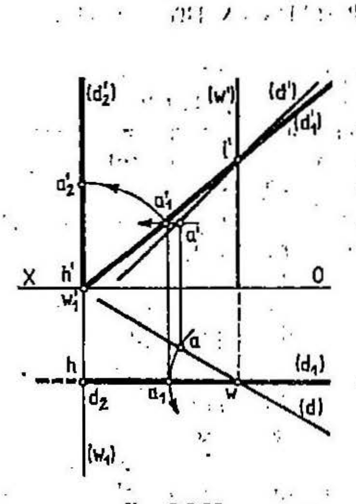


fig. 2.2.11

Rotația dreptei astfel încît să devină paralelă cu unul din planele de proiecție. Se cere să se rotească dreapta D (d, d'), astfel încît să devină paralelă cu unul din planele de proiecție. O *rotație de nivel* a dreptei (D) o transformă într-o dreaptă frontală, dacă se va roti proiecția orizontală (d) a dreptei (D), pînă cînd devine paralelă cu linia de pămînt OX (fig. 2.2.9). O *rotație de front* a dreptei (D) o transformă într-o *dreaptă orizontală*, dacă se va roti proiecția verticală (d') a dreptei (D) pînă cînd devine paralelă cu linia de pămînt OX (fig. 2.2.10). *Rotația dreptei astfel încît să devină perpendiculară pe unul din planele de proiecție.* Printr-o *rotație de nivel*, se aduce dreapta D(dd') în poziție *frontală*, iar apoi printr-o *rotație de front*, se aduce dreapta frontală într-o poziție *verticală* (fig. 2.2.11). În mod analog, printr-o *rotație de front* (în jurul unei axe de capăt) se poate aduce dreapta (D) în poziție *orizontală*, pentru ca apoi să se efectueze o rotație de nivel (în jurul unei axe verticale), care aduce dreapta orizontală în poziție *de capăt* (fig. 2.2.12).

Rotația dreptei astfel încît să se situeze într-un plan dat prin urme. Fie dreapta D (d, d') și planul (PP_xP') (fig. 2.2.13). Se determină mai întîi proiecțiile punctului I (i, i') de intersecție dintre dreapta (D) și planul [P], utilizînd planul de capăt [Q] dus prin (D). Se alege axa verticală de rotație, astfel încît să treacă prin punctul I, care devine propriul său rotit. Pentru găsirea unui al doilea punct comun între (D) și [P], se rotește urma orizontală (h) a dreptei (D), pînă cînd se așază în (h_1) pe urma orizontală a planului [P]. Segmentul h_1w determină proiecția orizontală rotită (d_1) a dreptei (d). Proiecția verticală rotită d_1' este determinată de $h_1'I'$. Problema mai admite o soluție prin proiecția (h_2).

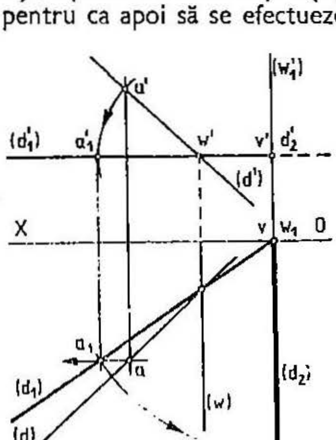


fig. 2.2.12

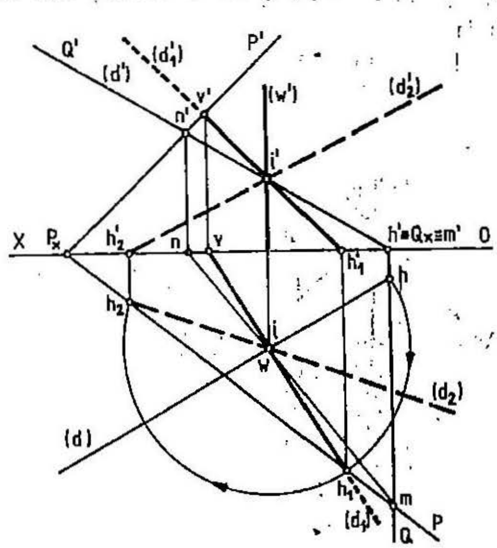


fig. 2.2.13

ROTAŢIA DE NIVEL A PLANULUI

În figura 2.2.14 se duce perpendiculara wa pe urma orizontală (P) a planului şi cu raza wa se descrie arcul de cerc aa_1 corespunzător unghiului de rotaţie dorit. Tangenta în a_1 este urma orizontală rotită (P_1) a planului dat. Întrucît punctul I (i, i') este propriul său rotit, se poate obţine urma verticală rotită, aşezînd punctul I pe o orizontală a planului D (d, d'). Rezolvarea problemei se simplifică dacă axa de rotaţie se alege chiar în planul vertical de proiecţie (fig. 2.2.15).

Rotaţia planului astfel încît să ajungă perpendicular pe unul din planele de proiecţie. În figura 2.2.16, se efectuează o rotaţie de nivel a planului [P] în jurul axei verticale (w, w'), astfel încît poziţia rotită (P_1) a urmei orizontale a planului [P] să fie perpendiculară pe linia de pămînt; rezultă P_{1x}. Punctul I (i, i'), unde axa (w, w') intersectează planul dat, rămîne în rotaţie propriul său rotit. Orizontala D (d, d') corespunzătoare punctului I devine după rotaţie dreapta de capăt D_1 (d_1, d'_1). Punctele P_{1x} şi $d'_1 = v'_1$ determină urma verticală rotită (P'_1) a planului dat, care astfel este transformat în plan de capăt.

În figura 2.2.17, rotaţia de front a planului [P] în jurul axei de capăt W (ww') aduce planul [P] în poziţia ($P_1P'_{1x}P'_1$), de plan proiectant faţă de planul orizontal de proiecţie.

În figura 2.2.18, pentru ca planul [P] să devină paralel cu linia de pămînt, deci perpendicular pe planul lateral de proiecţie, se alege, de exemplu, o axă verticală de rotaţie W(w, w') şi se efectuează o rotaţie de nivel a planului [P], astfel încît urma orizontală (P) să ocupe poziţia (P_1), paralelă cu linia de pămînt. Se ia dreapta (D), conţinută în planul [P] şi concurentă cu axa de rotaţie în I, şi se roteşte odată cu planul [P]; se obţine poziţia sa rotită (D_1) şi urma verticală (v'_1) pe unde va trece urma verticală rotită (P'_1) a planului.

Rotaţia planului astfel încît să devină paralel cu unul din planele de proiecţie. În figura 2.2.19, printr-o rotaţie de nivel şi una de front, se aduce planul oarecare [P] mai întîi în poziţie de capăt, iar apoi în poziţie de plan de nivel. Problema admite două soluţii: (P'_2) şi (P'_3). În mod asemănător, în figura 2.2.20, se efectuează mai întîi o rotaţie de front şi apoi o rotaţie de nivel, aducînd planul oarecare [P] în poziţia verticală (P'_1) şi apoi în poziţia frontală (P_2). Problema admite şi soluţia (P_3).

Adevărata mărime a unei figuri plane. Se cere determinată adevărata mărime a triunghiului ABC, utilizînd metoda rotaţiei (fig. 2.2.21). Se duce prin punctul A (a, a') o axă verticală de rotaţie W(w,w') şi se roteşte orizontala G (g, g') a triunghiului, astfel încît să devină dreaptă de capăt G_1(g_1, g'_1). Punctele B şi C se rotesc în B_1 şi C_1, proiecţiile lor verticale b'_1 şi c'_1 fiind coliniare cu a'. Planul triunghiului a devenit astfel plan de capăt. O rotaţie de front în jurul axei W_1 (w_1, w'_1), dusă prin punctul A, aduce planul de capăt al triunghiului în poziţie de nivel. Adevărata mărime a triunghiului este ab_2c_2.

Rotaţia a două plane ca să devină paralele. Se dau planele [P] şi [Q] (fig. 2.2.22). Planul [Q] se roteşte de nivel, astfel încît urma sa orizontală să devină paralelă cu urma orizontală a planului [P]. În noua poziţie, planele se intersectează după orizontala Δ (δ, δ'). Se alege o a doua axă de rotaţie paralelă cu această orizontală şi se roteşte planul [Q] în jurul ei pînă devine paralel cu planul [P].

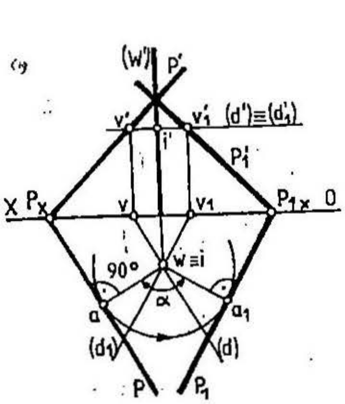


fig. 2.2.14

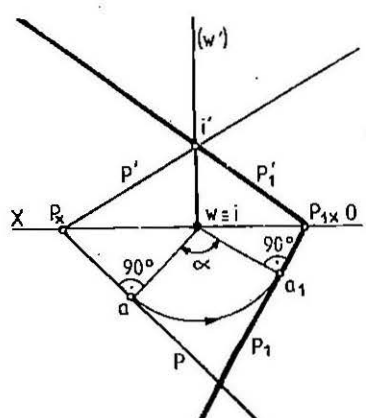


fig. 2.2.15

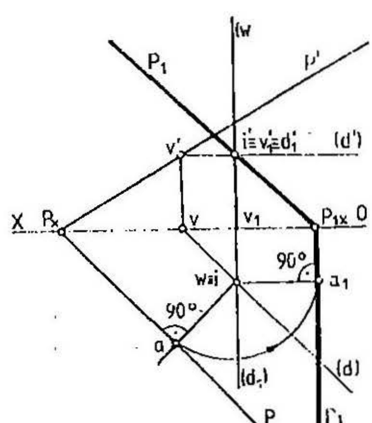


fig. 2.2.16

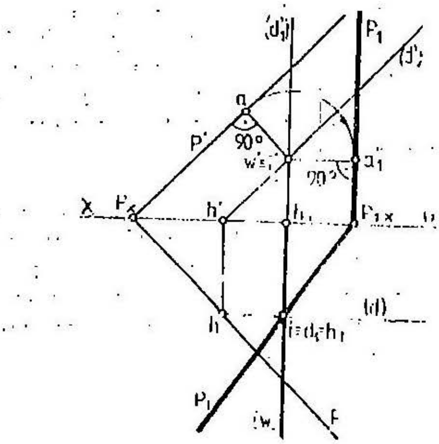


fig. 2.2.17

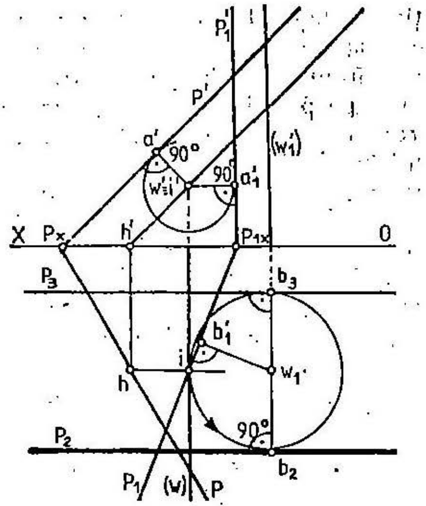


fig. 2.2.20

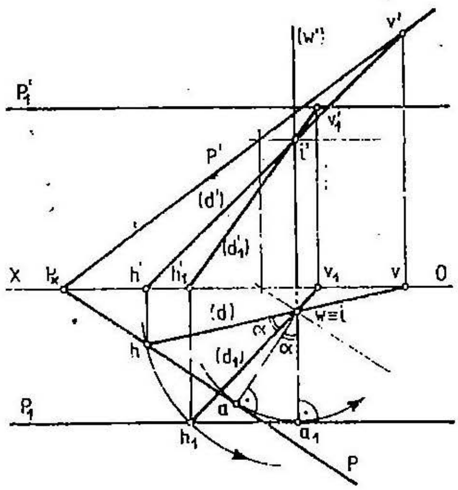


fig. 2.2.18

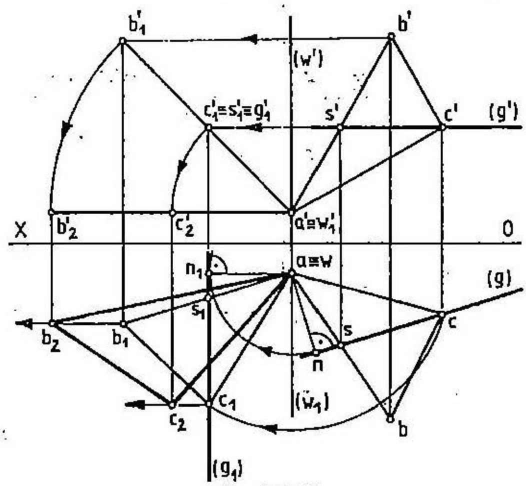


fig. 2.2.21

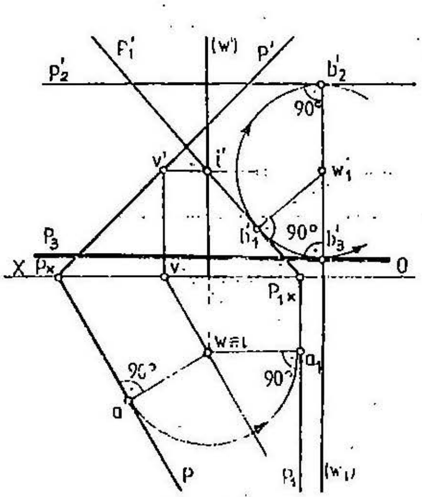


fig. 2.2.19

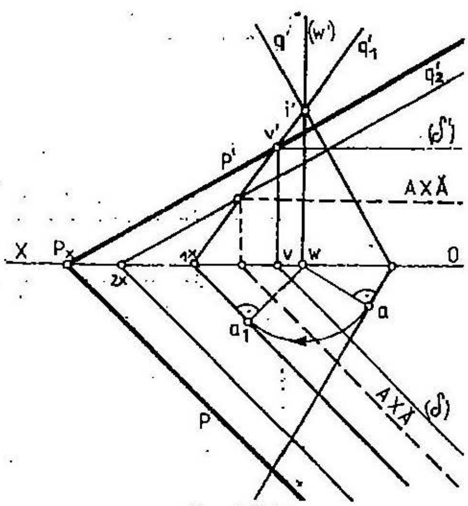


fig. 2.2.22

Aplicaţie. Cubul din figura 2.2.23 a suferit o rotaţie de front şi apoi o rotaţie de nivel. Efectuaţi încă o rotaţie de front, astfel încît să situaţi cubul cu un singur vîrf pe planul orizontal de proiecţie.
Două rotaţii asemănătoare au fost aplicate prismei din figura 2.2.24, deci o rotaţie de front şi apoi o rotaţie de nivel. Efectuaţi încă o rotaţie de front, astfel încît prisma să fie aşezată cu un singur vîrf pe planul orizontal de proiecţie.
Figura 2.2.25 reprezintă rotaţia de front şi rotaţia de nivel a unei piramide drepte pătrate, iar figura 2.2.26 reprezintă rotaţia de front şi de nivel a unui con.

Aplicaţie. Se cere să se efectueze secţiunea într-o piramidă oblică după un plan oarecare (fig. 2.2.27). Se transformă planul oarecare în plan de capăt. Punctele de intersecţie se determină în proiecţia orizontală rotită şi se transpun apoi în proiecţiile iniţiale ale piramidei.

Aplicaţie. Să se aşeze o piramidă dreaptă hexagonală astfel încît să aibă baza într-un plan oarecare ($PP_x P'$) (fig. 2.2.28). Se transformă planul în plan de capăt. Se aşază piramida pe el, printr-o rotaţie de front şi apoi se aşază pe un plan oarecare ($PP_x P'$) printr-o rotaţie de nivel.

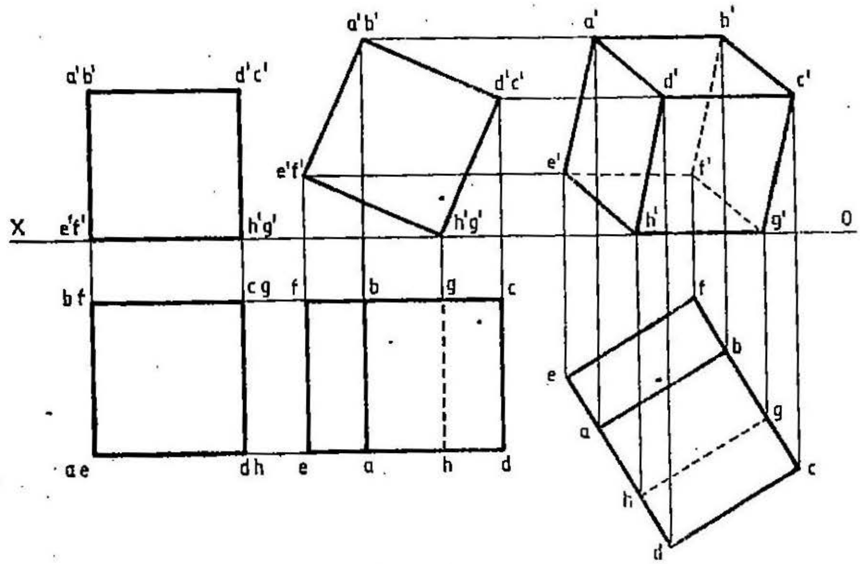


fig. 2.2.23

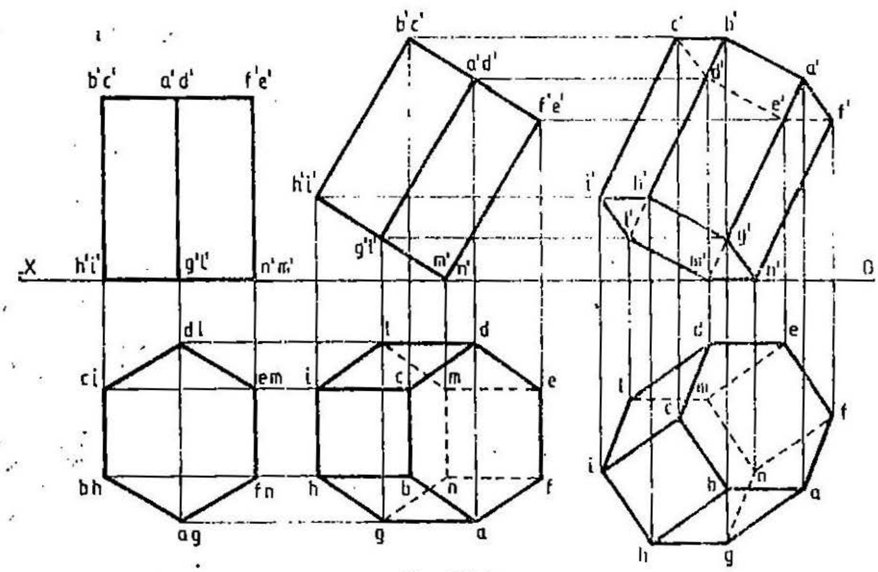


fig. 2.2.24

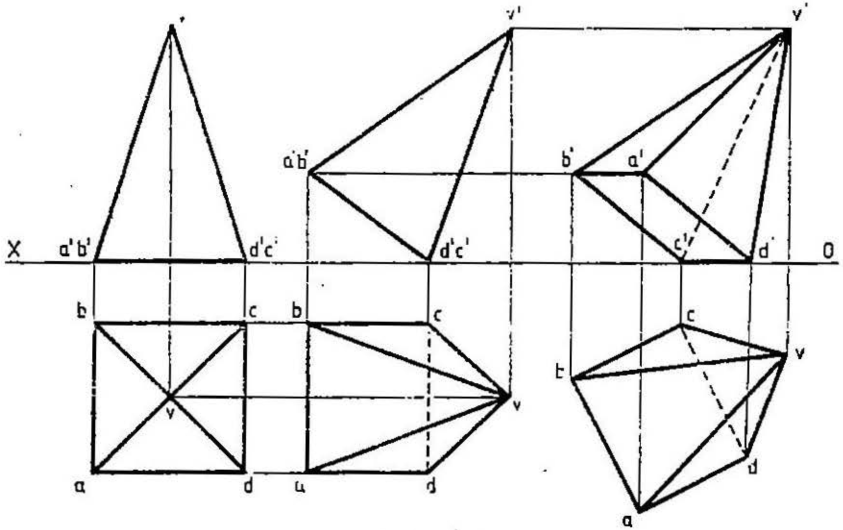


fig. 2.2.25

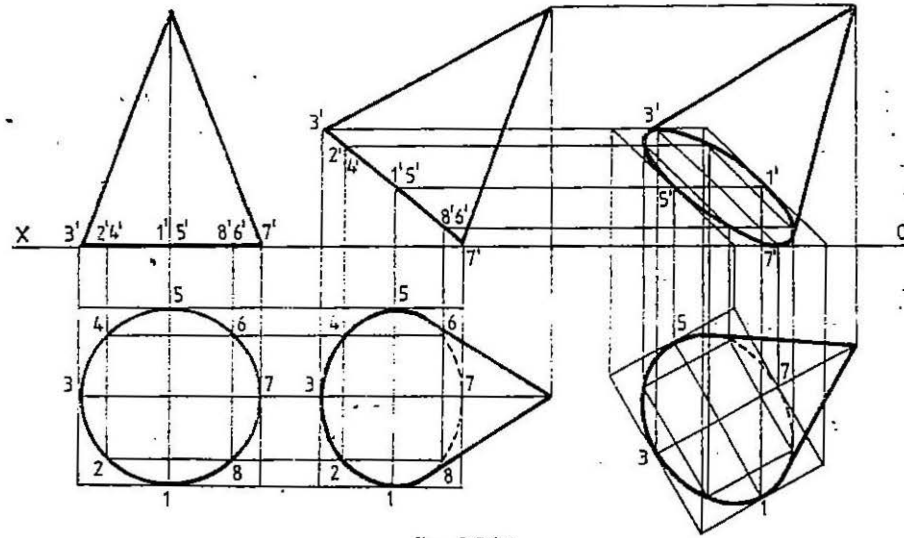


fig. 2.2.26

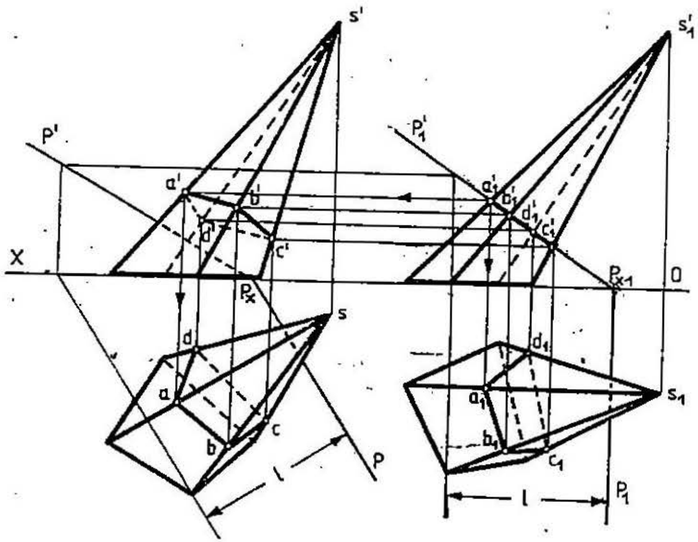


fig. 2.2.27

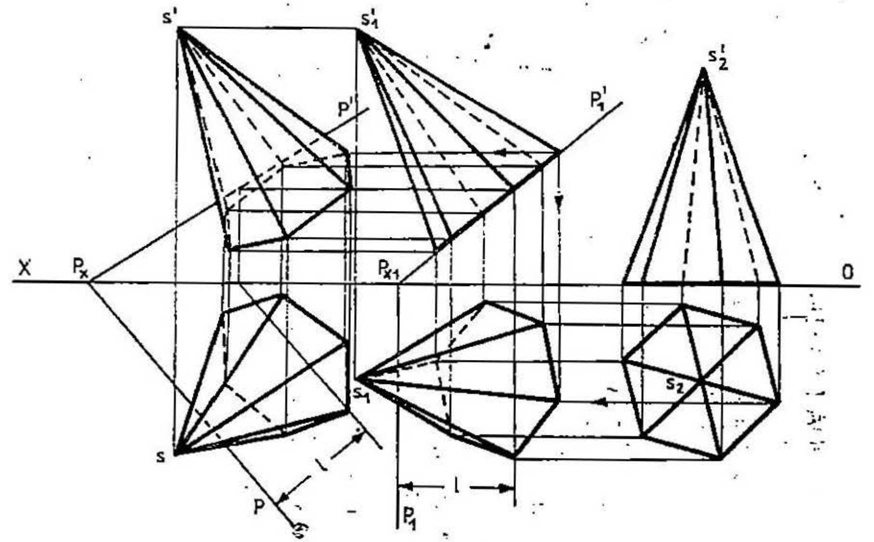


fig. 2.2.28

2.3. METODA RABATERII

Metoda rabaterii este *un caz particular al metodei rotaţiei* şi urmăreşte aflarea unor adevărate mărimi (distanţe, unghiuri), prin rotaţia unui plan în jurul unei *axe frontale* sau *orizontale* (axă de rabatere), astfel încît planul să devină conţinut în (sau paralel cu) planele de proiecţie. Rabaterea unui punct sau a unei drepte este de fapt rabaterea planului definit de punct (sau dreaptă) şi axa de rabatere.

RABATEREA UNUI PLAN OARECARE PE PLANUL ORIZONTAL DE PROIECŢIE

În schiţa axonometrică din figura 2.3.1, se arată rabatarea planului oarecare [P], dat prin urme (P, P'), în jurul urmei orizontale (P), care în acest caz este axa de rabatere. Problema se reduce la rabaterea unui punct V (v, v'), ce aparţine planului, în jurul axei de rabatere (P). Pentru simplificarea rezolvării, s-a ales punctul V (v, v') chiar pe urma verticală (P') a planului. Acest punct va descrie un cerc perpendicular pe axa (P), avînd centrul w (la intersecţia axei (P) cu planul cercului) şi raza v'w. Cînd punctul V (v, v') va ajunge în planul orizontal [H], raza cercului se va aşterne pe [H], în adevărată mărime. Se notează cu v_0 poziţia rabătută a punctului V (v, v') pe planul [H] şi, unind acest punct cu P_x, se află urma (P_0), deci planul (PP_xP') dat a fost rabătut pe planul orizontal [H]. Se observă că planul perpendicular pe axa de rabatere, dus prin V (v, v'), determină în spaţiu triunghiul vv'w, triunghi dreptunghic cu unghiul drept în v şi avînd catetele v v' şi v w cunoscute; ipotenuza w v' este raza de rabatere a punctului V(v v') în jurul urmei (P).

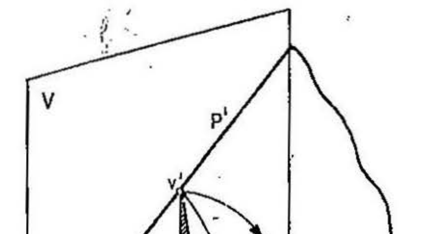


fig. 2.3.1

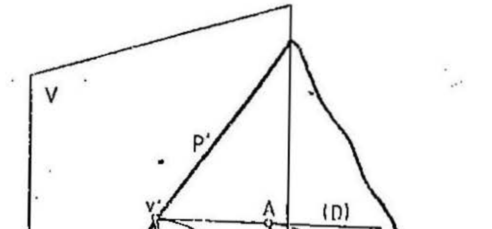


fig. 2.3.3.

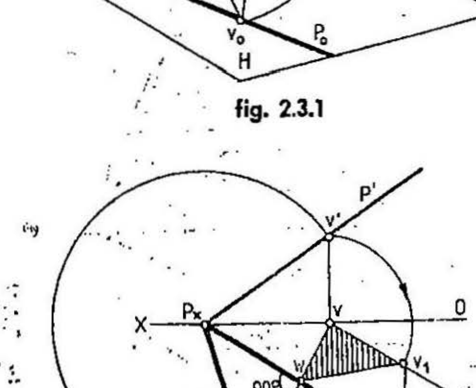


fig. 2.3.2

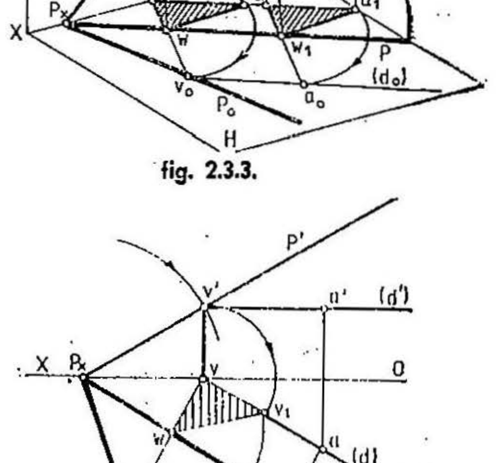


fig. 2.3.4

În epura 2.3.2, acest triunghi a fost așternut în planul orizontal de proiecție [H], prin rabaterea punctului V (v, v') în jurul catetei vw. Triunghiul vwv' obținut este în adevărată mărime și se numește *triunghi de poziție*. Pentru a afla punctul v_0, rabătutul punctului V (v, v') în jurul urmei (P) (axa de rabatere) pe planul [H], se intersectează arcul de cerc de rază wv_1 și centru w cu prelungirea perpendicularei wv dusă pe urma [P], sau direct, fără ajutorul triunghiului de poziție, se intersectează prelungirea perpendicularei vw pe urma [P] cu cercul de rază P_xv' și centru P_x. Această construcție se bazează pe observația că, prin rabatere, segmentul P_xv' al urmei verticale a planului se vede pe planul [H] în adevărată mărime. În final, se unește P_x cu v_0 și se obține urma (P'_0) rabătută a planului.

Figurile 2.3.3 și 2.3.4 reprezintă rabaterea planului PP_xP' în jurul urmei (P), folosind de această dată rabaterea dreptei orizontale D(d, d') dusă prin punctul A și aparținînd planului (PP_xP'). Se observă că rabaterea unei drepte orizontale a planului rămîne paralelă cu urma orizontală (P). Dreapta (d_0) se poate obține, fie folosind metoda triunghiului de poziție $w_1 aa_1$, fie direct prin rabaterea punctului v' în v_0, ducînd apoi prin v_0 sau a_0 o paralelă la urma orizontală a planului (P).

RABATEREA UNEI FIGURI PLANE SITUATE ÎNTR-UN PLAN DAT PRIN URME

Triunghiul ABC (fig. 2.3.5) conținut în planul (PP_xP') se poate rabate în planul orizontal [H], rabătînd urma verticală (P') a planului în (P'_0), luînd (P) ca axă de rabatere. Se rabat totodată și orizontalele planului care trec prin punctele A, B și C. Dacă se folosește *relația de afinitate* dintre proiecția orizontală **abc** și rabaterea $a_0b_0c_0$, este suficient să se ducă o singură orizontală în rabatere și să se folosească *axa de afinitate* (urma (P)).

RIDICAREA RABATERII

Ridicarea rabaterii este *operația inversă* rabaterii. În figura 2.3.6, au fost determinate urmele (P) și (P') ale unui plan, cunoscînd proiecțiile punctului M(m, m') din plan și rabaterea m_0 a acestui punct pe planul [H]. Se determină w pe mediatoarea segmentului m_0m_1 (unde mm_1 este cota lui M) și se duce prin w urma (P) perpendiculară pe mm_0. Urma [P'] se obține unind P_x cu v' (urma verticală a dreptei orizontale Δ(δ, δ') ce trece prin punctul M și aparține planului PP_xP'.

RABATEREA PE UN PLAN DE NIVEL

Distanța de la un punct la o dreaptă. Rabătînd pe un plan de nivel (și nu pe planul orizontal de proiecție [H]), se reduc dimensiunile triunghiului de rabatere, ceea ce face ca operațiile grafice să se reducă și ele. În figura 2.3.7, se cere distanța de la un punct M(m, m') la o dreaptă oarecare Δ(δ, δ') prin metoda rabaterii. Se duce prin punctul M(m, m') un plan de nivel (H') și se rabate dreapta Δ(δ, δ') pe

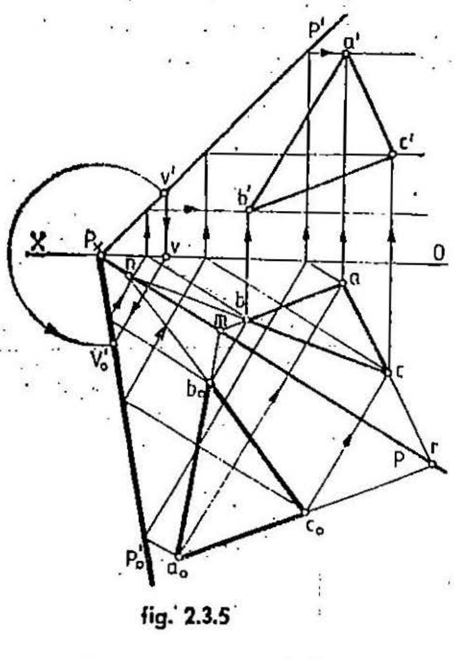


fig. 2.3.5

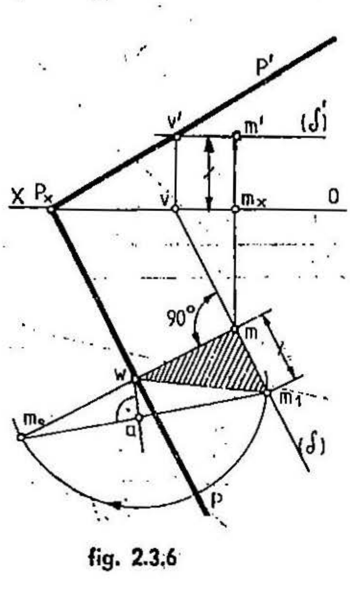


fig. 2.3.6

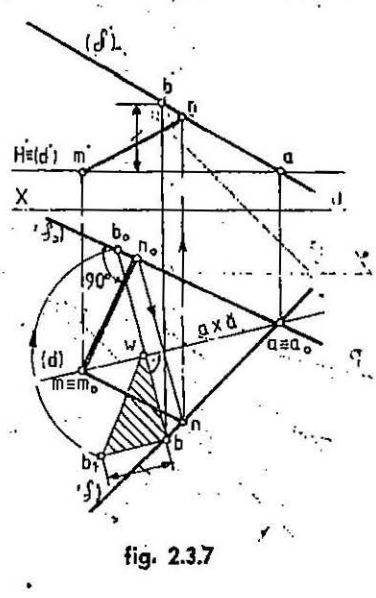


fig. 2.3.7

acest plan în jurul orizontalei AM(am, a'm'), unde A este intersecția dreptei (Δ) cu planul de nivel. Se ia un punct arbitrar B(b, b') pe dreapta (Δ), care se rabate în b_0 pe planul de nivel cu ajutorul triunghiului de poziție wbb_1. Se obține astfel (δ_0), rabaterea pe planul de nivel a dreptei (Δ), pe care se duce apoi perpendiculara m_0n_0. Segmentul m_0n_0 reprezintă adevărata mărime a distanței de la punctul M la dreapta (Δ). Se întoarce punctul n_0 din rabatere, pentru determinarea proiecțiilor orizontale și verticale ale perpendicularei.

Adevărata mărime a unghiului cuprins între două drepte concurente. În figura 2.3.8, se construiește urma orizontală hk a planului format de cele două drepte D(d, d') și Δ (δ, δ') și se ia această urmă ca axă de rabatere. Se rabate punctul M(m, m') de intersecție a celor două drepte în m_0 pe planul orizontal de proiecție (rabaterea s-a făcut construind triunghiul de poziție wmm_1). Unghiul cuprins între (δ_0) și (d_0) se obține astfel în adevărata mărime. Aceeași rezolvare se poate vedea și în figura 2.3.9, cu diferența că rabaterea se face într-un plan de nivel (H'). Triunghiul de poziție va fi mai mic și rezolvarea ocupă mai puțin spațiu.

Unghiul dintre o dreaptă și un plan. Pentru a afla adevărata mărime a unghiului cuprins între dreapta Δ (δ, δ') și planul [P], dat prin urme (fig. 2.3.10), se duce printr-un punct oarecare M(m, m'), situat pe dreapta (Δ), o perpendiculară (ma, m'a') pe planul dat. Se rabate punctul M pe un plan de nivel (H') în jurul axei AB(ab, a' b') situată în același plan (H'). Se obține în adevărată mărime unghiul cuprins între perpendiculara dusă din M și dreapta (Δ). Unghiul căutat este unghiul complementar: $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ aflat în adevărata mărime în planul de nivel.

Unghiul dintre două plane. Avînd planele oarecare [P] și [Q], unghiul dintre cele două plane se poate afla prin două metode. Dintr-un punct oarecare M(m,m') din spațiu (fig. 2.3.11), se duc normalele (perpendicularele) pe cele două plane. Se rabate punctul M pe un plan oarecare de nivel (H') și se obține adevărata mărime a unghiului β cuprins între cele două normale. Unghiul căutat α dintre cele două plane P și Q se obține luînd suplimentul unghiului β.
Cea de a doua metodă este reprezentată în figura 2.3.12. Prin punctul M(m, m'), situat pe dreapta Δ (δ,δ') de intersecție dintre cele două plane [P] și [Q], se duce un plan [R] perpendicular pe planele [P] și [Q], deci și pe (Δ). Se determină proiecțiile orizontale ma și mb ale dreptelor de intersecție dintre planul R cu fiecare din planele [P] și [Q]. Unghiul α cuprins între aceste drepte de intersecție este unghiul căutat și se obține în adevărată mărime prin rabaterea punctului M pe planul orizontal de proiecție, luînd ca axă de rabatere urma orizontală [R].

Adevărata mărime a unei figuri plane. Pentru a afla adevărata mărime a triunghiului ABC (fig. 2.3.13) prin metoda rabaterii, se ia o orizontală a triunghiului (cea care trece prin B(b, b')) și se rabate triunghiul în jurul ei, pînă cînd ajunge în planul de nivel respectiv (H'). Se obține rabaterea $a_0b_0c_0$, adevărata mărime a triunghiului ABC.

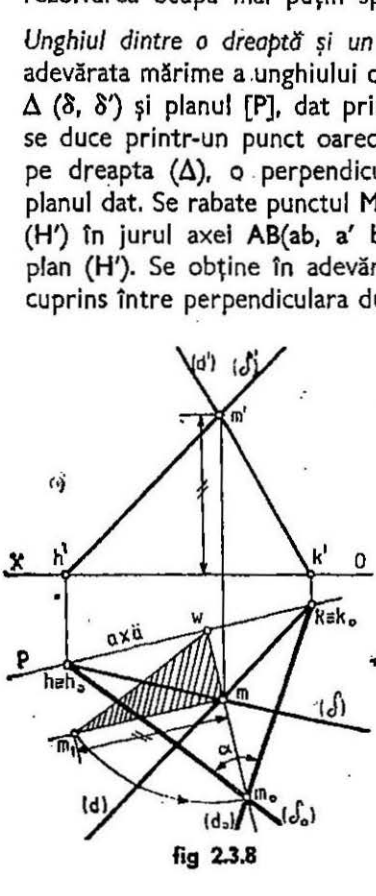


fig 2.3.8

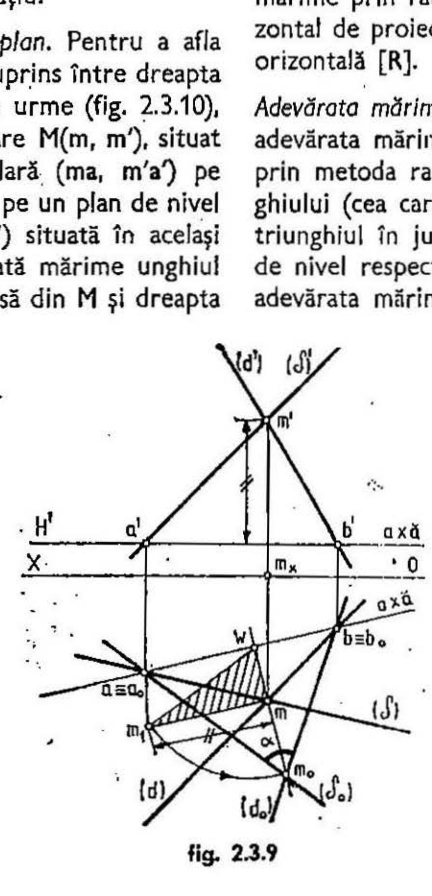


fig. 2.3.9

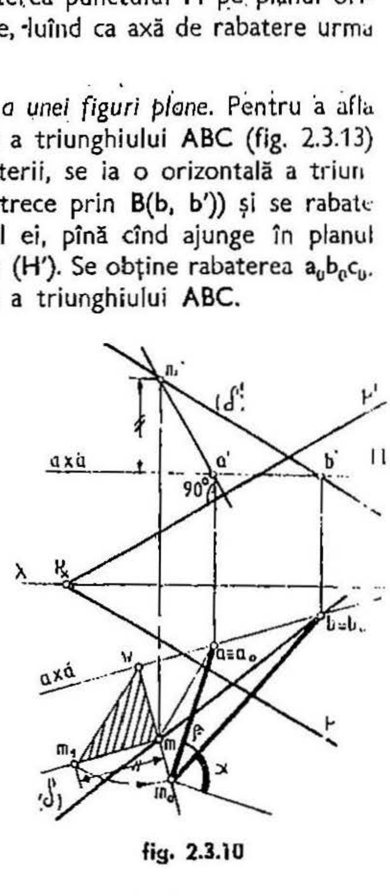


fig. 2.3.10

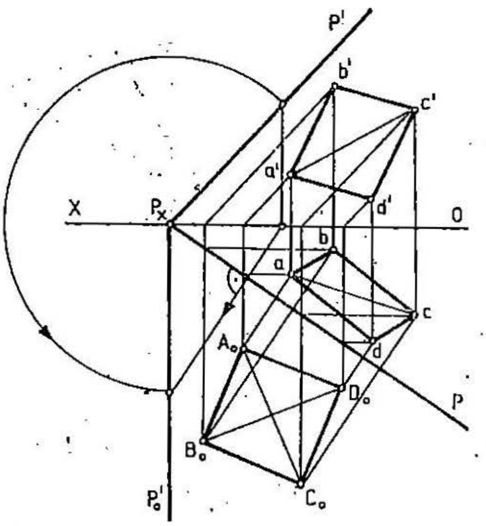


fig. 2.3.15

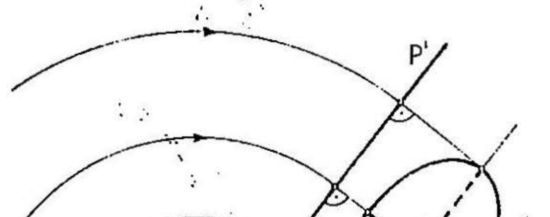


fig 2.3.16

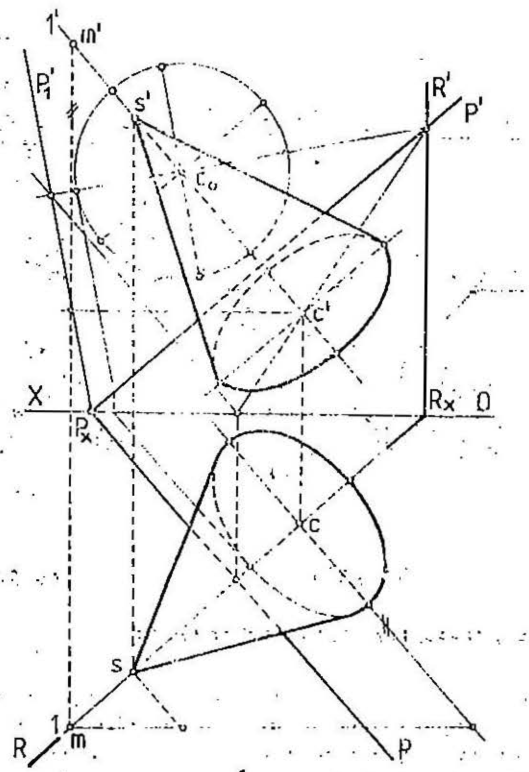


fig. 2.3.17

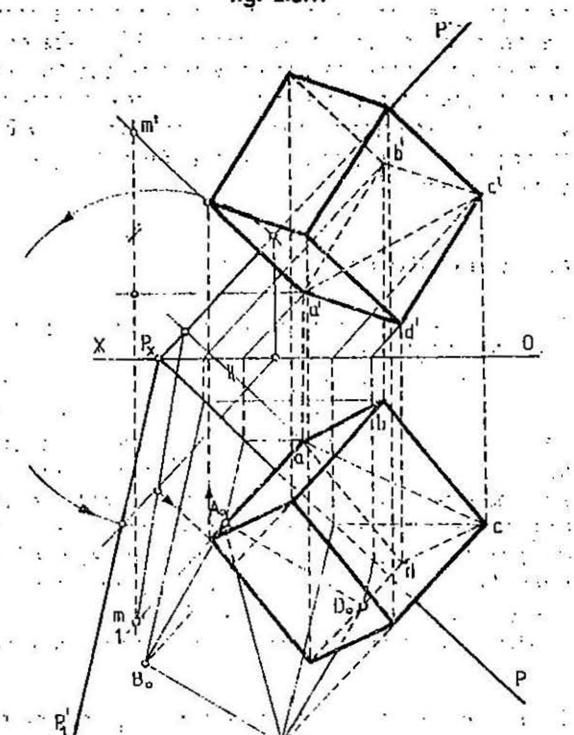


fig. 2.3.18

(deci perpendiculară pe frontală). O construcţie mai precisă se poate obţine ducînd elipsa prin opt puncte.

3. În figura 2.3.17, s-a aşezat un con circular drept pe un plan oarecare PP_xP', prin ridicarea rabaterii. În figura 2.3.18, s-a aşezat un cub de muchie dată, pe un plan oarecare (PP_xP'), prin ridicarea rabaterii.

3.

REPREZENTĂRI AXONOMETRICE

3.1. INTRODUCERE. REZOLVĂRI INTUITIVE

Reprezentările descriptive ale obiectelor nu sugerează dintr-o dată imaginile acestor obiecte așa cum se văd și pentru acest motiv se recurge la reprezentarea lor în perspectivă.

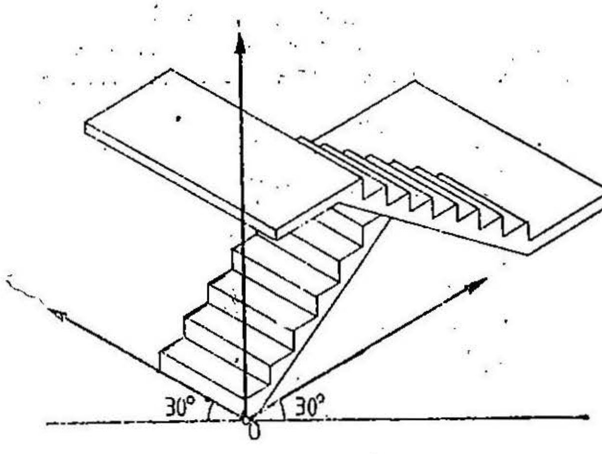


fig. 3.1.1

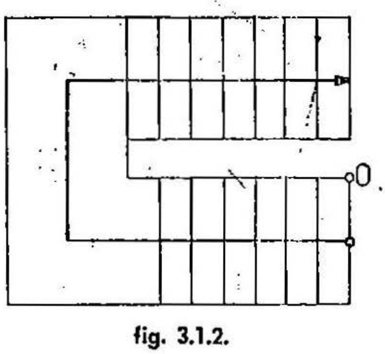


fig. 3.1.2.

Axonometria este o perspectivă convențională, deoarece ea admite paralelismul razelor vizuale, deci situarea la infinit a punctului de vedere. Față de reprezentările în dublu ortogonal, reprezentarea axonometrică este mai aproape de percepția vizuală a obiectului din natură, oferind o imagine calitativă de volum. Figura 3.1.1 reprezintă axonometria izometrică a unei scări structurate din două rampe. Planul scării este cel din figura 3.1.2. În axonometrie, deși raportul a trei puncte coliniare (raportul simplu) se păstrează, nu se păstrează alte relații metrice, cum sînt suprafețele și unghiurile, care apar deformate. În axonometria izometrică, de exemplu, segmentele de dreaptă se pot măsura și compara direct numai dacă sînt conținute în (sau paralele cu) una din cele trei axe de coordonate (fig. 3.1.3). Un segment orientat după orice altă direcție din spațiu nu mai poate fi măsurat imediat, ci prin metode pe care le vom prezenta în cursul acestui capitol.

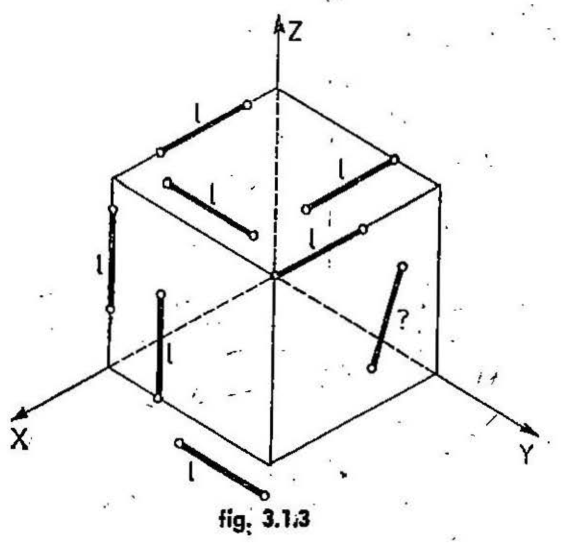


fig. 3.1.3

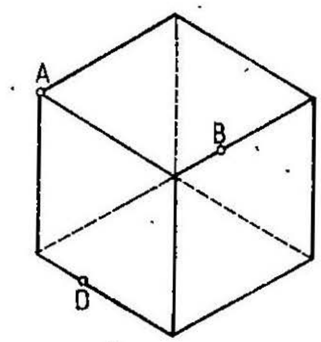


fig. 3.1.4

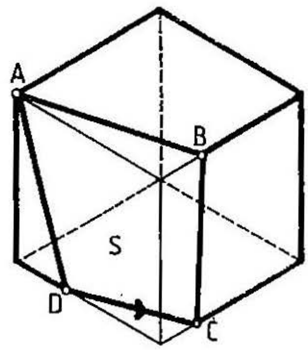


fig. 3.1.5

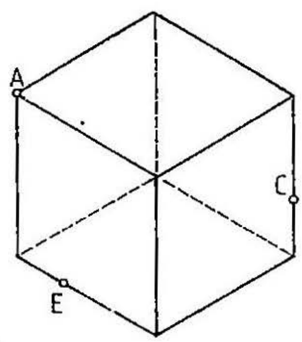


fig. 3.1.6

Multe probleme de poziție se pot rezolva direct în axonometrie, folosindu-se metode intuitive bazate pe elemente de geometrie în spațiu: probleme de secțiuni plane, intersecții de corpuri și chiar unele probleme de unghiuri. Se vor exemplifica cîteva asemenea metode de rezolvare directă în axonometrie, folosind axonometria izometrică, a cărei proprietate distinctivă este aceea că unitățile de măsură pe cele trei axe de coordonate sînt identice.

Aplicație. Un cub așezat cu o față în planul orizontal de proiecție este reprezentat în axonometria izometrică (fig. 3.1.4). Să se deseneze direct în axonometrie secțiunea prin cub determinată de planul care conține punctele **A**, **B** și **D**.

Două din laturile poligonului de secțiune sînt evidente: **AB** și **AD**. Planul de secțiune [S] taie fețele superioară și inferioară ale cubului după două drepte paralele. Prin urmare, se duce prin **D** o paralelă la **AB**, obținînd astfel pe **C**, cel de-al patrulea vîrf al poligonului de secțiune (fig. 3.1.5). Dacă datele problemei sînt puțin mai complicate (fig. 3.1.6), se poate folosi intersecția planului de secțiune [S] cu planul orizontal de proiecție [H]. Dreapta de intersecție trece prin punctul **E**. Un al doilea punct al ei se obține găsind urma **h** a dreptei AC (conținute în planul [S]) pe planul [H]. Dreapta **Eh** permite să se găsească vîrful **D** al poligonului de secțiune. Latura **AB** se obține știind că este paralelă cu ED (fig. 3.1.8). Acest caz nu este dificil, el putîndu-se rezolva, ca și primul caz, prin paralelism (fig. 3.1.9).

Cel de-al treilea caz este mai complicat (fig. 3.1.10), întrucît cele trei puncte care definesc planul de secțiune nu se află situate pe muchiile cubului, ci pe cele trei fețe vizibile ale sale. Se găsește dreapta de intersecție dintre planul de secțiune

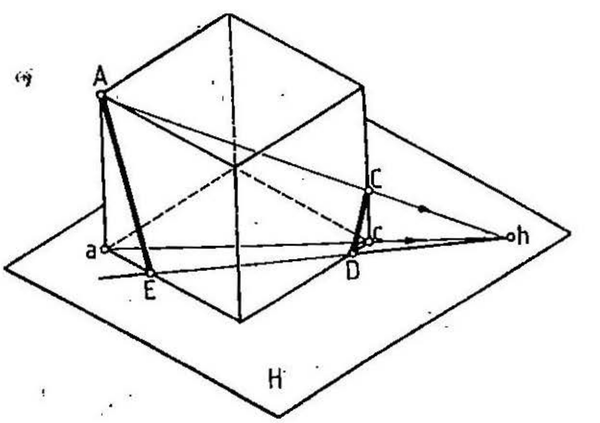


fig. 3.1.7

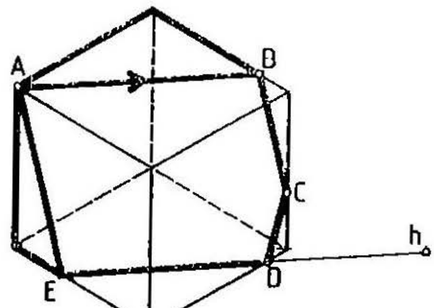


fig. 3.1.8

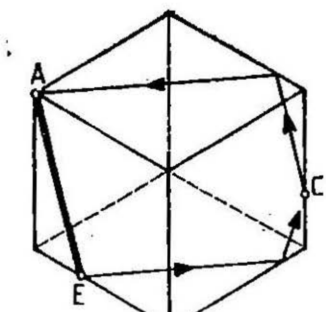


fig. 3.1.9

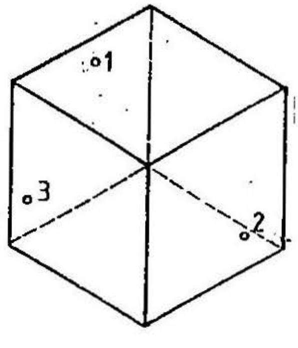


fig. 3.1.10

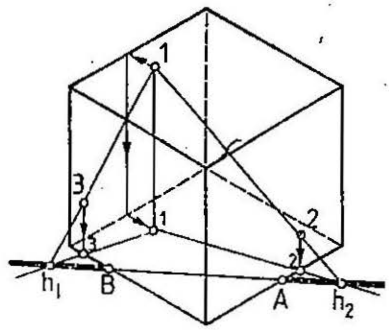


fig. 3.1.11

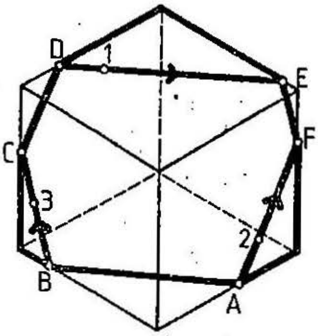


fig. 3.1.12

și planul orizontal de proiecție. Se caută deci urmele orizontale h_1 și h_2 ale dreptelor **13**, respectiv **12**, conținute în planul de secțiune. Cele două urme h_1 și h_2 se obțin la intersecția dreptelor **13** și **12** cu proiecțiile lor orizontale (fig. 3.1.11). Dreapta h_1h_2 permite să se găsească primele două vîrfuri ale poligonului de secțiune: A și B. Vîrfurile C și F se obțin imediat, unind pe B cu **3** și pe A cu **2** (fig. 3.1.12). Ultimele două vîrfuri, D și E, se obțin fie ducînd prin **1** o paralelă la AB, fie ducînd din C și din F paralele la AF, respectiv BC.

Notă. Și în ultimul caz, ca și în celelalte, se observă posibilitatea de *rezolvare pe căi multiple* a problemei. Se poate deci verifica ușor corectitudinea soluției propuse.

Aplicație. Desenați direct în axonometrie izometrică intersecția celor două piramide drepte pătrate din figura 3.1.13, știind că au axele verticale confundate.

Axul vertical comun înțeapă cele două pătrate în punctele **1** și **2** (fig. 3.1.14). Secțiunile prin piramide la cotele **1** și **2** sînt două pătrate mai mici

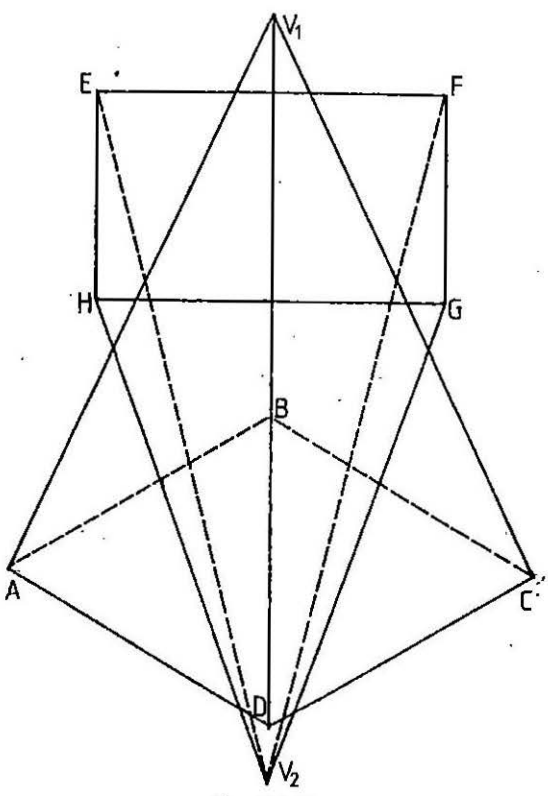


fig. 3.1.13

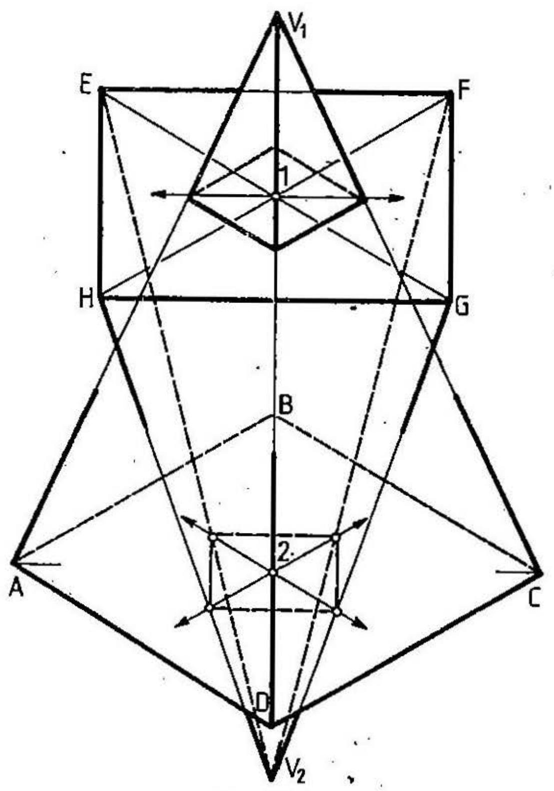


fig. 3.1.14

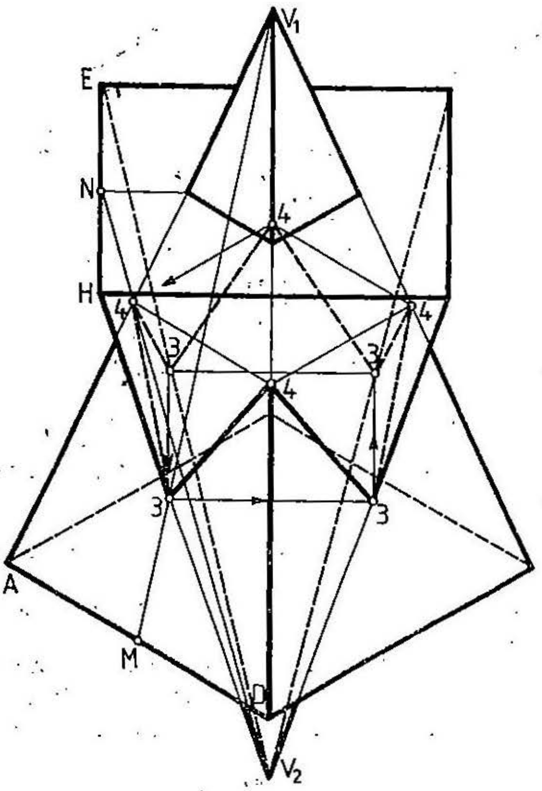


fig. 3.1.15

decît bazele. Astfel s-au obținut primele două poligoane ale intersecției. Poligonul strîmb central al intersecției celor două piramide se obține prin proprietățile de simetrie ale ansamblului. Primul său vîrf aflat la cota 3 se obține intersectînd muchia V_2H cu mediana V_1M a feței V_1AD (fig. 3.1.15). În mod similar, primul vîrf al poligonului strîmb aflat la cota 4 se obține intersectînd muchia V_1A cu mediana V_2N a feței V_2HE. Poligonul strîmb central de intersecție este **3434343**.

Aplicație. Cubul din figura 3.1.16 este așezat cu o față în planul orizontal de proiecție. Așezați peste el un alt cub identic, cu un vîrf în punctul A și cu o muchie orizontală după direcția dreptei (Δ) conținută în fața superioară a cubului dat.

Aplicația a fost aleasă pentru a ilustra limitele rezolvărilor intuitive în axonometrie (chiar atunci cînd este vorba de axonometrie izometrică). Se descompune aplicația în etape de rezolvat. Trebuie așezat pe fața superioară a cubului un pătrat identic cu aceasta, dar orientat după direcția (Δ). Problemele de rezolvat sînt:

1) construirea în planul feței superioare a cubului a unei drepte perpendiculare în A pe (Δ);

2) determinarea pe (Δ) și pe perpendiculara în A pe (Δ) a unor segmente egale cu muchia cubului (respectiv cu latura pătratului).

Ambele probleme sînt metrice, referindu-se la măsurători de unghiuri și segmente. Întrucît prima problemă este un caz particular (construcția unui unghi de 90° în A), se poate rezolva prin observație directă și prin aplicarea proprietății axonometriei de a păstra măsura segmentelor pe direcții paralele cu axele de coordonate.

Se notează fața superioară a cubului cu MNPQ (fig. 3.1.17). Prelungind dreapta (Δ) se obțin punctele 1 și 2 pe muchiile cubului. Dacă se iau segmentele $\overline{M3} = \overline{N1}$ și $\overline{Q2} = \overline{P4}$, dreapta 34 va fi perpendiculară pe (Δ). Demonstrația este imediată: dacă repetăm operațiile în plan (fig. 3.1.18), se observă că cele două trapeze identice N12M și M34Q au laturile două cîte două perpendiculare.

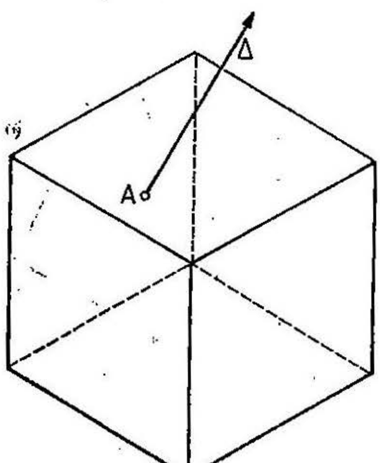


fig. 3.1.16

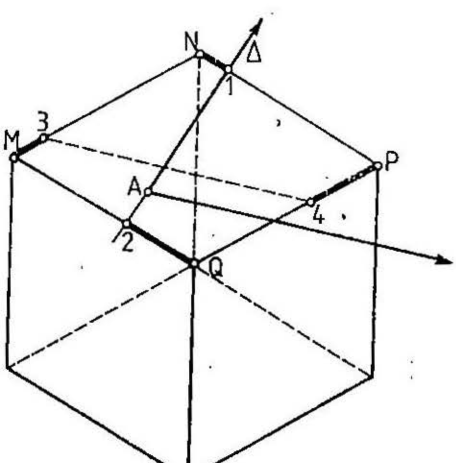


fig. 3.1.17

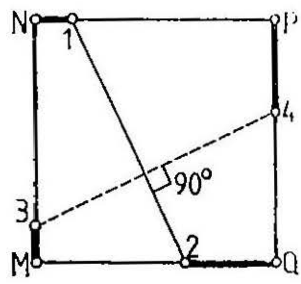


fig. 3.1.18

Pentru construcția perpendicularei în A pe (Δ), să se găsească o altă rezolvare intuitivă.
Construirea pe (Δ) și pe perpendiculara în A pe (Δ) a unor segmente egale cu muchia cubului nu se mai poate face prin metode intuitive, ci necesită un studiu mai aprofundat al proprietăților axonometriei. Se va rezolva problema după acumularea elementelor necesare.

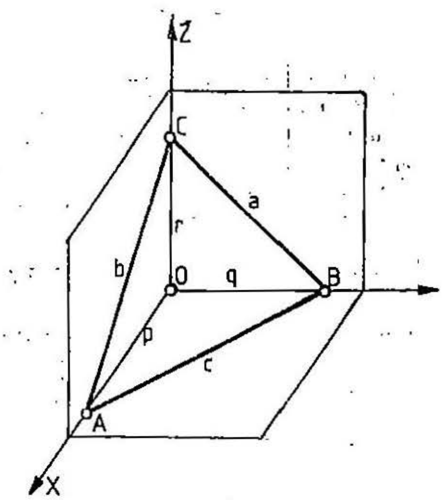


fig. 3.2.1

3.2. PROPRIETĂȚILE AXONOMETRIEI ORTOGONALE

Prin *reprezentare axonometrică* se înțelege figura care se obține dacă se proiectează un obiect pe un plan înclinat față de cele trei axe de coordonate. Acest plan înclinat se numește *plan axonometric*. Dreptele de intersecție dintre planul axonometric și planele fețelor triedrului tridreptunghic de referință OXYZ formează un triunghi ABC, numit *triunghi axonometric* (fig. 3.2.1). În *axonometria ortogonală*, direcția proiectantelor este întotdeauna perpendiculară pe planul axonometric (se spune că direcția de proiecție este ortogonală).

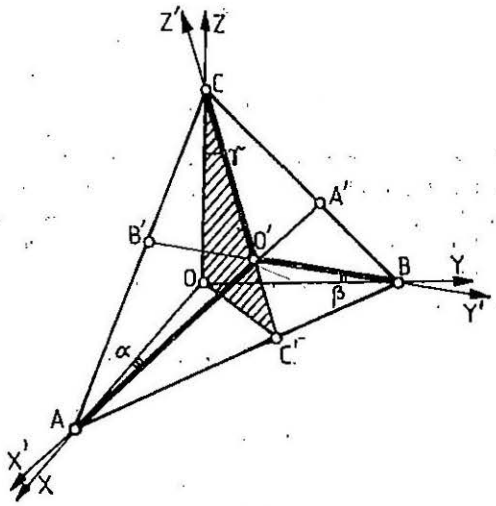


fig. 3.2.2

PROPRIETĂȚILE TRIUNGHIULUI AXONOMETRIC

În axonometria ortogonală, triunghiul axonometric este întotdeauna triunghi ascuțit-unghi. Se proiectează ortogonal pe planul axonometric în O' originea comună O a muchiilor triedrului tridreptunghic de referință (fig. 3.2.2). Proiecțiile muchiilor sînt dreptele O'A, O'B și O'C și se numesc *axe axonometrice* sau *axe-imagine*. Punctul O' este ortocentrul triunghiului axonometric (punctul de intersecție a înălțimilor), iar axele-imagine sînt înălțimile triunghiului axonometric și bisectoarele triunghiului ortic A'B'C'.
Figura 3.2.3 demonstrează că orice triunghi ascuțit-unghi poate fi ales triunghi axonometric. Astfel, punctele A', B' și C' se obțin ducînd înălțimile în triunghiul ABC. La intersecția înălțimilor rezultă proiecția O' a punctului O. Pentru a obține adevărata mărime a segmentului $\overline{OO'}$ se construiește pe CC', prin înscriere într-un semicerc, rabatarea O_0CC' a triunghiului dreptunghic OCC' (v. fig. 3.2.2). Segmentul $\overline{O_0O'}$ este adevărata mărime a segmentului $\overline{OO'}$ din spațiu. Prin rabatarea triunghiului OAB în O_0AB (fig. 3.2.3), se obține adevărata mărime $\overline{O_0C'}$ a segmentului din spațiu OC' (*Botez și Mirescu*, 1970).

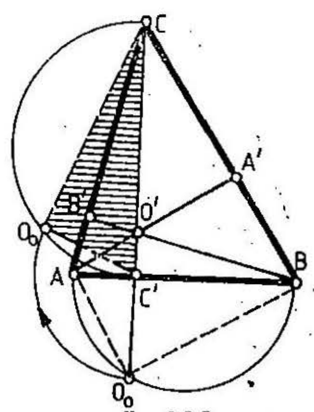


fig. 3.2.3

COEFICIENŢI DE REDUCERE ŞI SCĂRI

Dacă α, β şi γ sînt unghiurile pe care le fac axele-imagine cu muchiile triedrului de referinţă, şi dacă se consideră o unitate de măsură **u** pe muchiile triedrului de referinţă şi se proiectează ortogonal pe axele-imagine, se obţin trei segmente u_x, u_y şi u_z (fig. 3.2.4) astfel încît:

$$u_x = u \cos \alpha; \; u_y = u \cos \beta; \; u_z = u \cos \gamma.$$

Segmentele u_x, u_y şi u_z sînt mai mici decît **u**, iar $\cos \alpha$, $\cos \beta$ şi $\cos \gamma$ se numesc *coeficienţi de reducere*. Relaţia fundamentală dintre ei este:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2.$$

Segmentele u_x, u_y şi u_z se numesc *unităţi-imagine* pentru fiecare ax.

Scările axonometrice sînt tocmai axele-imagine divizate în părţi egale cu lungimile unităţilor-imagine respective. Construcţia scărilor axonometrice este ilustrată în figura 3.2.5. Ca şi în figura 3.2.3, se folosesc rabaterile triunghiurilor OCC' şi OAB. Pe catetele acestor triunghiuri se iau în adevărată mărime unităţile de măsură de pe cele trei axe de coordonate. Toate aceste unităţi au aceeaşi lungime **u**. Unităţile de măsură se proiectează pe axele-imagine (prin ridicarea rabaterii) şi se obţin *unităţile-imagine* u_x, u_y şi u_z (care în cazul general de axonometrie sînt diferite una de celelalte).

RELAŢIA FUNDAMENTALĂ A AXONOMETRIEI ORTOGONALE

Dacă se notează $\sphericalangle O'OX = \alpha_1$, $\sphericalangle O'OY = \beta_1$ şi $\sphericalangle O'OZ = \gamma_1$, cosinusurile acestor unghiuri dau direcţia proiectantelor în raport cu axele carteziene (fig. 3.2.6). Între aceste cosinusuri există relaţia cunoscută:

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1.$$

De aici se poate deduce expresia:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1.$$

Această expresie se mai poate scrie:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2,$$

sau

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 2.$$

Deci, suma pătratelor coeficienţilor de reducere este constantă şi egală cu 2.

CONSTRUCŢIA IMAGINILOR AXONOMETRIC-ORTOGONALE

Imaginea axonometrică a unei drepte este ilustrată în figurile 3.2.7. . . . 3.2.9.

Dreaptă oarecare (fig. 3.2.7). Dreapta şi proiecţia ei pe planul orizontal de proiecţie constituie imaginea completă a dreptei şi pe baza lor se pot determina toate urmele dreptei: urma u_1 pe [H]; urma u_2 pe [W]; urma u_3 pe [V]. Proiecţiile unui punct de pe dreaptă se obţin ducînd paralele la axele-imagine (proiecţiile lui m* pe [H], [W] şi [V] sînt respectiv m_1, m_2 şi m_3).

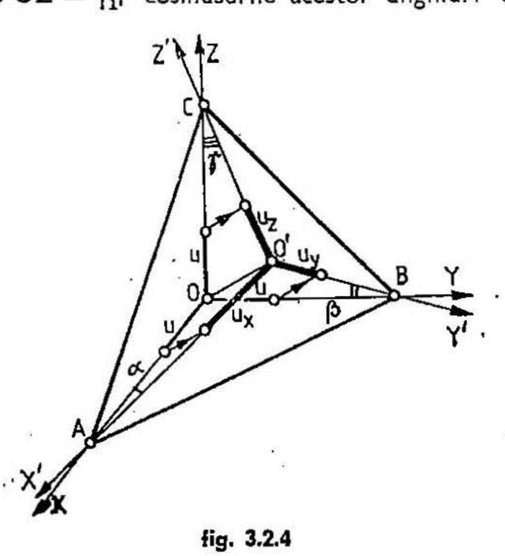


fig. 3.2.4

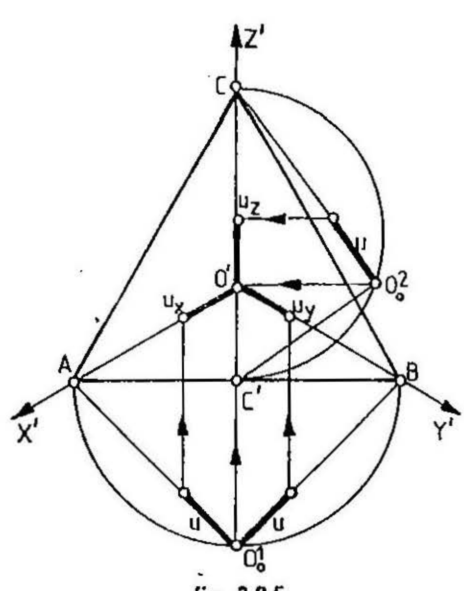


fig. 3.2.5

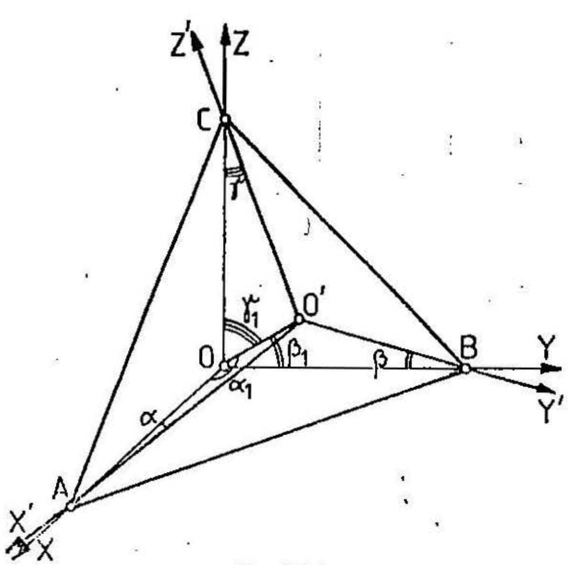


fig. 3.2.6

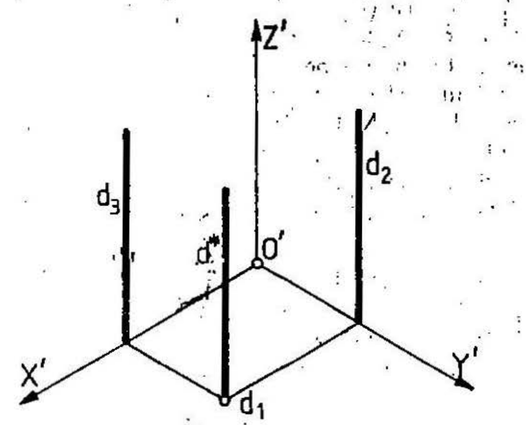


fig. 3.2.8

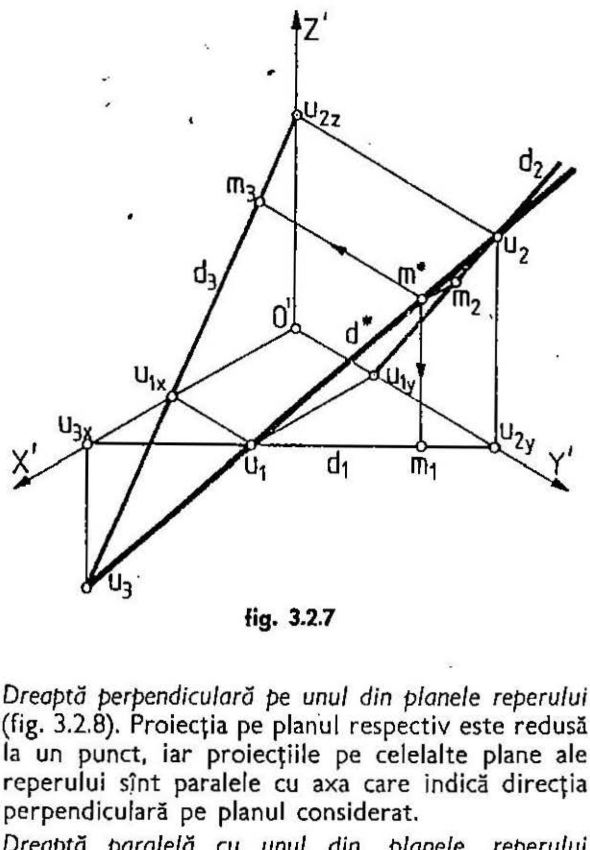


fig. 3.2.7

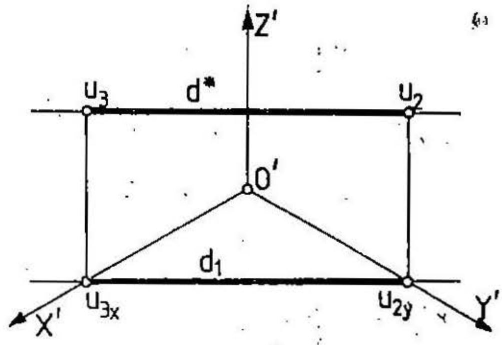


fig. 3.2.9

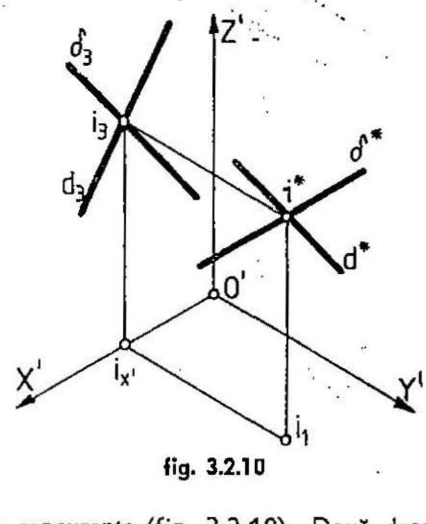


fig. 3.2.10

Dreaptă perpendiculară pe unul din planele reperului (fig. 3.2.8). Proiecţia pe planul respectiv este redusă la un punct, iar proiecţiile pe celelalte plane ale reperului sînt paralele cu axa care indică direcţia perpendiculară pe planul considerat.

Dreaptă paralelă cu unul din planele reperului (fig. 3.2.9). Dreapta este paralelă cu proiecţia ei pe planul reperului cu care dreapta este paralelă.

Poziţia relativă a două drepte este ilustrată în figurile 3.2.10. . .3.2.11.

Drepte concurente (fig. 3.2.10). Două drepte sînt concurente dacă proiecţiile lor pe oricare din planele reperului sînt concurente, iar liniile de ordine corespunzătoare punctului de intersecţie sînt respectiv paralele cu axele-imagine. În figura 3.2.10 sînt reprezentate în axonometrie două drepte concurente în punctul I.

Drepte paralele (fig. 3.2.11). Întrucît proiecțiile (paralele) pe orice plan a două drepte paralele sînt paralele, se obțin trei perechi de drepte paralele. Ducînd linii de ordine paralele la axele-imagine, se poate obține poziția „în spațiu" (de fapt, proiecția pe planul axonometric) a celor două drepte.

Reprezentarea planului în axonometrie este ilustrată în figurile 3.2.12...3.2.14.

Plan oarecare (fig. 3.2.12). Un plan oarecare este deplin reprezentat prin două urme sau prin două proiecții ale elementelor care îl determină (două drepte coplanare, dreaptă și punct, figură geometrică). În figura 3.2.12, planul [P] este dat prin urma [P_1] și proiecțiile unui punct M, respectiv m* și m_2. Pentru a construi urma [P_3] a planului, se determină întîi m_1, apoi se duce prin (m*, m_1) o dreaptă arbitrară conținută în planul dat [P]. Prin urma verticală u_3 va trece urma (P_3).

Plan perpendicular pe unul din planele reperului (fig. 3.2.13). Orice plan perpendicular pe unul din planele reperului cartezian are două din urmele sale paralele cu axa ce se opune planului reperului. În figură se vede planul $P_1P_2P_3$ perpendicular pe XZ și o dreaptă (D) conținută în acest plan.

---

§ Notă. În schițele axonometrice folosite abundent în text s-au notat elementele din spațiu (puncte și drepte) cu caractere mari. În acest capitol, aceleași elemente sînt notate cu caractere mici însoțite de asterisc, pentru a le distinge de elementele propriu-zise din spațiu și a reține că, de fapt, toate aceste puncte și drepte sînt proiecții pe planul axonometric.

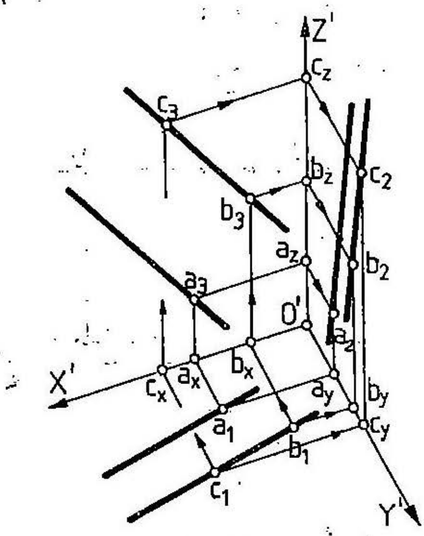


fig. 3.2.11

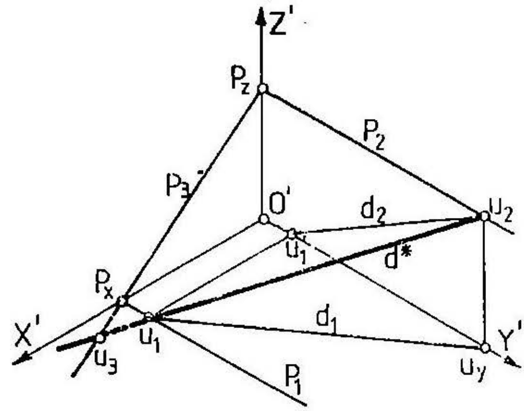


fig. 3.2.13

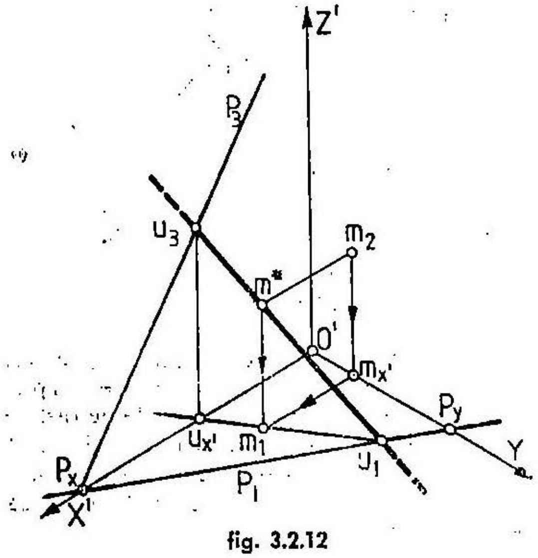


fig. 3.2.12

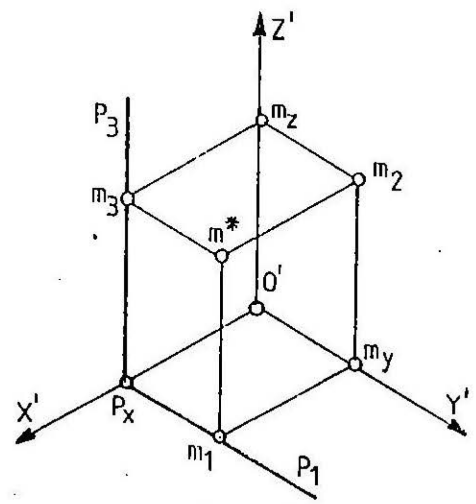


fig. 3.2.14

Plan paralel cu unul din planele reperului (fig. 3.2.14). Urmele (P_3) și (P_1) ale planului paralel cu YZ sînt paralele cu O'Z' și O'Y'. Două drepte conținute într-un plan paralel cu unul din planele reperului au proiecțiile principale și două dintre proiecțiile secundare confundate.

Poziția relativă a două plane în axonometrie este ilustrată în figurile 3.2.15...3.2.18.

Plane paralele (fig. 3.2.15). Dacă două plane [P] și [Q] sînt paralele, urmele lor pe cele trei plane de proiecție sînt paralele. Se duce printr-un punct M(m^*, m_1) un plan [Q] paralel cu planul [P] dat prin cele trei urme ale sale. Se construiește în [P] o dreaptă oarecare (u_1u_3, u_1u_2) și se duce prin punctul M o dreaptă paralelă la ea. Două din urmele acestei drepte vor fi v_1 și v_3. Dreptele (Q_1) ‖ (P_1) și (Q_3) ‖ (P_3) care trec prin v_1, respectiv prin v_3, sînt urmele planului căutat.

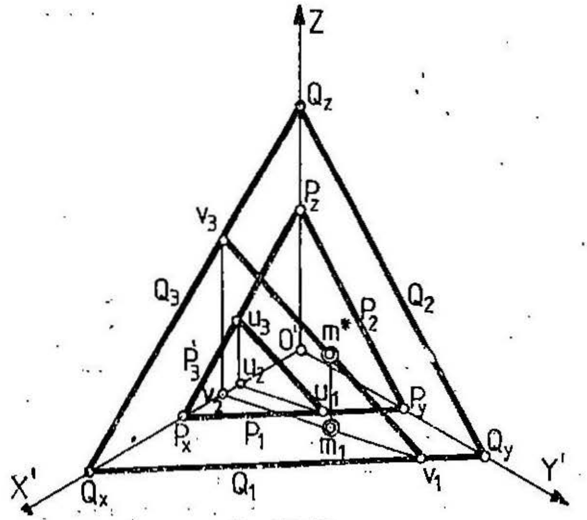


fig. 3.2.15

Plane concurente. Dacă două plane sînt concurente, cel puțin o pereche de urme de același nume sînt concurente. În figura 3.2.16 sînt date două plane [P] și [Q] ale căror urme concurente în (δ_3) sînt (P_3) și (Q_3). Întrucît (P_2) ‖ (Q_2) și (P_1) ‖ (Q_1) rezultă că dreapta lor de intersecție δ^* este perpendiculară pe planul XZ. Dacă două plane au numai două perechi de urme concurente, cea de a treia pereche de urme se compune din două drepte paralele. În figura 3.2.17 se dau planele [P] și [Q] ale căror urme (P_2) și (Q_2) și respectiv (P_1) și (Q_1) sînt concurente. În acest caz, dreapta de intersecție δ^* este determinată de urmele u_1 și u_2, aflate la intersecția urmelor (P_1) cu (Q_1) și (P_2) cu (Q_2). În figură se poate observa intersecția celor două plane. Cea de-a treia urmă se află la infinit, de unde rezultă că urmele (P_3) și (Q_3) sînt paralele.

În general, două plane concurente au urmele lor de același nume concurente. Cazul general a două plane concurente este ilustrat în figura 3.2.18. Fie planele [P] și [Q] concurente. Cele trei puncte u_1, u_2 și u_3, care rezultă la intersecția urmelor de același nume ale celor două plane, sînt concurente. Dreapta care le unește este dreapta de intersecție a celor două plane. Proiecția dreptei de intersecție pe planul orizontal este u_1u_y.

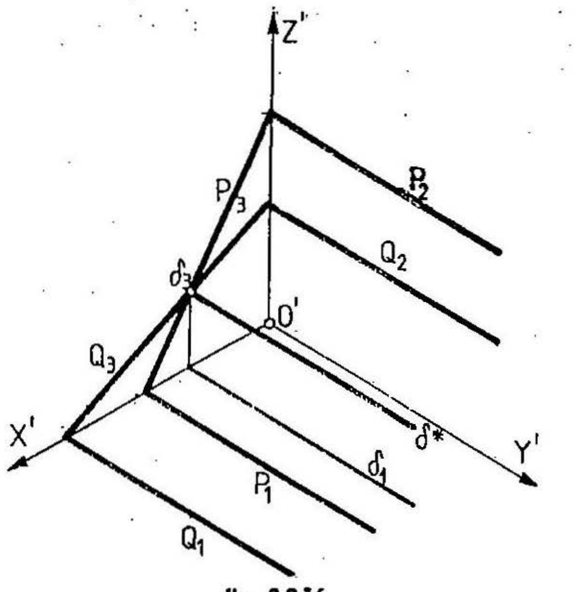


fig. 3.2.16

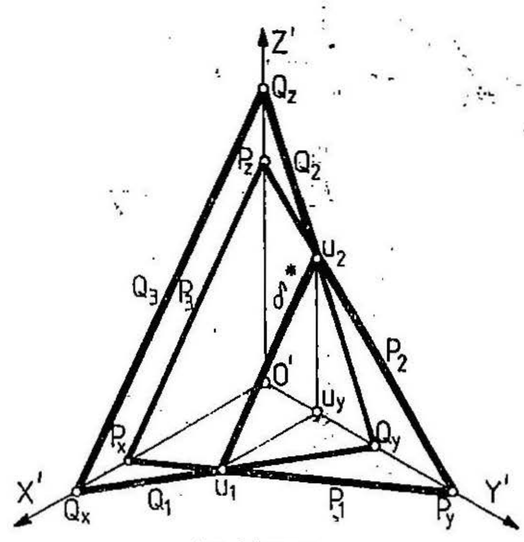


fig. 3.2.17

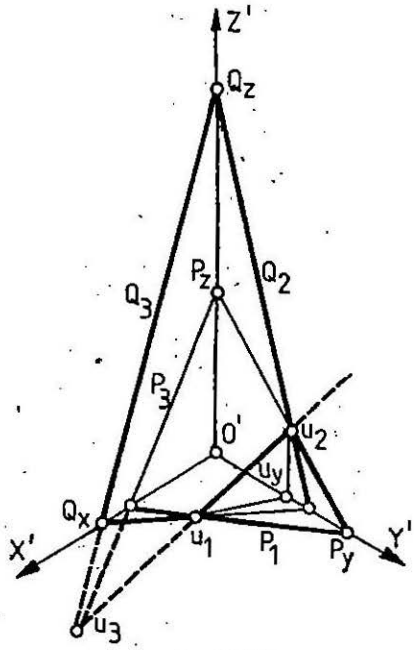


fig. 3.2.18

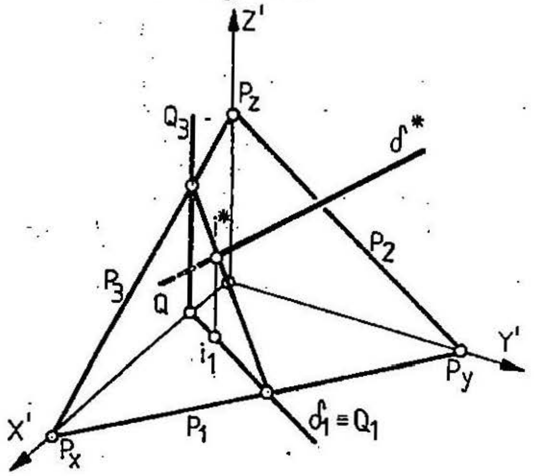


fig. 3.2.19

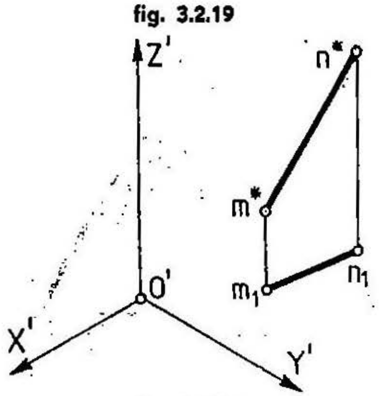


fig. 3.2.20

Poziția relativă a unei drepte față de un plan în reprezentare axonometrică este ilustrată în figura 3.2.19.

Dreaptă paralelă cu un plan. O dreaptă este paralelă cu un plan dacă este paralelă cu o dreaptă a planului (neilustrat).

Dreaptă concurentă cu un plan (fig. 3.2.19). Fie planul [P] și dreapta Δ (δ^*, δ_1). Se duce prin dreaptă un plan vertical care se intersectează cu [P]; la intersecția ei cu δ^* rezultă punctul I (I^*, I_1) căutat.

PROBLEME METRICE (Botez și Mirescu, 1970)

Determinarea lungimii unui segment de dreaptă. Se caută adevărata lungime a segmentului $\overline{MN}$($\overline{m^*n^*}$, $\overline{m_1n_1}$) din figura 3.2.20.

Se construiește un plan axonometric ABC și se intersectează cu planul vertical care proiectează segmentul pe planul XY (fig. 3.2.21). Acest plan taie planul axonometric după dreapta v_1v_2, care este și axă de afinitate.

Se rabate planul vertical ce conține segmentul $\overline{MN}$ pe planul axonometric. Se va rabate întîi triunghiul $v_1Q_yv_2$ (fig. 3.2.22). Se construiește transformatul afin al punctului Q_y. Triunghiul $v_1Q_yv_2$ este dreptunghic în Q_y, deci se duce semicercul pe v_1v_2. Dreapta $v_2Q_y^0$ este transformata afină a dreptei $\overline{Q_yv_2} \parallel \overline{m_1m^*} \parallel \overline{n_1n^*}$. Adevărata lungime a segmentului dat $\overline{MN}$ este segmentul $\overline{M^0N^0}$, aflat în relație de afinitate cu $\overline{m^*n^*}$ (unde axa de afinitate este v_1v_2, iar direcția de afinitate este $Q_yQ_y^0$).

Rabaterea unui plan oarecare pe planul axonometric. Fie ABC planul axonometric și P_1P_2 un plan oarecare dat prin urme (fig. 3.2.23). Rabaterea planului este determinată dacă se cunoaște rabaterea unui singur punct al său.

Se ia punctul P_y. Axa de rabatere (afinitate) este v_1v_2. Distanța de la P_y la planul ABC se obține prin rabaterea planului ZY pe planul ABC, în jurul axei O'Y' (fig. 3.2.24). Se construiește semicercul de diametru BB'. Se obține O''B care este rabaterea semiaxei OY, iar distanța D a punctului P_y la planul ABC este P_yP_y''.

În figura 3.2.25 se construiește rabaterea punctului căutat P_y. Rabaterea este P_y^0 și se găsește pe perpendiculara dusă din P_y pe v_1v_2 (axa de afinitate). Adevărata mărime a distanței de la P_y la axa v_1v_2 este ipotenuza unui triunghi dreptunghic ale cărui catete sînt P_yE și distanța P_yP_y'' de la P_y la planul axonometric ABC. Deci rabaterea triunghiului $P_yv_1v_2$ din planul P_1P_2 pe planul axonometric este triunghiul $P_y^0v_1v_2$.

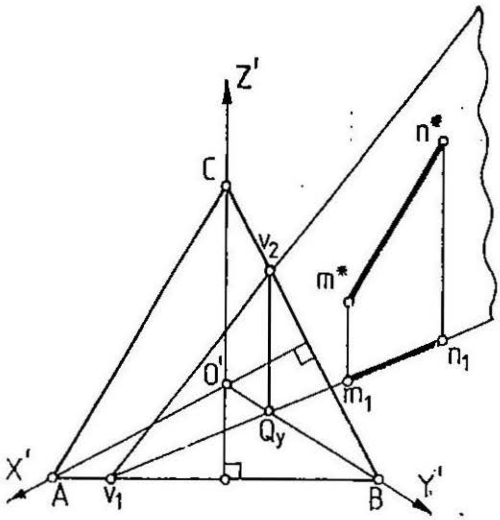


fig. 3.2.21

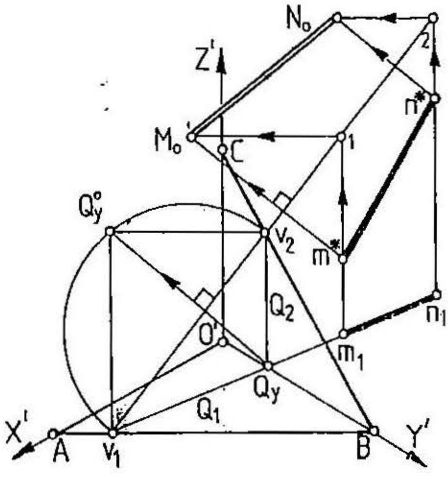


fig. 3.2.22

Determinarea perpendicularei pe o dreaptă cuprinsă într-unul din planele reperului. Fie dreapta (D) în planul XY (fig. 3.2.26). Se duce din originea O' o perpendiculară pe (D). Se rabate planul XY pe planul axonometric, construind semicercul pe AB (fig. 3.2.27). Prin afinitate se construiește rabaterea dreptei (D) și se duce din O° o perpendiculară pe ea. Se întoarce din rabatere această perpendiculară și se obține perpendiculara pe dreapta (D). Acum se dispune de toate elementele necesare pentru a rezolva problema din figura 3.1.16. Se rabate triunghiul MPQ în MPQ_0 și triunghiul MPN în MPN_0 (fig. 3.2.28). Segmentul 12 se rabate în

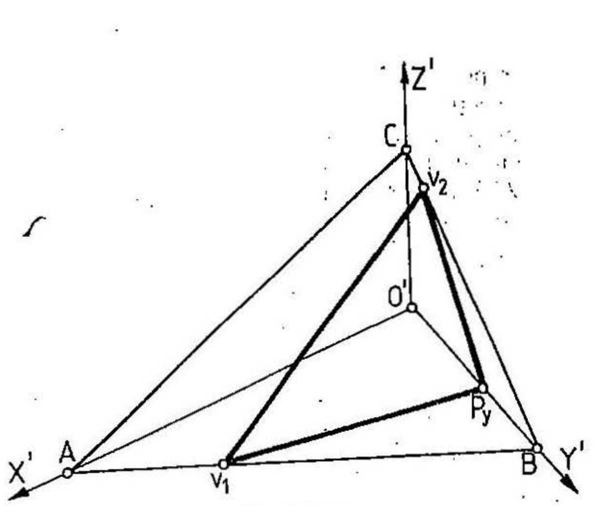


fig. 3.2.23

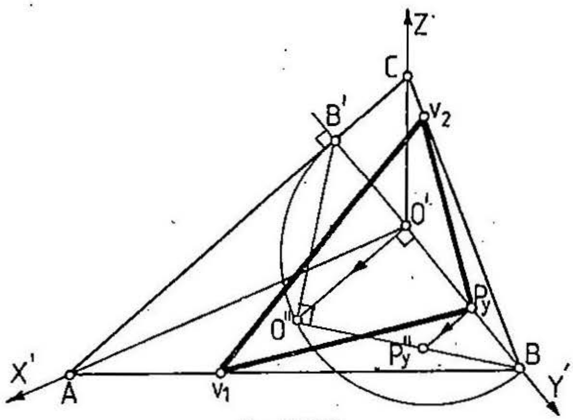


fig. 3.2.24

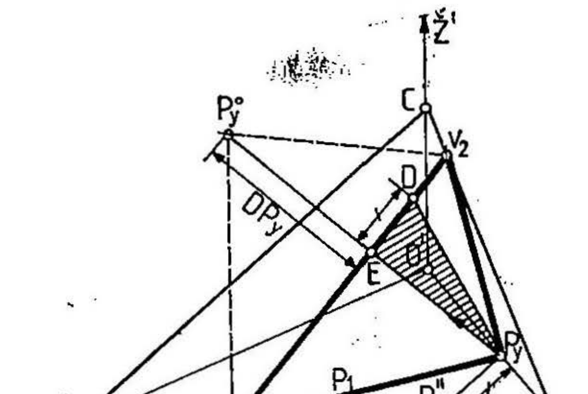


fig 3.2.25

$1_0 2_0$, iar punctul A se rabate în A_0. Practic se obține proiecția orizontală a feței superioare a cubului suprapusă peste imaginea axonometrică. Se construiește o perpendiculară în A_0 pe $1_0 2_0$ (fig. 3.2.29) și se măsoară pe ea și pe $A_0 1_0$ segmente egale cu latura pătratului (de exemplu, $\overline{MQ_0}$).

Se obțin vîrfurile B_0 și D_0 care se aduc în axonometrie în B și D.

Prin paralelism se obține al patrulea vîrf C al feței inferioare a cubului superior (fig. 3.2.30). Se construiește cubul în întregime, știind că înălțimea sa este identică cu înălțimea primului cub.

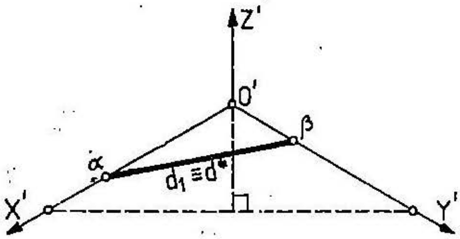


fig. 3.2.26

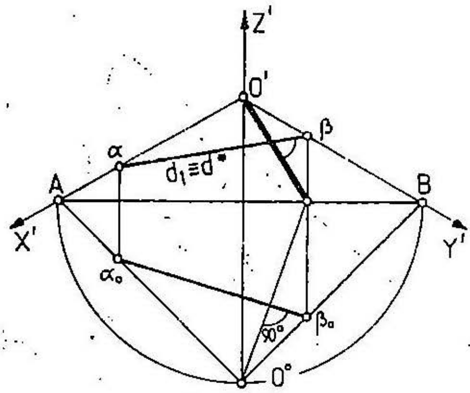


fig. 3.2.27

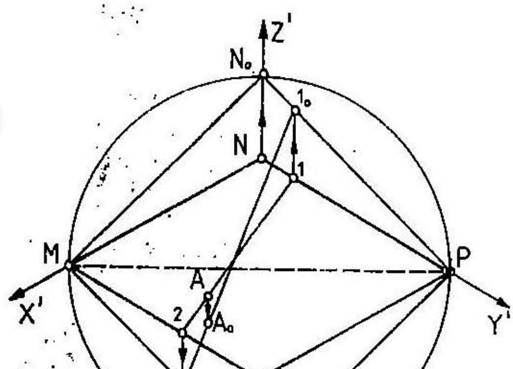


fig. 3.2.28

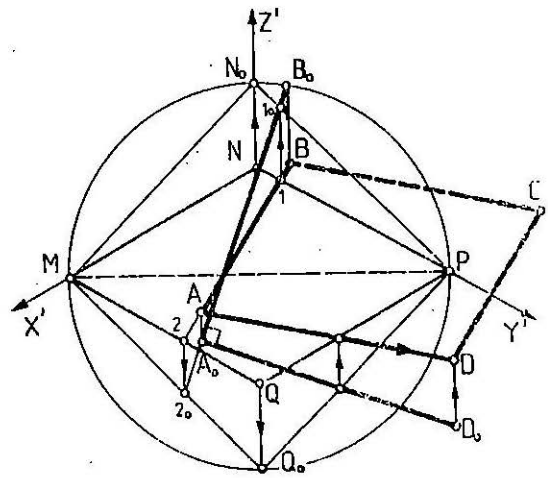


fig. 3.2.29

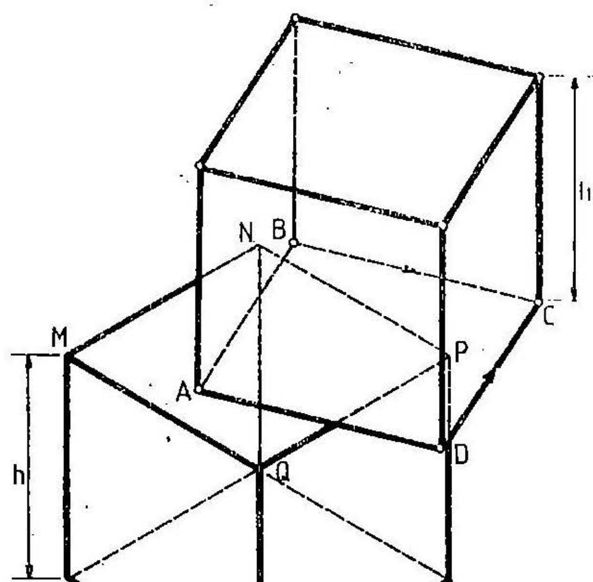


fig. 3.2.30

3.3. TIPURILE DE REPREZENTĂRI AXONOMETRICE ORTOGONALE

AXONOMETRIA IZOMETRICĂ

Relația caracteristică a axonometriei izometrice este:

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

Triunghiul axonometric este *echilateral*, iar axele imagine (axonometrice) fac între ele unghiuri de 120° (fig. 3.3.1). Cele trei axe-imagine au aceeași scară comună (fig. 3.3.2). Coeficientul de reducere pentru fiecare din cele trei direcții este de aproximativ 0,82. Invers, reprezentarea axonometrică izometrică a unui obiect apare mai mare față de dimensiunile sale reale de 1,224 ori. Deci, un cub se construiește luînd muchia cubului redusă la 0,82 și așezînd-o pe cele trei axe-imagine (fig. 3.3.3). În figura 3.3.4 este reprezentat un cub cu cercuri înscrise pe fețele sale, cercuri care în axonometria izometrică apar elipse egale.

Axonometria izometrică este cea mai simplă de construit (întrucît se păstrează aceeași unitate pe toate cele trei axe), dar imaginea obținută prin această axonometrie ascunde o parte din relațiile dintre elementele spațiale, datorită unor coincidențe supărătoare. În cazul cubului, de exemplu, *trei* dintre planele diagonale ale acestuia apar în axonometria izometrică sub forma unor segmente de dreaptă.

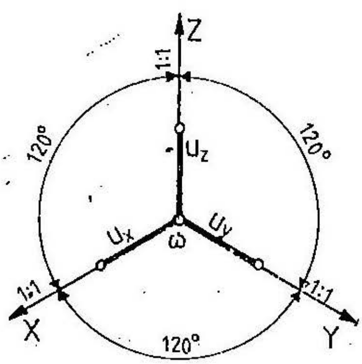


fig. 3.3.1

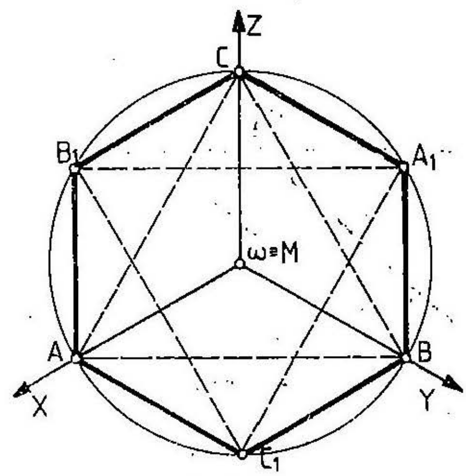


fig. 3.3.3

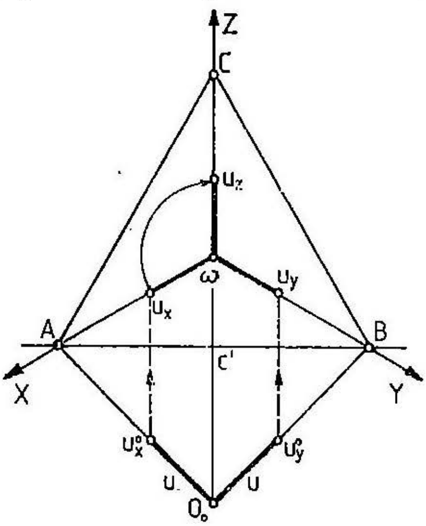


fig. 3.3.2

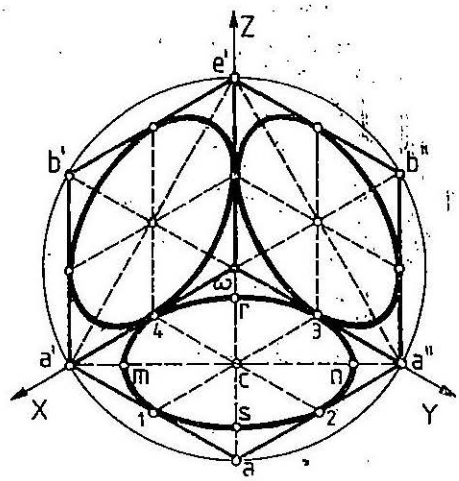


fig. 3.3.4

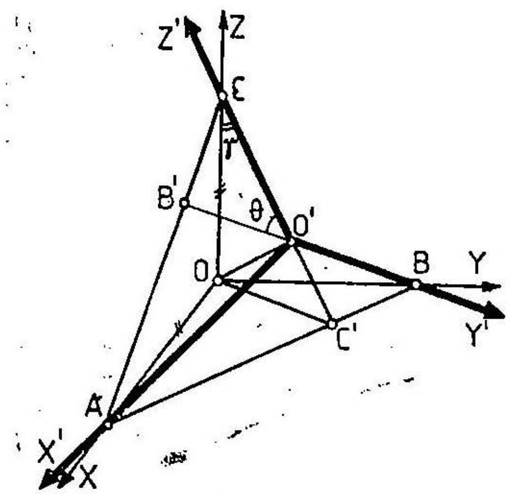


fig. 3.3.5

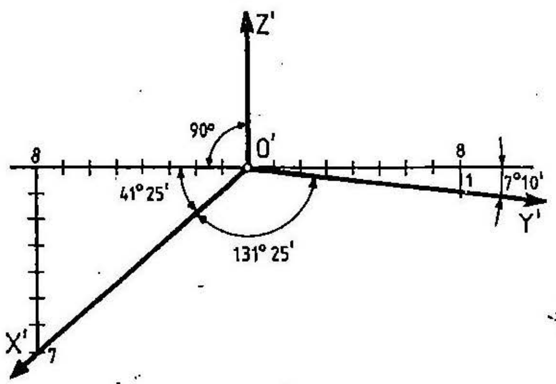


fig. 3.3.6

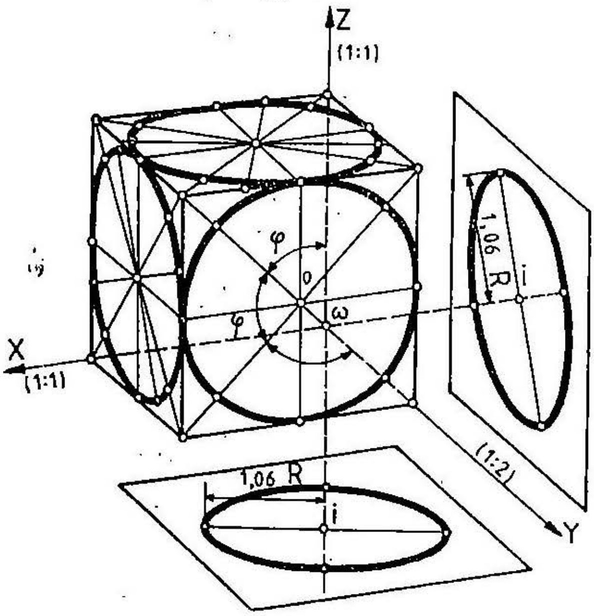


fig. 3.3.7

AXONOMETRIA DIMETRICĂ

Relația caracteristică a axonometriei dimetrice este:

$$\alpha = \beta \neq \gamma$$

Triunghiul axonometric este *isoscel*, iar două din unghiurile pe care le fac axele-imagine între ele sînt egale (fig. 3.3.5). Două axe-imagine au aceeași scară.

Construcția axelor în axonometria dimetrică. Din relația fundamentală a axonometriei ortogonale se pot deduce unghiurile dintre axele-imagine în axonometria dimetrică (fig. 3.3.6). Construcția practică se face utilizînd diviziuni egale pe axe perpendiculare (ca în figură), astfel rezultă direct unghiurile căutate. Se iau spre dreapta 8 diviziuni egale pe orizontală și una pe verticală, iar spre stînga 8 diviziuni egale pe orizontală și 7 diviziuni pe verticală.

Construcția unui cub în axonometrie dimetrică este ilustrată în figura 3.3.7. Două din muchiile cubului au dimensiuni egale, în timp ce a treia muchie apare de lungime jumătate. Pe fețele cubului au fost înscrise elipse, reprezentînd cercurile înscrise în pătrate.

AXONOMETRIA ANIZOMETRICĂ

Relația caracteristică a axonometriei anizometrice este:

$$\alpha \neq \beta \neq \gamma$$

Triunghiul axonometric este *scalen*, fiecare axă are altă scară, iar ortocentrul O' ocupă o poziție oarecare în interiorul triunghiului ABC. Se poate obține o bună reprezentare anizometrică dacă se aleg între axele-imagine unghiurile de 105°, 120° și 135° (fig. 3.3.8). Acestor valori le corespund unitățile imagine u_x, u_y și u_z reduse aproximativ în rapoartele 8: 10, 6: 10 respectiv 9: 10.

Se pot obține și grafic unitățile-imagine, considerînd sistemul de axe dat și unitatea reală u din spațiu. Se rabate (fig. 3.3.9) în O_0' și O_0'' pe planul axonometric originea comună a muchiilor triedrului de referință și se așază pe rabaterea muchiilor unitatea reală u, pînă în punctele u_x^0, u_y^0 și u_z^0. Revenind din rabatere, se obțin pe axe unitățile căutate (fig. 3.3.9). Un alt exemplu, pentru alte condiții ale triunghiului axonometric, este dat în figura 3.3.10.

Construcția unui cub în axonometrie anizometrică se obține luînd muchiile reduse conform celor de mai sus. Fiecare muchie apare de altă dimensiune.

În figura 3.3.11, pe fețele cubului au fost înscrise cercuri, care apar în axonometrie elipse.

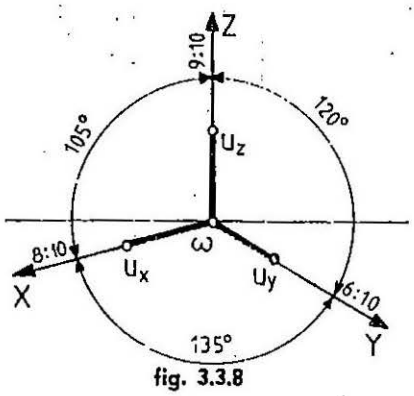


fig. 3.3.8

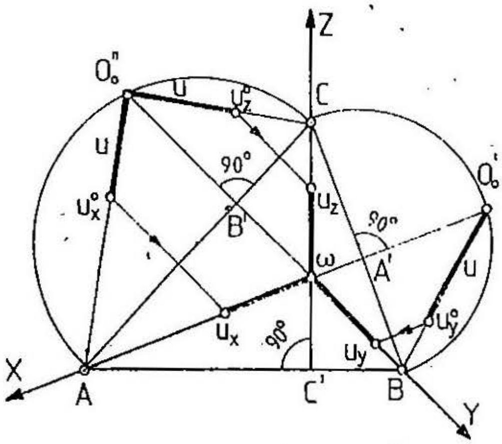


fig. 3.3.9

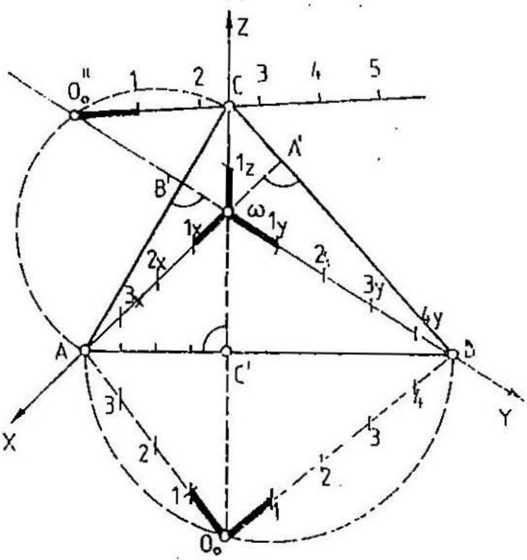


fig. 3.3.10

În figurile 3.3.12 și 3.3.13 sînt ilustrate două rastere sau grătare axonometrice, care pot fi folosite pentru construcția directă a unor volume în axonometrie izometrică (fig. 3.3.12) sau în axonometrie anizometrică (fig. 3.3.13).

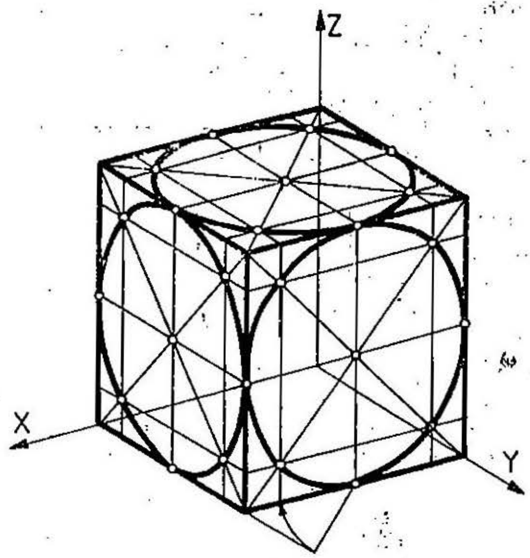


fig. 3.3.11

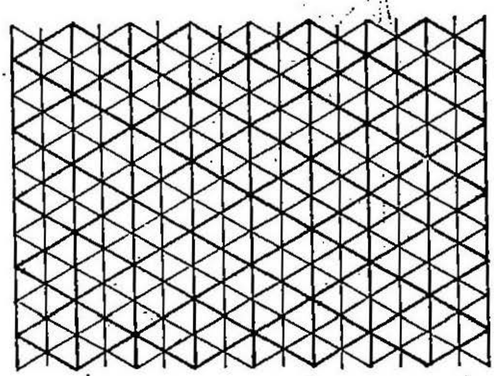


fig. 3.3.12

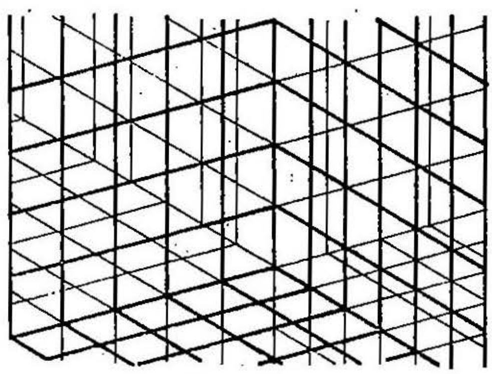


fig. 3.3.13

3.4. REPREZENTĂRI AXONOMETRICE OBLICE

În axonometria oblică, direcţia proiectantelor nu mai este ortogonală, ci *oarecare*. Axele-imagine şi unităţile-imagine pot fi alese arbitrar pe planul axonometric, deoarece, conform *teoremei lui Pohlke*, trei segmente oarecare situate pe planul axonometric, pornind din acelaşi punct comun de intersecţie, pot fi întotdeauna considerate ca proiecţii paralele a trei segmente egale purtate pe cele trei muchii ale unui triedru tridreptunghic.

Teorema lui Pohlke are consecinţe foarte interesante pentru axonometria oblică. Să presupunem că vrem să reprezentăm în axonometrie un cub, în aşa fel încît una din feţele sale să apară un pătrat perfect. În *axonometria ortogonală* acest lucru nu este posibil decît dacă faţa respectivă a cubului este paralelă cu planul axonometric, iar direcţia de proiecţie este perpendiculară pe faţa cubului (fig. 3.4.1). Rezultă că direcţia de axonometrie este paralelă cu patru muchii ale cubului, iar imaginea care se obţine în axonometrie este aceea din figura 3.4.2 (identică cu o vedere ortogonală a cubului aşezat pe planul orizontal de proiecţie).

În *axonometria oblică*, condiţia suficientă ca una din feţele cubului să apară un pătrat perfect este ca faţa respectivă să fie paralelă cu planul axonometric ABC. Direcţia axonometrică de proiecţie (Δ) este oblică faţă de planul axonometric (fig. 3.4.3), iar imaginea axonometrică ce se obţine este cea din figura 3.4.4. Cu cît direcţia axonometrică de proiecţie (Δ) face un unghi mai mic cu planul axonometric ABC (fig. 3.4.5), cu atît imaginea axonometrică oblică obţinută este mai „deformată", adică mai depărtată de percepţia vizuală umană (fig. 3.4.6). Imaginile axonometrice obţinute prin proiecţie pe planul axonometric ABC sub un unghi mic se aseamănă, de exemplu, cu umbrele lăsate pe pămînt de obiecte sau personaje în lumina soarelui la asfinţit.

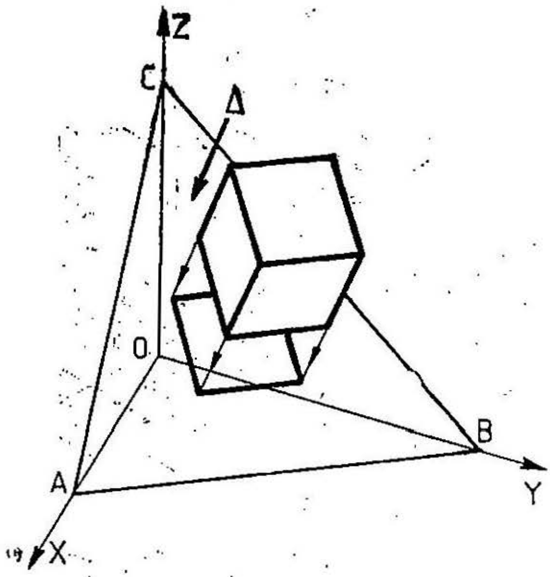


fig. 3.4.1

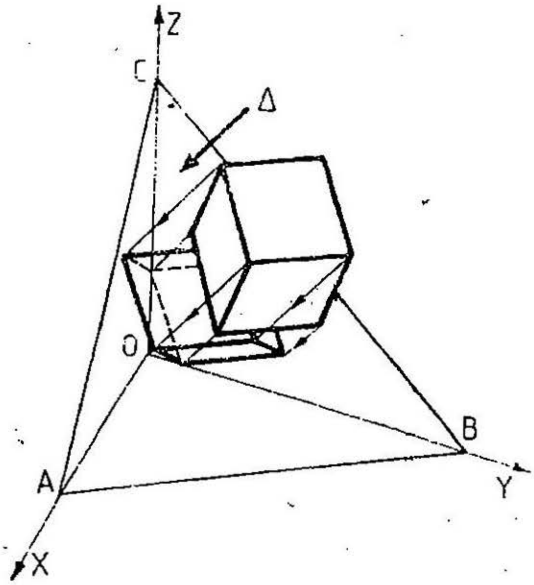


fig. 3.4.3

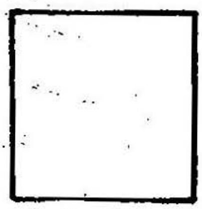


fig 3.4.2

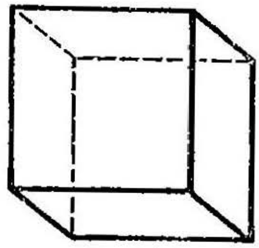


fig. 3.4.4

AXONOMETRIA OBLICĂ ANIZOMETRICĂ

Axele-imagine sînt alese arbitrar și unitățile-imagine sînt toate diferite: $u_x \neq u_y \neq u_z$ (fig. 3.4.7).

AXONOMETRIA OBLICĂ DIMETRICĂ OARECARE

Pe axele-imagine arbitrare se aleg două unități-imagine egale. Vor fi trei situații posibile (fig. 3.4.8):

$$u_x = u_y;\ u_x = u_z;\ u_y = u_z.$$

Cazurile particulare ale acestui tip de axonometrie oblică sînt axonometria oblică dimetrică orizontală și axonometria oblică dimetrică frontală.

Axonometria oblică dimetrică orizontală. Axele ωX și ωY sînt perpendiculare, axa ωZ se alege de obicei verticală, iar unitățile-imagine sînt $u_x = u_y \neq u_z$ (fig. 3.4.9). Pentru obținerea unei asemenea axonometrii se folosește direct *planul construcției*, care rămîne nedeformat (fig. 3.4.10). Se recomandă ca pe axa ωZ să se aleagă o unitate-imagine u_z mai mică decît celelalte.

Acest tip de axonometrie oblică se numește și *cavalieră* și are o largă utilizare în arhitectură. Figura 3.4.11 reprezintă o axonometrie cavalieră a unei locuințe după îndepărtarea acoperișului. Axonometria permite redarea spațiului interior și a elementelor de mobilier. În figurile 3.4.12 și 3.4.13 s-a studiat trecerea de la o perspectivă axonometrică *cavalieră* la una *oarecare* (*Tănăsescu*, 1975). Cea de-a doua axonometrie se poate obține

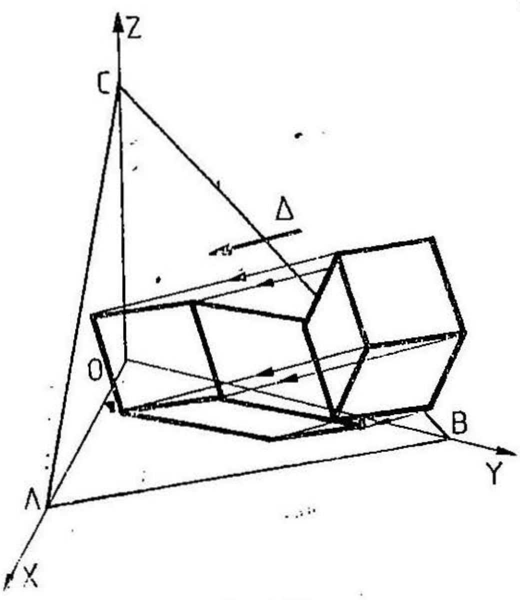


fig. 3.4.5

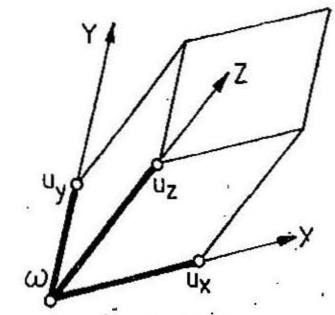


fig. 3.4.7

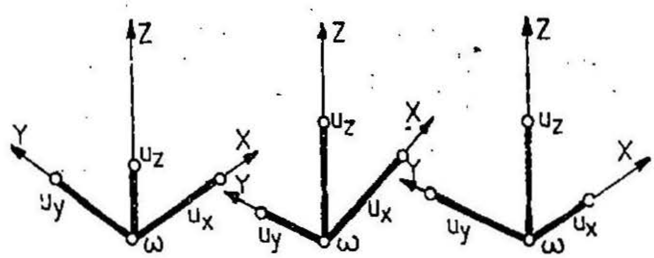


fig. 3.4.8

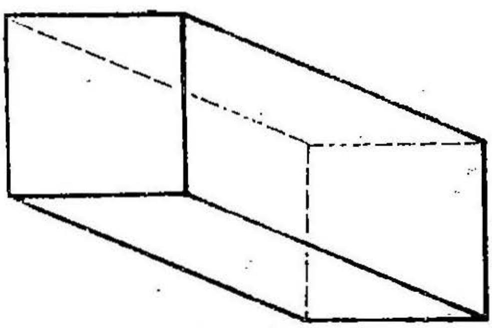


fig. 3.4.6

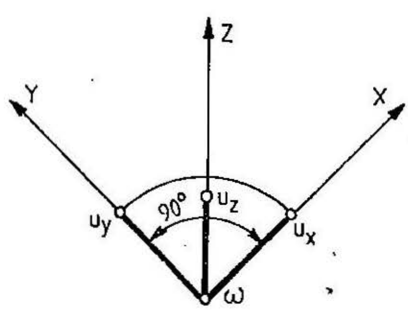


fig. 3.4.9

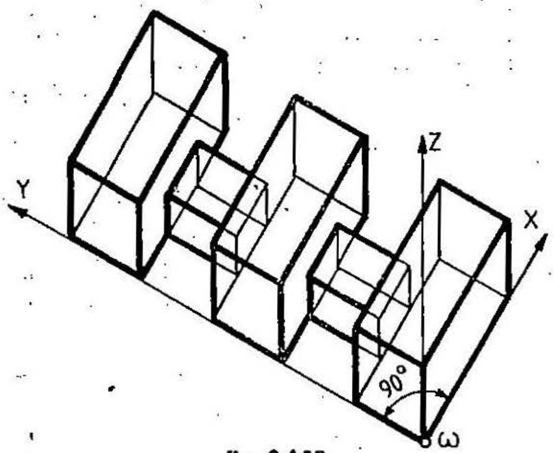


fig. 3.4.10

din prima prin coborîrea planului construcției cu ajutorul unor linii de ordine, alegerea unei unități-imagine u_z diferite și schimbarea unghiurilor dintre axe.

Axonometria oblică dimetrică frontală. Și această reprezentare poartă numele de *perspectivă cavalieră*. În acest caz, tabloul de perspectivă este una din fețele verticale ale triedrului tridreptunghic de referință. Axele imagine ωY și ωZ sînt perpendiculare, iar unitățile-imagine $u_y = u_z$ sînt diferite de u_x (fig. 3.4.14). În arhitectură, pentru construcția unei astfel de axonometrii se folosește direct *fațada* construcției. În figura 3.4.15 este reprezentată o construcție în perspectivă cavalieră frontală.

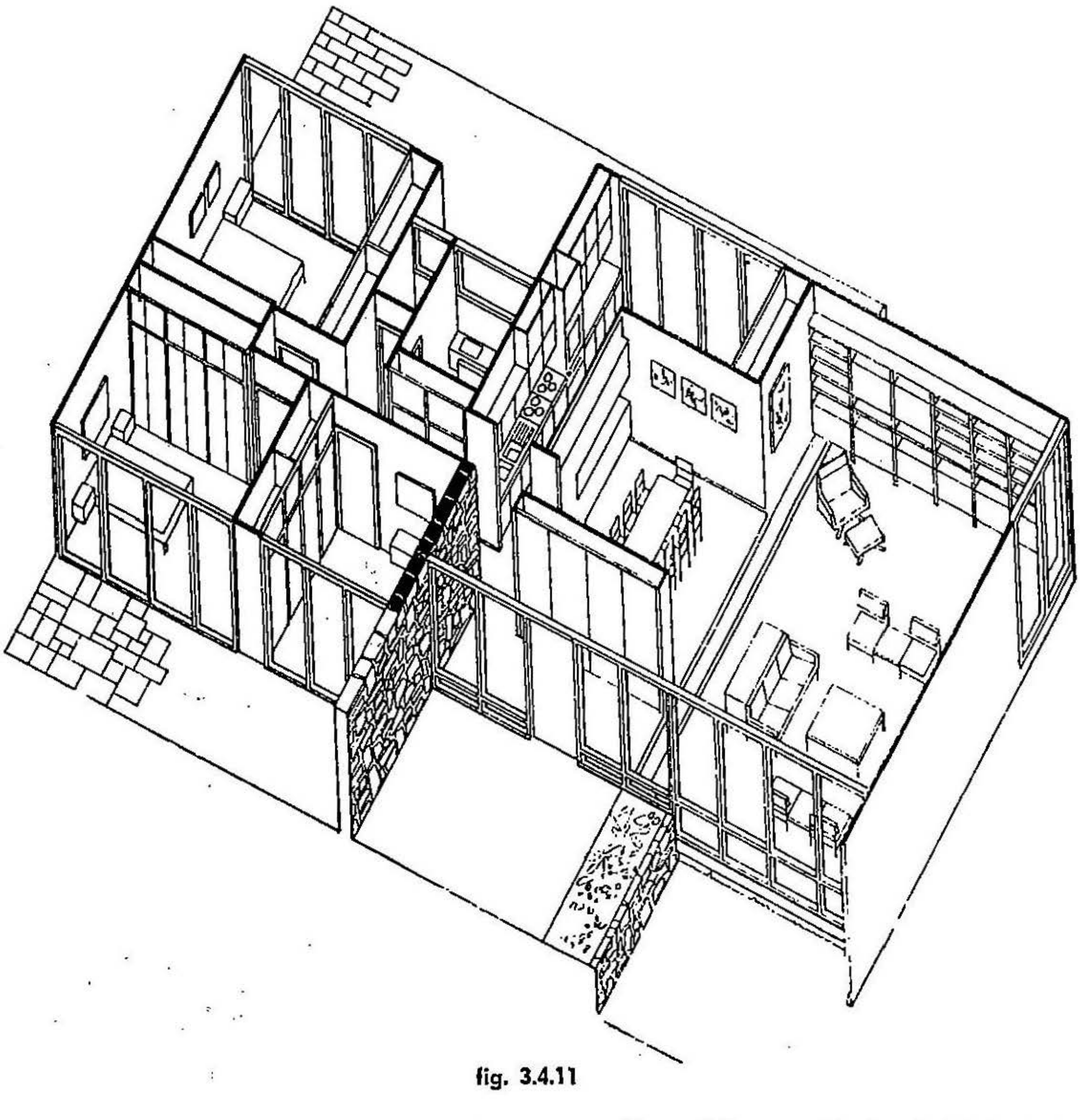


fig. 3.4.11

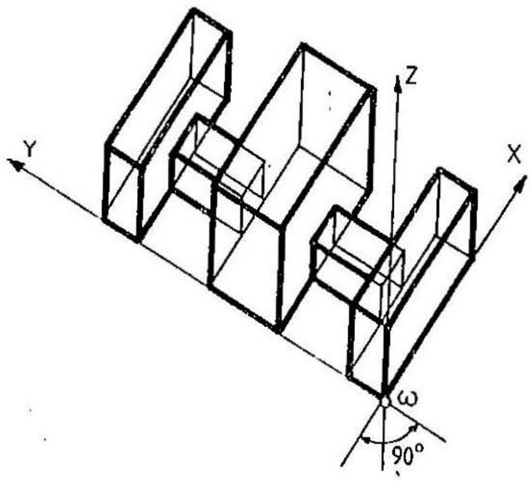


fig. 3.4.12

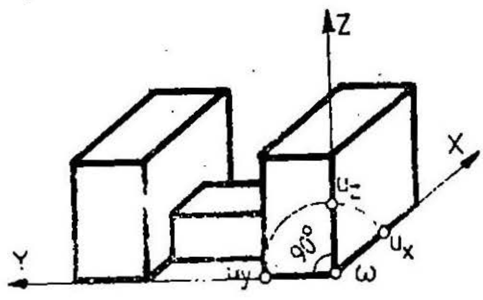


fig. 3.4.15

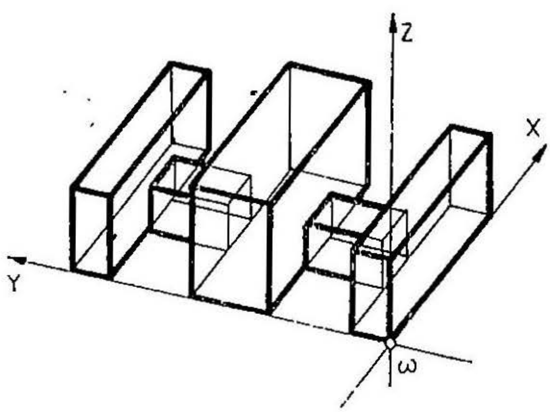


fig. 3.4.13

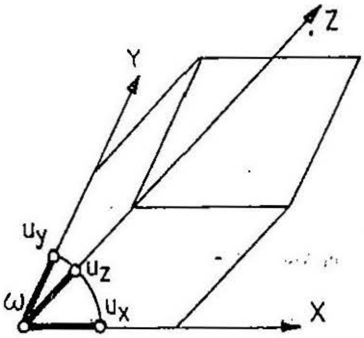


fig. 3.4.16

AXONOMETRIA OBLICĂ IZOMETRICĂ OARECARE

Axele-imagine sînt alese arbitrar, dar unitățile-imagine sînt egale $u_x = u_y = u_z$ (fig. 3.4.16).

Cazurile particulare ale acestui tip de reprezentare sînt: *axonometria oblică izometrică orizontală*, la care axele ωX și ωY sînt perpendiculare, iar axa ωZ este verticală (fig. 3.4.17) și *axonometria oblică izometrică frontală*, la care axele ωY și ωZ sînt perpendiculare, iar axa ωX este aleasă arbitrar (fig. 3.4.18).

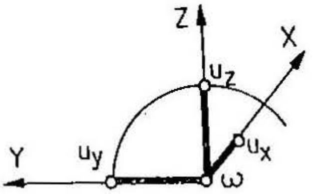


fig. 3.4.14

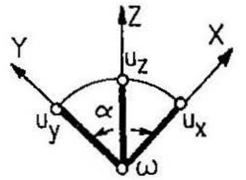


fig. 3.4.17

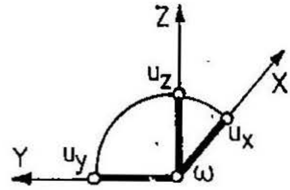


fig. 3.4.18

4.

CERCUL ȘI SFERA

4.1. CERCUL

CERCUL ÎN PLAN DE NIVEL

Centrul cercului este ww', iar raza sa este $\overline{aw}$ (fig. 4.1.1). Proiecția orizontală a cercului este în adevărată mărime, în timp ce proiecția verticală este un segment de dreaptă $\overline{a'b'}$, unde A și B sînt punctele din extrema stîngă și extrema dreaptă ale cercului. Un punct oarecare dat prin proiecția sa verticală (1') are drept corespondente în plan două proiecții orizontale, **1** și **2**.

CERCUL ÎN PLAN FRONTAL

Adevărata mărime a cercului apare de data aceasta în proiecția verticală (fig. 4.1.2). Proiecția orizontală este un segment de dreaptă $\overline{ab}$ egal în lungime cu diametrul cercului. Un punct oarecare dat prin proiecția sa orizontală (1) are drept corespondente două proiecții verticale, 1' și 2'.

CONSTRUCȚIA AXELOR ELIPSELOR DUPĂ CARE SE PROIECTEAZĂ UN CERC SITUAT ÎNTR-UN PLAN [P] DAT PRIN URME

Folosim rabaterea $PP_xP'_0$ a planului cercului (PP_xP') pe planul orizontal de proiecție (fig. 4.1.3). Fie ww' centrul cercului și w_0 rabaterea sa pe planul orizontal de proiecție. Axele **ab** și **ce** se obțin ridicînd din rabatere diametrul orizontal a_0b_0 al cercului și diametrul c_0e_0 perpendicular pe el (după dreapta de cea mai mare pantă a planului). Axele proiecției verticale sînt $\gamma'\varepsilon'$ și $\alpha'\beta'$. Ele se obțin ridicînd din rabatere diametrul frontal $\gamma_0\varepsilon_0$ al cercului și diametrul $\alpha_0\beta_0$ perpendicular pe el

CONSTRUCȚIA ELIPSEI PRIN OPT PUNCTE
(în axonometrie izometrică)

Punctele 1, 2, 3 și 4 sînt mijloacele laturilor pătratului reprezentat în axonometrie izometrică (fig. 4.1.4). Se construiește raportul $\sqrt{2}$ pe jumătatea diagonalei. Se obține mai întîi punctul '

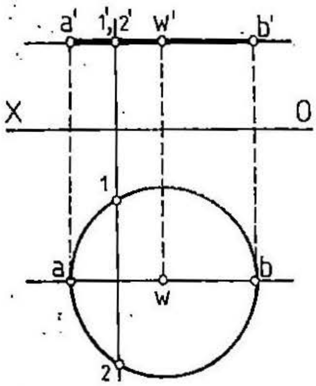


fig. 4.1.1

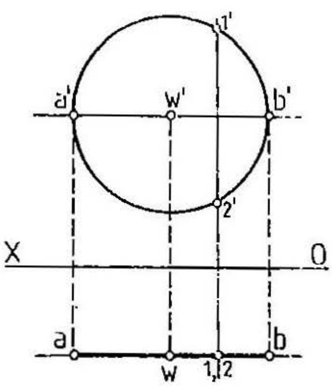


fig. 4.1.2

pe diagonala AB, prin rabaterea lui M pe diagonală. Punctele 6, 7 şi 8 se obţin prin paralele duse la laturile pătratului. Raportul $\sqrt{2}$ se poate construi şi pe jumătatea laturii CB, obţinîndu-se punctul 6, prin rabaterea lui N şi deplasarea paralelă cu latura AC.

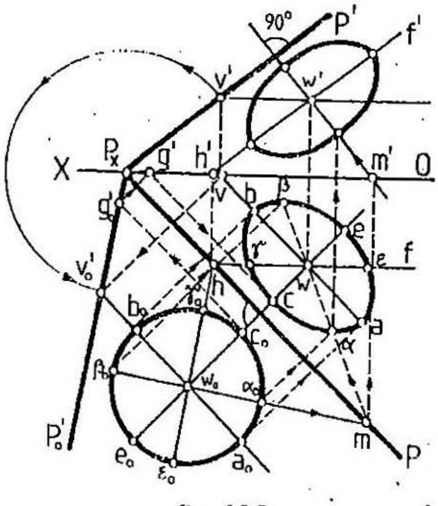


fig. 4.1.3

4.2. SFERA

Sfera este locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de un punct fix numit *centrul sferei* (fig. 4.2.1). Pentru rezolvarea problemelor cu sfere este necesară evidenţierea pe sferă a unor linii caracteristice, şi anume: *cercurile mari* ale sferei (ecuatorul, meridianele etc.), cercuri mai mici (paralelii ş.a.). *Contururile aparente* ale sferei în proiecţiile orizontală şi verticală sînt cercuri mari ale sferei.

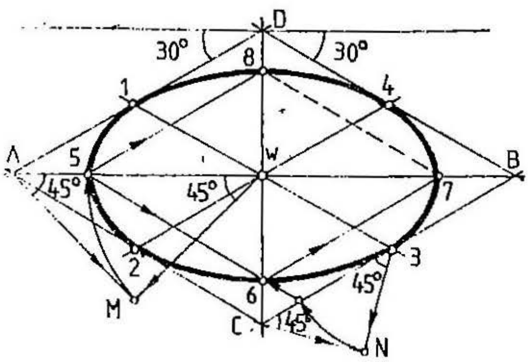


fig. 4.1.4

✓ PUNCTE PE SFERĂ

În figura 4.2.2 sînt determinate o serie de *puncte aşezate pe suprafaţa sferei*, folosindu-se liniile caracteristice ale acesteia. Astfel, punctele A(a, a') şi B(b, b') se află situate pe ecuator. Pentru a obţine proiecţiile verticale ale punctelor D_1 şi D_2, a căror proiecţie orizontală este d, se secţionează sfera cu un plan frontal; acesta determină în proiecţie verticală un cerc, identificat cu ajutorul punctului C(c, c') aflat pe ecuatorul sferei. În mod similar, dacă se dă proiecţia verticală f' a punctelor

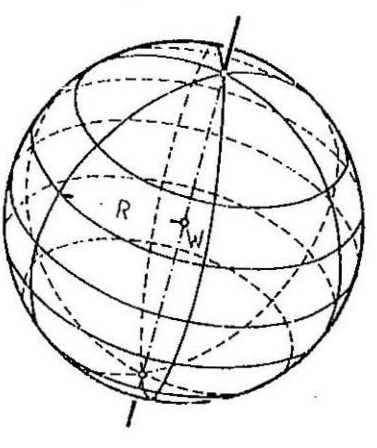


fig. 4.2.1

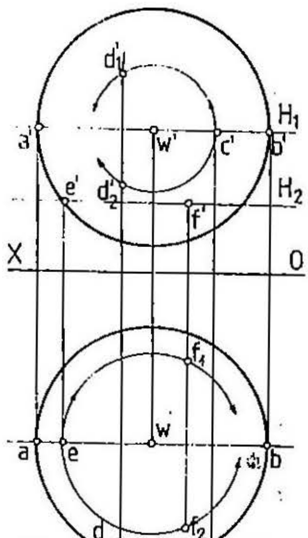


fig. 4.2.2

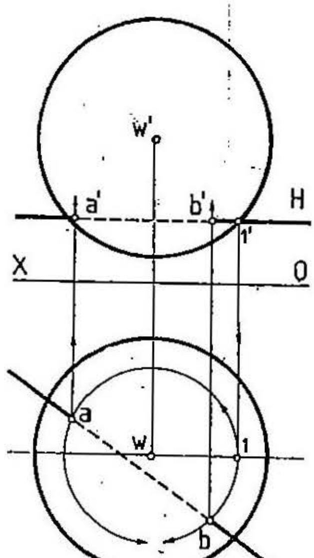


fig. 4.2.3

F_1 și F_2, cele două proiecții orizontale f_1 și f_2 se determină secționînd sfera cu un plan de nivel care trece prin f'. Cu ajutorul punctului E(e, e') situat pe conturul aparent vertical al sferei, se obține în proiecție orizontală cercul care determină pe f_1 și f_2.

INTERSECȚIA UNEI SFERE CU O DREAPTĂ

În figura 4.2.3 s-a efectuat o secționare a sferei cu un plan de nivel (determinîndu-se astfel un paralel al sferei), pentru a se găsi punctele de *intersecție a sferei cu o dreaptă orizontală.*

Intersecția unei sfere cu o dreaptă oarecare. Pentru intersecția sferei cu o dreaptă oarecare a fost efectuată o schimbare de plan vertical de proiecție, în așa fel încît dreapta să devină o dreaptă frontală (fig. 4.2.4). Ducîndu-se o secțiune după un plan frontal, se determină un cerc frontal pe sferă și se obțin punctele de intersecție a sferei cu dreapta în noua proiecție verticală. Prin revenirea din schimbarea de plan, se obțin aceste puncte în cele două proiecții — orizontală și verticală. Cele două puncte de intersecție sînt **aa'** și **bb'**.

Intersecția unei sfere cu o dreaptă oarecare (altă metodă). În figura 4.2.5 se dau sfera de centru ww' și dreapta oarecare D(d, d'). Se duce prin dreapta (D) un plan de capăt care secționează sfera după un cerc. Se rabate acest cerc în jurul diametrului său frontal **1'2'**, pînă cînd este conținut în planul frontal al diametrului respectiv (și, prin urmare, va apărea în proiecția verticală ca un cerc perfect). Odată cu cercul se rabate și dreapta (D), obținînd proiecția verticală rabătută (d_1'). La intersecția cu cercul rabătut se obțin punctele de intersecție rabătute a_1' și b_1'. Prin întoarcerea din rabatere, se obțin punctele de intersecție dintre dreapta oarecare (D) și sferă în cele două proiecții ortogonale.

CONSTRUCȚIA UNEI FRONTALE TANGENTE ÎNTR-UN PUNCT LA SFERĂ

În figura 4.2.6 se dau sfera de centru ww' și punctul A(a, a'). Se duce prin punctul A un plan frontal care secționează sfera după un cerc. Tangenta în punctul A la acest cerc este frontala căutată.

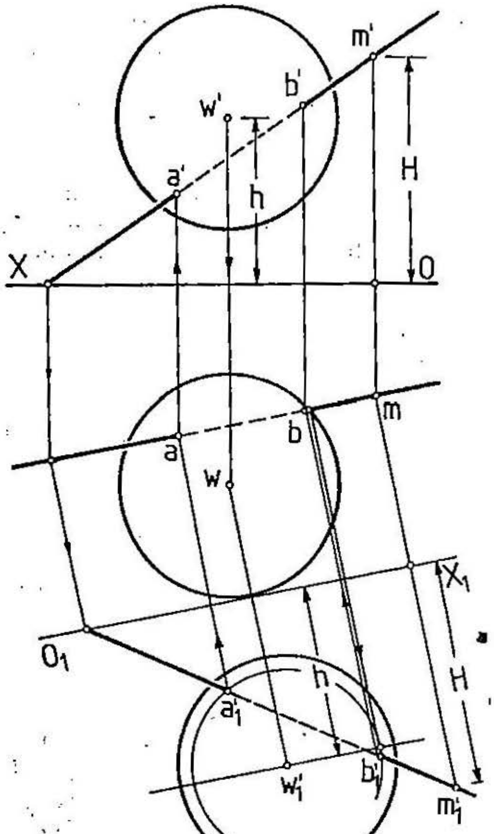


fig. 4.2.4

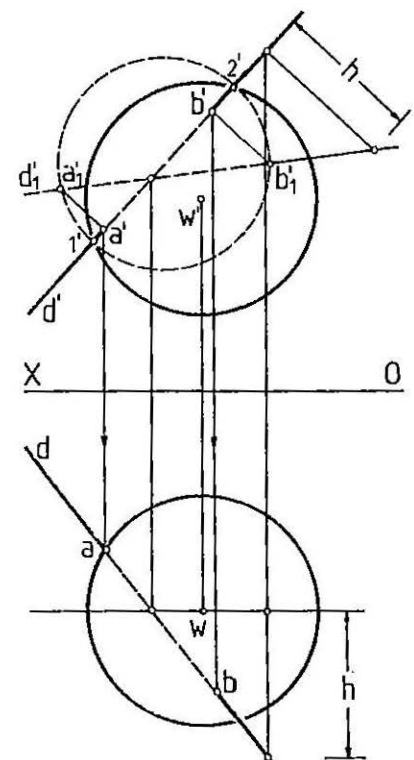


fig. 4.2.5

PLAN TANGENT SFEREI ÎNTR-UN PUNCT DE SUPRAFAȚĂ

Se construiește planul tangent la sferă în punctul M(m, m') (fig. 4.2.7). Planul tangent căutat este perpendicular pe raza (wm, w'm'). Orizontala (mv, m'v') aparține planului de tangență căutat, deoarece proiecția ei orizontală mv este perpendiculară pe proiecția orizontală wm a razei sferei în punctul M. Urma verticală a planului tangent va trece prin v' și va fi perpendiculară pe w'm'.

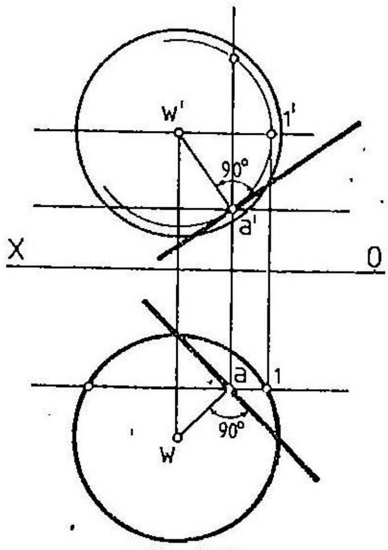


fig. 4.2.6

PLANUL TANGENT PARALEL CU UN PLAN DAT PRIN URME

Ne propunem să ducem planele tangente la sfera din figura 4.2.8 paralele cu planul [P] dat prin urme. Prin centrul sferei se duce dreapta D(d, d') perpendiculară pe planul [P]. Această dreaptă intersectează sfera în punctele (α, α') și (β, β'). Planele tangente la sferă în aceste puncte sînt planele TT' și T_1T_1' căutate. Urma orizontală T_1 iese din figură.

SECȚIUNE PRINTR-UN PLAN PROIECTANT ÎN SFERĂ

În figura 4.2.9 au fost determinate proiecțiile curbei de intersecție dintre o sferă și un plan de capăt, tangenta într-un punct curent M(m, m') al curbei de secțiune și axele secțiunii. Proiecția orizontală a cercului este o elipsă construită analog celor din figura 4.1.3. Tangenta în punctul M este dreapta de intersecție dintre planul tangent la sferă în acel punct și planul secant.

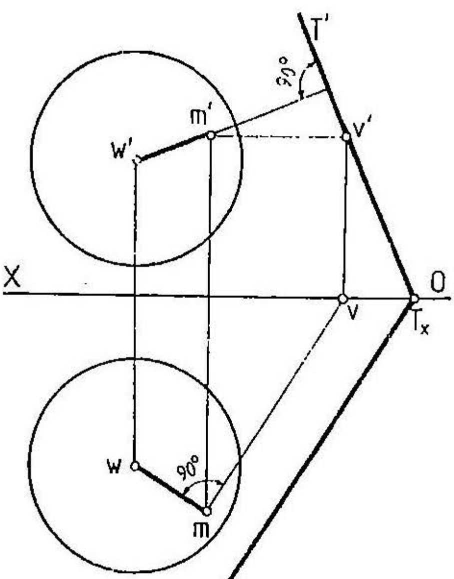


fig. 4.2.7

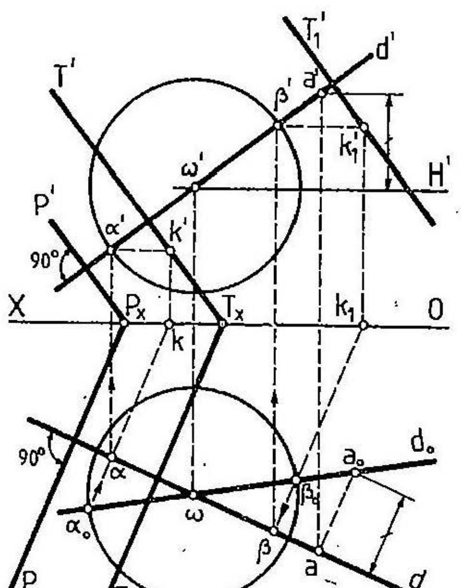


fig. 4.2.8

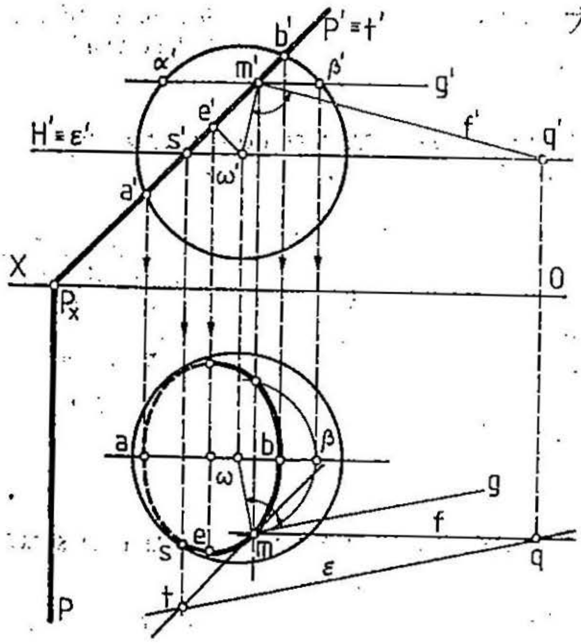


fig. 4.2.9

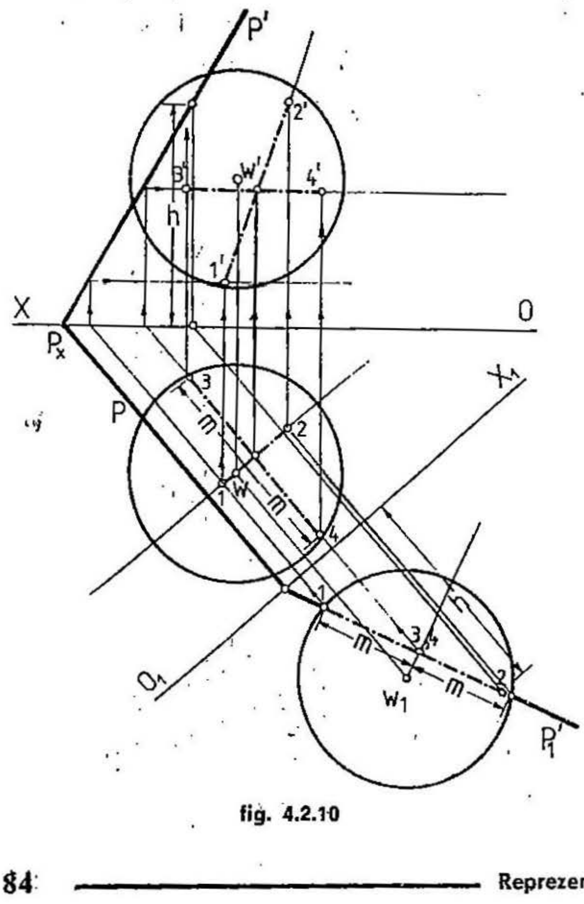


fig. 4.2.10

SECȚIONAREA UNEI SFERE CU UN PLAN OARECARE

În figura 4.2.10 se dau sfera de centru (w, w') și planul oarecare dat prin urme PP_xP'. Pentru obținerea curbei de secțiune a sferei cu acest plan, se efectuează o schimbare de plan vertical de proiecție, luîndu-se noua linie de pămînt O_1X_1 în așa fel încît planul [P] să devină plan de capăt. Se aplică construcția din figura precedentă și se obțin două axe (diametre perpendiculare) ale cercului de secțiune. Prin întoarcerea din schimbarea de plan vertical de proiecție se obțin cele două diametre perpendiculare ale cercului de secțiune în cele două proiecții ortogonale. Pentru mai multă precizie în trasarea elipselor, se poate folosi o construcție a lor prin opt puncte, luîndu-se încă două diametre perpendiculare (construcție neilustrată aici).

APLICAȚII (*Tănăsescu*, 1975)

Sferă tangentă unor conuri. Se dau trei conuri circulare drepte cu bazele situate în planul orizontal de proiecție (fig. 4.2.11). Se cere să se așeze o sferă de rază dată în așa fel încît să fie tangentă simultan celor trei conuri.

Se așază cele trei conuri în plan astfel încît verticala pe care se va situa centrul sferei căutate să fie în același plan frontal cu centrul unuia din conuri. În acest fel, conturul aparent al sferei în proiecție verticală va fi tangent la generatoarea de contur a conului. Construcția se obține simplu, ducînd o paralelă la această generatoare la distanță egală cu raza sferei date. Au fost figurate și sferele de rază maximă și minimă care îndeplinesc această condiție.

Sfere tangente exterior. Să se așeze pe trei sfere egale de rază dată, situate pe planul orizontal de proiecție și tangente între ele două cîte două o a patra sferă de rază dublă (fig. 4.2.12).

Centrul sferei căutate se proiectează orizontal în centrul de greutate al triunghiului alcătuit de centrele celor trei sfere egale. Se alege poziția acestora în plan în așa fel încît verticala pe care se va afla centrul sferei căutate să fie cuprinsă în același plan frontal cu centrul uneia din cele trei sfere egale. În acest fel, contururile aparente verticale ale celor două sfere vor fi tangente (fig. 4.2.12); s-a obținut acest lucru printr-o schimbare de plan vertical de proiecție. Se obține astfel *cota* centrului sferei căutate și se trasează această sferă.

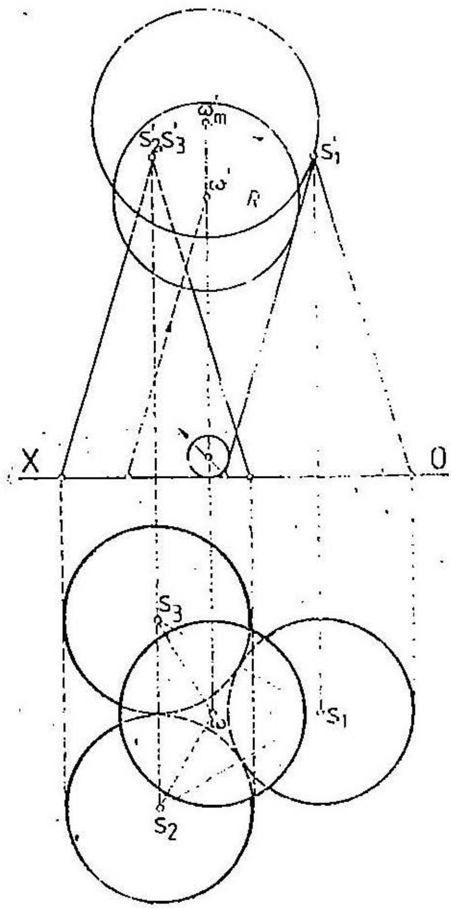


fig. 4.2.11

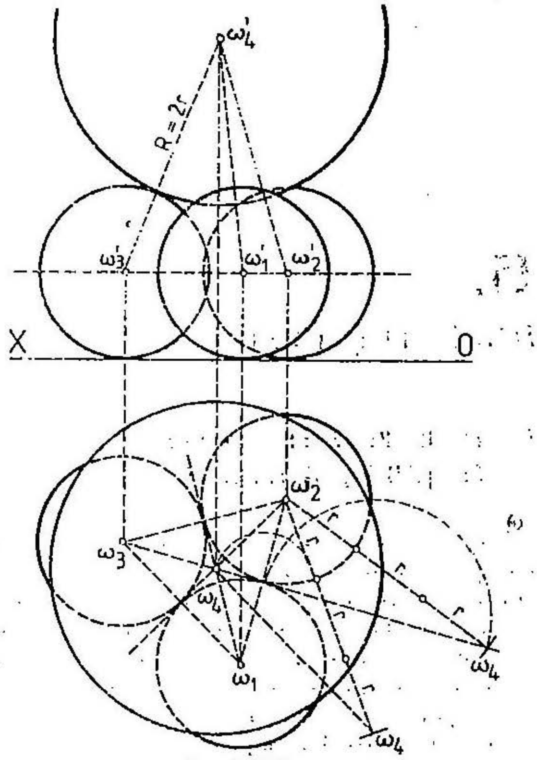


fig. 4.2.12

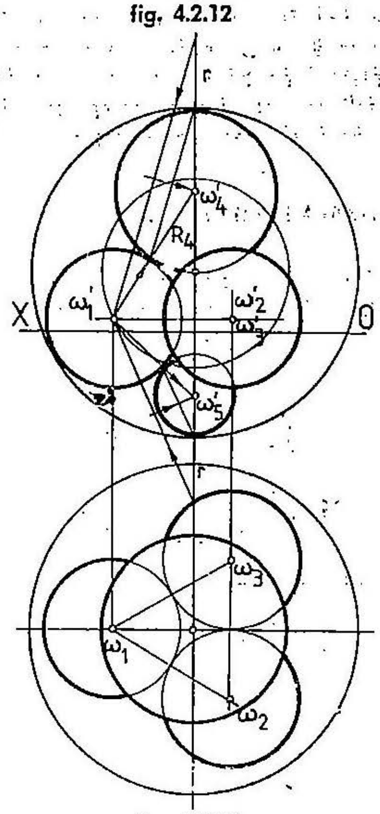


fig. 4.2.13

...re tangente interior. Se consideră o sferă transparentă de grosime neglijabilă, de rază dată, așezată pe planul orizontal de proiecție (fig. 4.2.13). În această sferă se vor așeza trei sfere egale, de rază dată, tangente între ele două cîte două și tangente interior sferei date. Să se determine sferele tangente interior sferei mari și, simultan, tangente exterior celor trei sfere mici.

Rezolvarea este asemănătoare celor două rezolvări precedente. Prin obținerea unor contururi aparente verticale ale sferelor, se transformă practic problema de geometrie în spațiu în problemă de geometrie plană. Se cere rezolvată deci o problemă de tangență interioară și exterioară între cercuri de raze diferite sau chiar necunoscute. Figura 4.2.13 cuprinde rezolvarea. Identificați operațiile efectuate.

5.

FORME POLIEDRALE

5.1, POLIEDRE. REPREZENTARE, SECȚIUNI ȘI INTERSECȚII

Un *poliedru* este un corp geometric mărginit de fețe plane. Fețele sale sînt poligoane cu un anumit număr de laturi. Laturile poligoanelor constituie *muchiile* poliedrului și rezultă din intersecția a două fețe alăturate ale sale. Mai multe muchii ale unui poliedru sînt concurente într-un punct numit *vîrf* al poliedrului, care este totodată punct comun pentru cel puțin trei fețe ale poliedrului.

Poliedrele pot fi *convexe* sau *concave*. Poliedrele convexe sînt acele poliedre care nu pot fi secționate de planele propriilor lor fețe. Poliedrele pot fi clasificate în *regulate* și *neregulate*. Poliedrele regulate vor fi studiate în subcapitolul 5.2.

REPREZENTAREA POLIEDRELOR

În figura 5,1.1 este reprezentată în cele două proiecții ortogonale o piramidă oarecare. *Vizibilitatea* în proiecția orizontală se studiază comparînd *cotele*

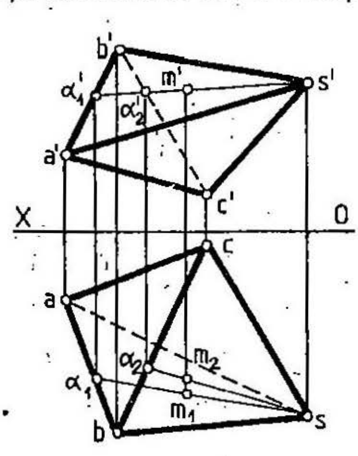


fig. 5.1.1

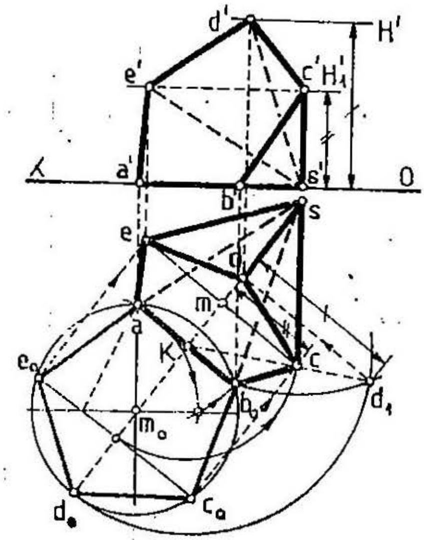


fig. 5.1.2

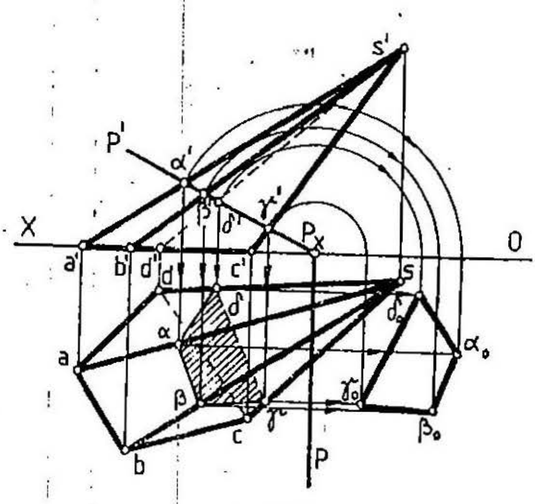


fig 5.1.3

diverselor puncte ale piramidei, iar vizibilitatea în proiecție verticală se studiază comparînd depărtările punctelor. Avînd m' proiecția verticală a unui *punct situat pe suprafața piramidei*, se pot găsi două proiecții orizontale, una pe fața ABS și una pe fața BCS a piramidei (m_1 și respectiv m_2).

Construcția proiecțiilor unei piramide pentagonale regulate. Se cere să se construiască proiecțiile unei piramide pentagonale regulate, cunoscînd fața laterală SAB cu care este așezată pe planul orizontal de proiecție. Se construiește în rabatere pe [H] pentagonul regulat înscris în cerc (fig. 5.1.2). Cota $\overline{dd_1}$ a vîrfului D(d, d') se obține considerînd punctul d_1 de intersecție a arcelor de cerc de rază $\overline{Kd_0}$ și $\overline{sb_0}$, iar cota $\overline{mc} = H_1'$ a punctelor C și E rezultă din intersecția arcului de rază $\overline{Km_0}$ cu dreapta $\overline{Kd_1}$.

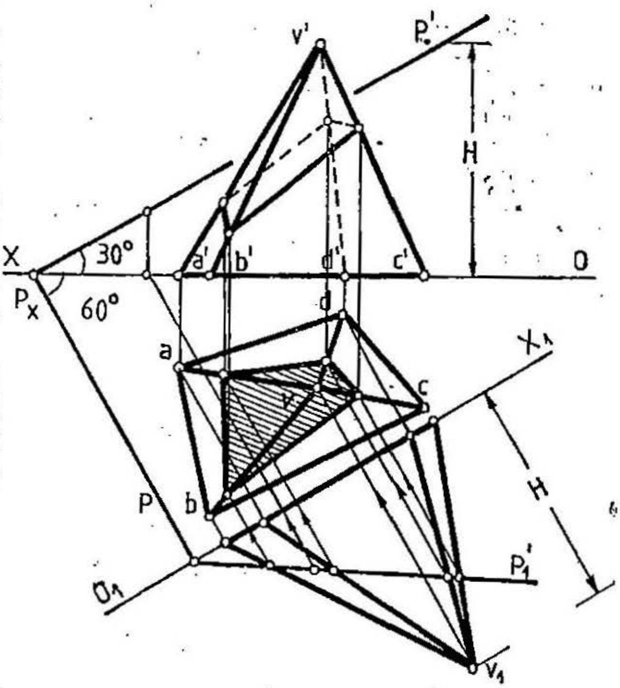


fig. 5.1.4

SECȚIUNI PLANE ÎN POLIEDRE

Secțiuni prin plane proiectante. În figura 5.1.3, secționarea piramidei după un plan de capăt se obține coborînd punctele de intersecție ale planului cu muchiile piramidei din proiecția verticală în proiecția orizontală, păstrînd corespondența muchiilor. Adevărata mărime a secțiunii (notată cu $\alpha_0\beta_0\gamma_0\delta_0$) se obține printr-o rabatere a planului de secțiune (plan de capăt) pe planul orizontal de proiecție, în jurul urmei orizontale (P).

Secțiuni prin plane oarecare. Dacă planul de secțiune este oarecare, se efectuează o schimbare de plan de proiecție (în acest caz, planul [V]), în așa fel încît să se transforme planul de secțiune în plan proiectant (fig. 5.1.4). Piramida se obține în noua proiecție verticală așezînd vîrful v_1' la cota cunoscută din vechea proiecție verticală. O aplicație asemănătoare a fost prezentată la metoda rotației. De altfel, și în cazul piramidei din figura 5.1.4 se poate folosi deopotrivă metoda rotației (aducîndu-se planul oarecare în poziție de plan proiectant).

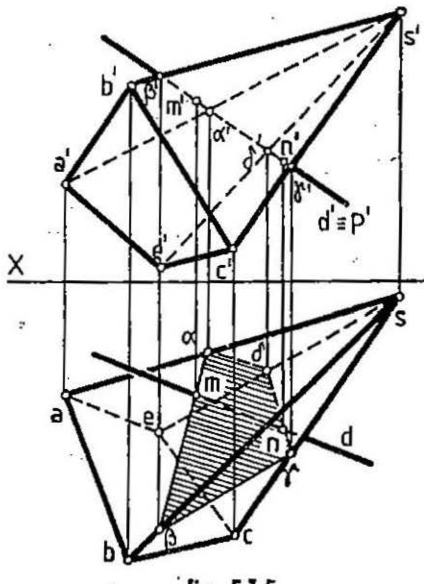


fig. 5.1.5

INTERSECȚIA DINTRE O DREAPTĂ ȘI UN POLIEDRU

Se duce prin dreaptă un plan proiectant (în acest caz, un plan de capăt) și se secționează poliedrul cu el (fig. 5.1.5). La intersecția dintre dreaptă și poligonul de secțiune rezultă cele două puncte de intersecție dintre dreaptă și poliedru.

DESFĂȘURATE DE POLIEDRE

A desfășura suprafața laterală a unui poliedru înseamnă a aduce toate fețele sale în același plan. Pentru obținerea desfășuratei piramidei din figura 5.1.6, s-au determinat în adevărată mărime toate muchiile sale. Astfel, muchia SA fiind frontală,

apare în proiecţia verticală în adevărată mărime. Muchiile **SB** şi **SC** se rotesc pînă cînd ajung în poziţie frontală. Proiecţiile lor verticale vor deveni $s'b_1'$ şi $s'c_1'$. Desfăşurata piramidei se compune dintr-o succesiune de triunghiuri aşezate în planul frontal al muchiei **SA**.

Prisma din figura 5.1.7 se poate de asemenea desfăşura prin obţinerea muchiilor în adevărată mărime. Se rabat muchiile pe planul orizontal de proiecţie [H]. Secţiunea transversală perpendiculară pe muchii poate fi aflată în adevărată mărime tot printr-o rabatere de plan proiectant (de capăt) pe planul orizontal de proiecţie.

Se numesc *transformate prin desfăşurare* ale punctelor şi liniilor trasate pe suprafaţa unui poliedru, punctele şi liniile corespunzătoare din figura obţinută prin desfăşurarea poliedrului respectiv. Presupunînd că prisma este secţionată de un plan oarecare (secţiunea haşurată), traseul secţiunii poate fi obţinut în desfăşurată, urmărind poziţia punctelor aflate pe fiecare din muchii (fig. 5.1.8). Desfăşuratele poliedrelor pot fi folosite şi pentru alte probleme de acest tip, ca, de exemplu, *determinarea traseului cel mai scurt* dintre două puncte situate pe feţe diferite ale unui poliedru etc.

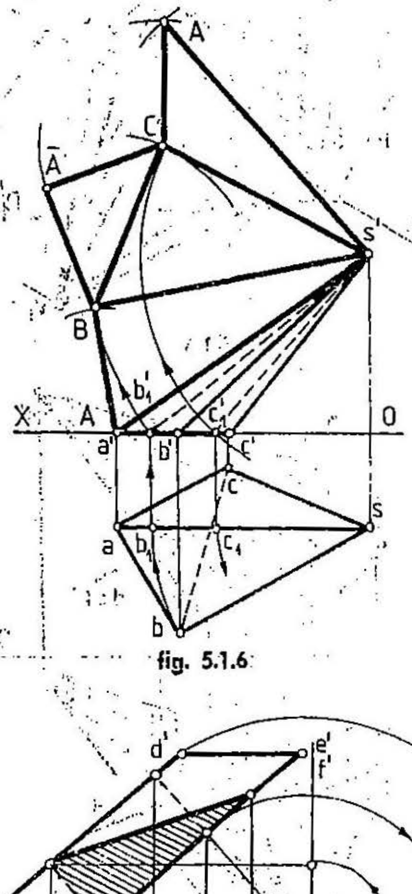


fig. 5.1.6

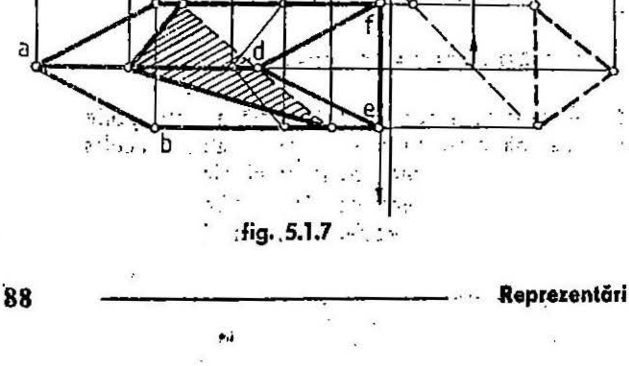


fig. 5.1.7

INTERSECŢII DE POLIEDRE

A intersecta două poliedre înseamnă a determina punctele în care muchiile unui poliedru întîlnesc feţele celuilalt poliedru şi reciproc. Dacă intersecţia generează un singur poligon plan sau strîmb, se spune că este o intersecţie de gen *rupere*. Dacă apar două poligoane (unul de intrare şi unul de

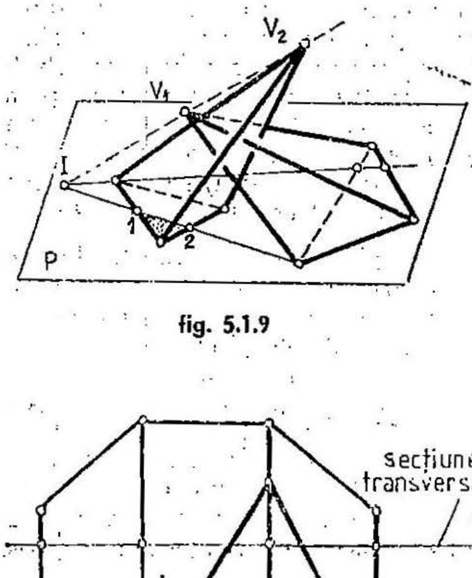


fig. 5.1.9

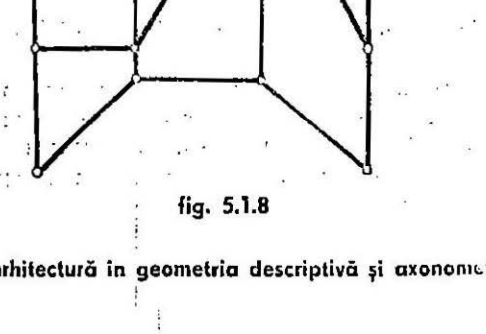


fig. 5.1.8

ieşire), intersecţia este de gen *pătrundere*. Partea comună a două poliedre care se intersectează se numeşte *corp comun* sau *solid comun*. Intersecţia a două poliedre se obţine cu ajutorul unor *plane auxiliare* duse prin muchiile poliedrelor.

Intersecţia a două piramide. Pentru intersecţia a două piramide se duc plane auxiliare care conţin pe rînd *muchiile* poliedrelor şi *urma orizontală* a dreptei care uneşte cele două vîrfuri (respectiv punctul I din figura 5.1.9). Un astfel de plan conţine o *muchie* a unuia din poliedre şi îl secţionează pe celălalt după *două generatoare*. Intersecţia dintre muchie şi generatoare determină punctele de intrare şi ieşire a muchiei primului poliedru în cel de-al doilea poliedru.

Dacă bazele piramidelor se află situate în plane diferite, se vor folosi de asemenea plane care trec prin muchiile poliedrelor şi prin dreapta ce uneşte vîrfurile lor. În acest caz se folosesc urmele acestor plane pe *ambele plane* ale bazelor — deci fascicule de drepte care trec prin punctele I, respectiv J (fig. 5.1.10). Planul IJa conţine muchia V_2A a piramidei V_2 şi generatoarele $V_1{}^1$ şi $V_1{}^2$ ale piramidei V_1. Muchia interceptează cele două generatoare în punctele 1 şi 2, care sînt punctele de intersecţie a muchiei V_2A cu piramida V_1. În mod similar se obţin punctele 3 şi 4 de intersecţie a muchiei V_1B cu piramida V_2. Figura 5.1.10 ilustrează rezolvarea, în axonometrie a intersecţiei dintre cele două piramide.

În figura 5.1.11 este rezolvată în dublă proiecţie ortogonală intersecţia dintre o piramidă cu baza în planul orizontal de proiecţie şi o piramidă cu baza într-un plan vertical oarecare. Urmele planelor auxiliare converg în punctul I din planul [H] şi în punctul J' din planul vertical dat. Este studiată şi vizibilitatea.

Dacă piramidele sînt particulare (piramide drepte cu bazele poligoane regulate etc.), rezolvarea intersecţiei se simplifică, întrucît se folosesc proprietăţile de simetrie. În figura 5.1.12, cele două piramide au bazele pătrate, sînt piramide drepte şi au acelaşi ax vertical; în acest caz sînt suficiente două puncte de intersecţie pentru a determina întregul poligon de intersecţie al celor două piramide. Celelalte şase puncte au aceleaşi cote ca primele două şi aceeaşi poziţie pe feţele piramidelor. Pentru determinarea primelor două puncte de intersecţie, sînt suficiente două secţiuni verticale prin cele două piramide, duse prin punctele a şi b, respectiv e şi f.

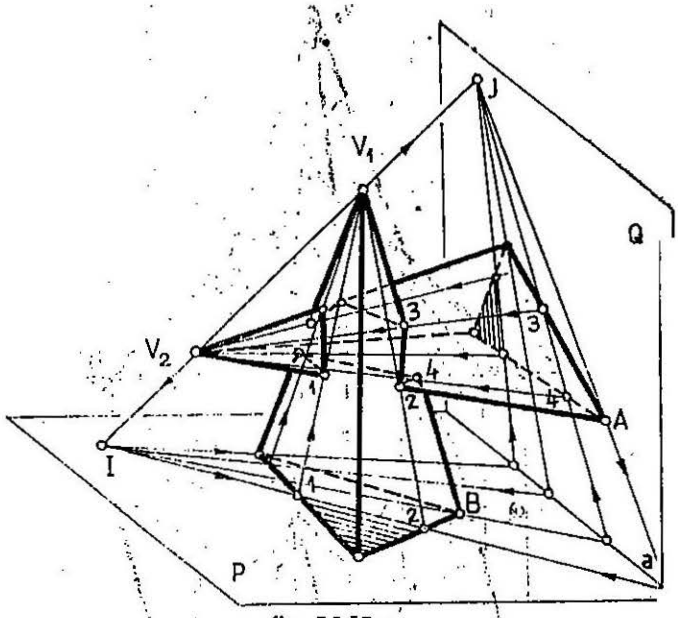


fig. 5.1.10

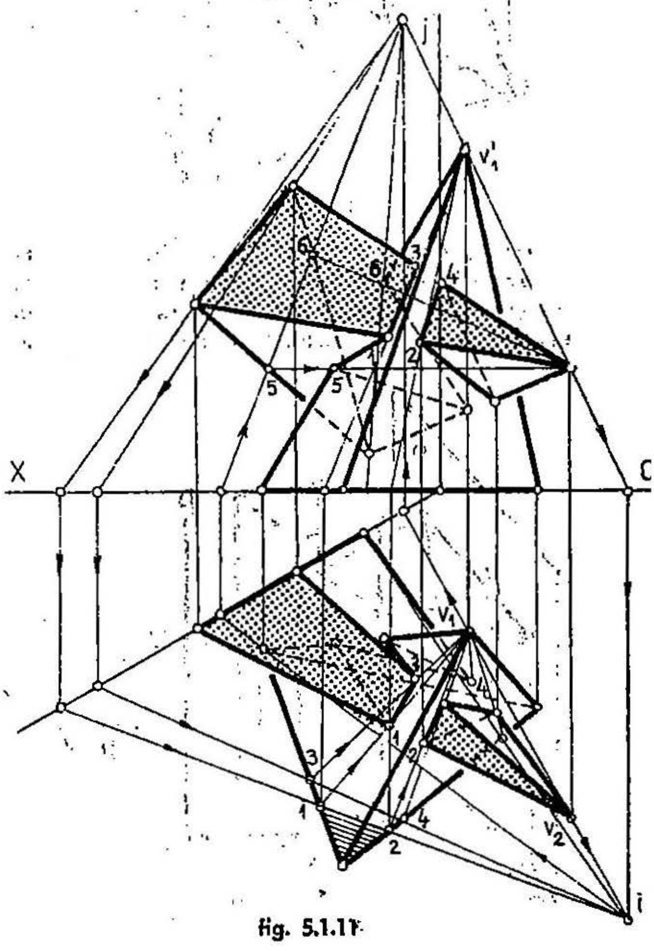


fig. 5.1.11

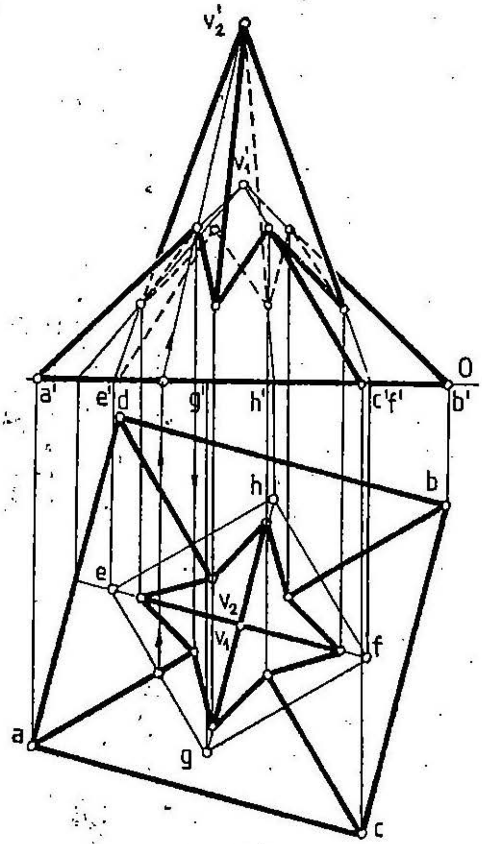


fig. 5.1.12

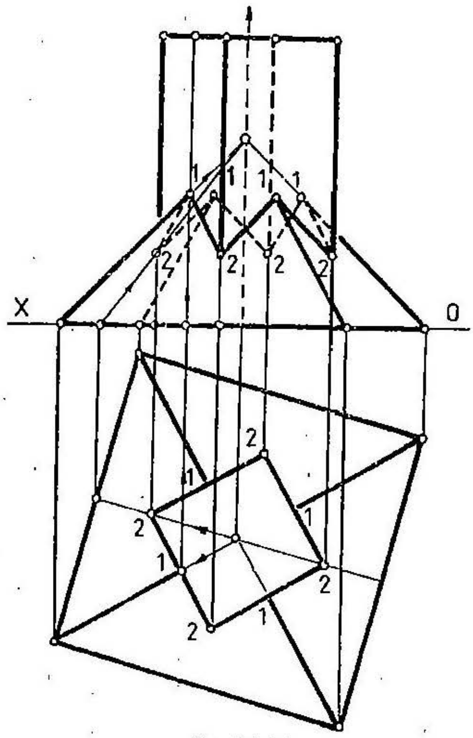


fig. 5.1.14

Intersecția dintre o prismă și o piramidă. Pentru rezolvarea intersecției dintre o prismă și o piramidă, *fasciculul planelor auxiliare* trebuie să treacă prin dreapta care conține vîrful piramidei și este paralelă cu muchiile prismei, respectiv dreapta (D) în figura 5.1.13. Și în acest caz, fiecare plan auxiliar conține o muchie a unuia din poliedre și îl secționează pe cel de-al doilea după două generatoare (care sînt concurente în [V] în cazul piramidei și sînt paralele cu muchiile în cazul prismei). Intersecția muchiei cu cele două generatoare determină cele două puncte de intersecție a poliedrului res-

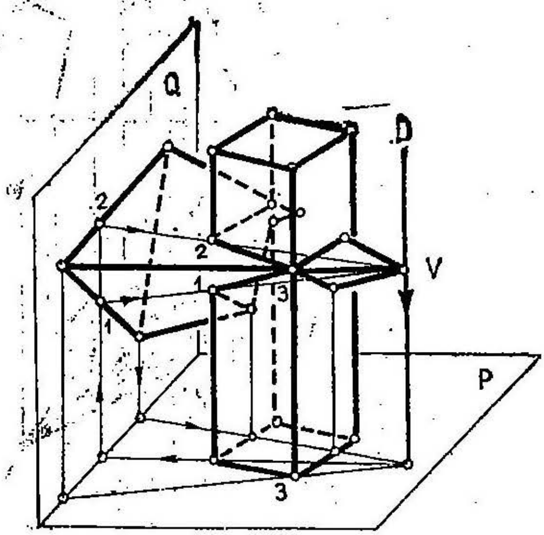


fig. 5.1.13

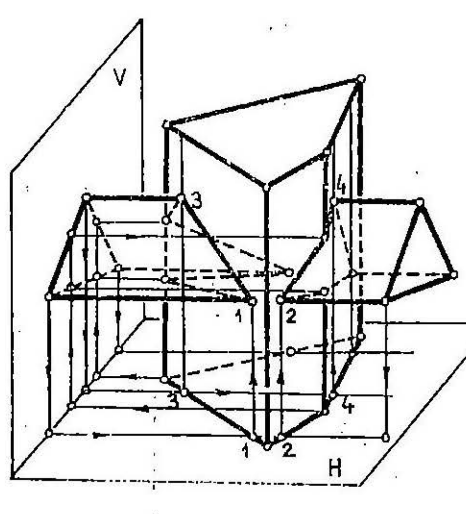


fig. 5.1.15

pectiv cu muchia celuilalt poliedru. Evident, în cazurile de tangență, cele două puncte se confundă (punctul **3**).

Intersecția din figura 5.1.14 este un caz mai simplu, datorită faptului că și piramida și prisma au bazele pătrate, sînt amîndouă drepte și au axa verticală comună. Punctele poligonului de intersecție se determină direct din proiecția orizontală și se ridică apoi în proiecția verticală. În acest caz, practic nu este nevoie de plane auxiliare.

Intersecția dintre două prisme. Pentru rezolvarea intersecției dintre două prisme, se duc *plane auxiliare* paralele cu muchiile celor două prisme. În acest fel, fiecare plan dus prin muchia unei prisme va secționa cealaltă prismă după două generatoare, pe care se determină cele două puncte de intersecție. În figura 5.1.15, întrucît cele două prisme sînt prisme drepte, planele auxiliare sînt perpendiculare și pe [H] și pe [V] (sînt deci, plane de profil).

În *cazul general* al unor prisme oblice, *direcția urmelor planelor auxiliare* se determină ducînd printr-un punct oarecare din spațiu două drepte concurente (fiecare din ele paralelă cu muchiile uneia dintre prisme) și determinînd *urmele* planului oarecare definit de cele două drepte concurente (fig. 5.1.16). Ducînd un fascicul de drepte paralele cu aceste urme prin fiecare vîrf al bazelor celor două prisme, se poate determina *limita* intersecției dintre cele două prisme. Astfel, limita triunghiului hașurat reprezintă limita de la care începe intersecția. Urmele (orizontală și verticală) planului paralel cu muchiile celor două prisme sînt (P) și (P'). Ele au fost obținute ducînd printr-un punct oarecare din spațiu I(i, i') o dreaptă paralelă cu muchiile unei prisme și o altă dreaptă paralelă cu muchiile celeilalte prisme. Cele două drepte determină planul PP_xP'. *Vizibilitatea* intersecției se poate studia în proiecția orizontală, comparînd cotele punctelor, iar în proiecția verticală, comparînd depărtările punctelor.

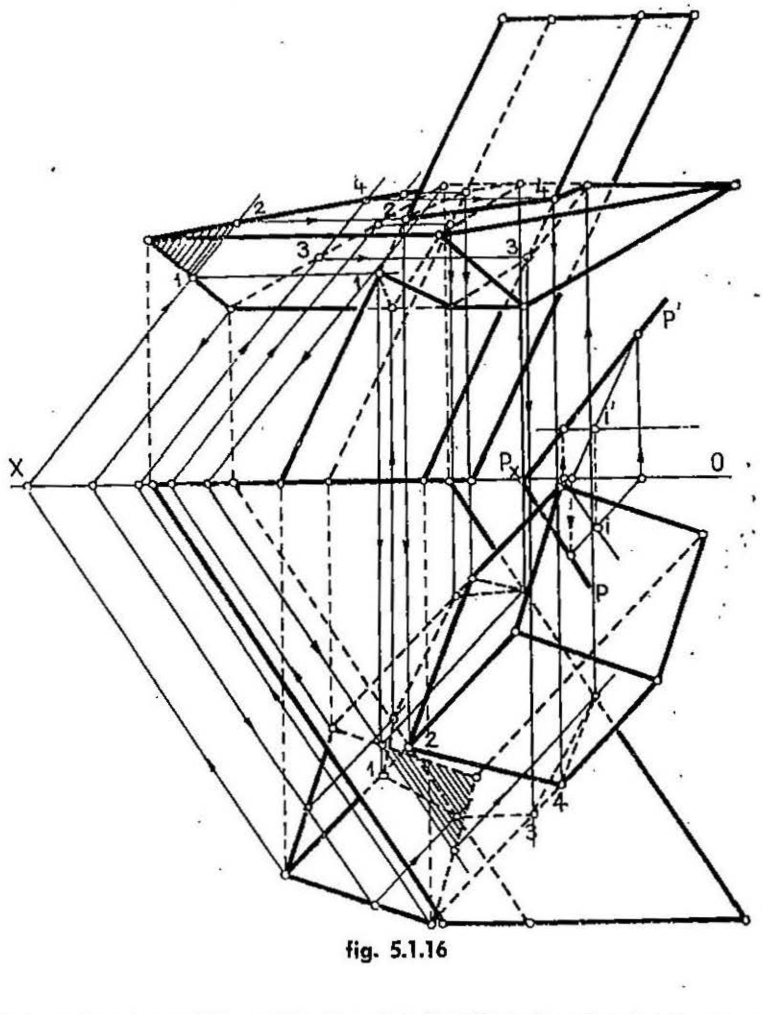


fig. 5.1.16

În figura 5.1.17 este ilustrat *cazul general* al intersecției a două prisme triunghiulare oblice în axonometrie. Se pot vedea urmele planelor auxiliare paralele cu muchiile ambelor prisme. În acest caz, ele sînt plane oarecare. Întrucît triunghiurile hașurate care dau *limitele* intersecției sînt plasate amîndouă pe baza aceleiași prisme, va fi o intersecție de gen *penetrație*.

În sfîrșit, în figura 5.1.18 este ilustrată *intersecția dintre o prismă și o piramidă*, ambele avînd anumite particularități. Astfel, piramida este dreaptă și cu baza în planul orizontal de proiecție, în timp ce prisma are muchiile orizontale. Din acest motiv, rezolvarea este simplificată. Se poate efectua o *schimbare de plan vertical de proiecție*, în așa fel încît fețele prismei să devină plane de capăt. În aceste condiții, intersecția acestor fețe cu muchiile piramidei se obține imediat. Se revine apoi la proiecțiile ortogonale inițiale.

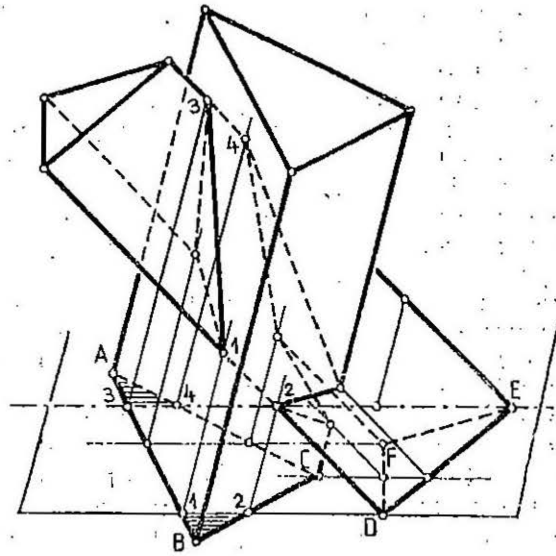


fig. 5.1.17

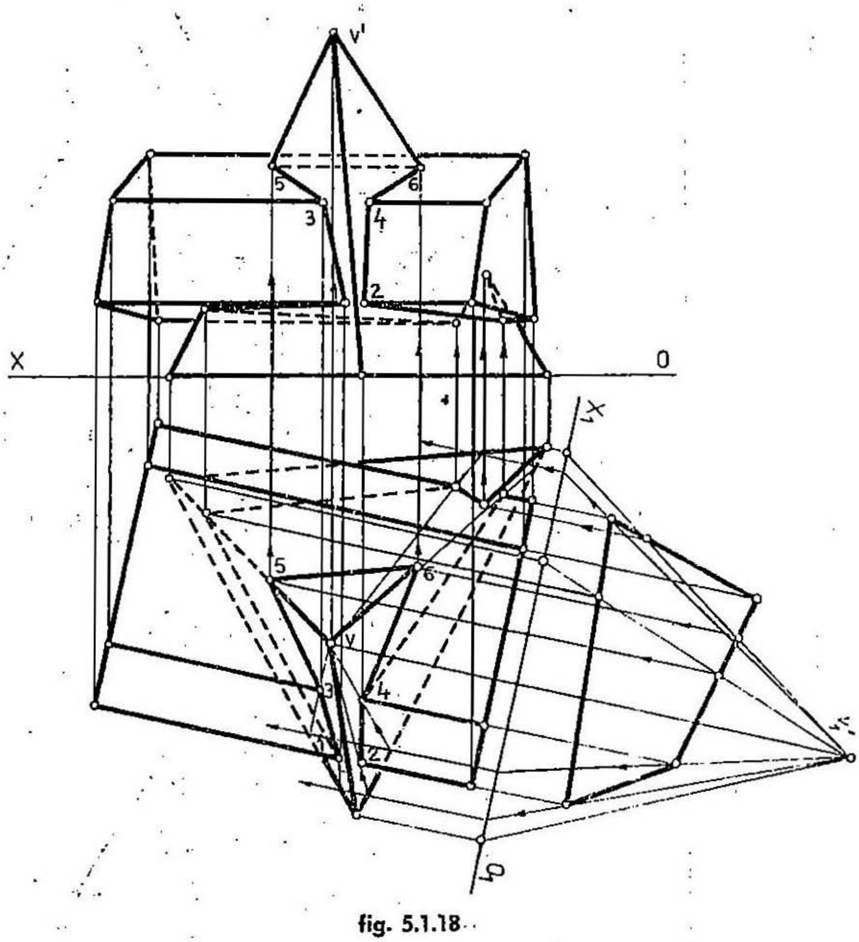


fig. 5.1.18

5.2. POLIEDRELE REGULATE ȘI DUALELE LOR

Poliedrele regulate au următoarele proprietăți:
- toate fețele lor sînt poligoane regulate egale;
- vîrfurile lor sînt unghiuri solide regulate egale;
- sînt inscriptibile în sferă;
- în ele se poate înscrie o sferă.

Cele *cinci poliedre regulate* sînt:
- *tetraedrul regulat* (T) care are patru fețe triunghiuri echilaterale (fig. 5.2.1);
- *cubul* (C), care are șase fețe pătrate (fig. 5.2.2);
- *octaedrul regulat* (O), care are opt fețe triunghighiuri echilaterale (fig. 5.2.3);
- *dodecaedrul regulat* (D), care are 12 fețe pentagoane regulate (fig. 5.2.4);
- *icosaedrul regulat* (I), care are 20 fețe triunghiuri echilaterale (fig. 5.2.5).

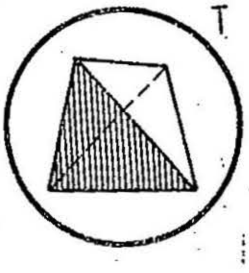


fig. 5.2.1

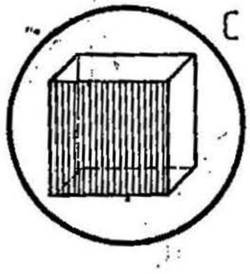


fig. 5.2.2

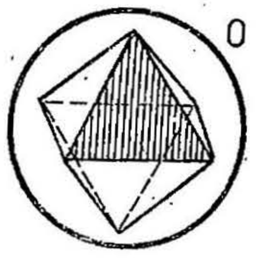


fig. 5.2.3

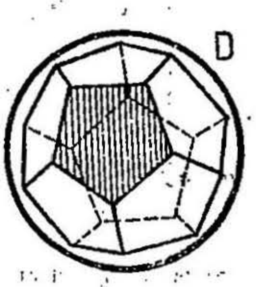


fig. 5.2.4

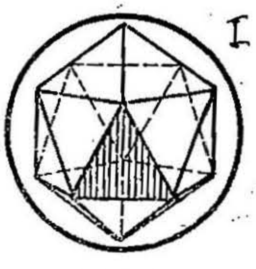


fig. 5.2.5

Formula lui Euler. Dacă V este numărul de vîrfuri, M este numărul de muchii, iar F este numărul de fețe ale unui poliedru regulat, atunci se verifică relația:

$$V - M + F = 2$$

Relația se poate urmări și în tabelul următor:

	V	M	F
Tetraedrul regulat (T)	4	6	4
Cubul (C)	8	12	6
Octaedrul regulat (O)	6	12	8
Dodecaedrul regulat (D)	20	30	12
Icosaedrul regulat (I)	12	30	20

REPREZENTAREA TETRAEDRULUI REGULAT

Prin observație directă se constată că triunghiul V1C este isoscel (fig. 5.2.6): V1 = 1C (înălțimea feței triunghi echilateral). Se va lua deci sistemul de proiecție astfel încît triunghiul V1C să fie în poziție frontală, implicit fața ABV va fi conținută într-un plan de capăt. Se desenează deci proiecția orizontală ABC, se ridică drepte de ordine și se ia în compas din punctul c lungimea muchiei ($L_T = \overline{ac}$), obținînd pe v'. Tetraedrul astfel reprezentat este așezat cu o față în planul orizontal de proiecție (fig. 5.2.7).

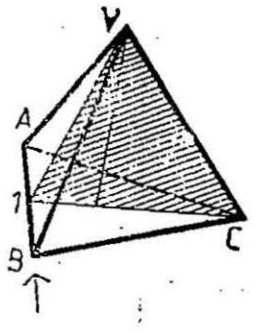


fig. 5.2.6

Reprezentarea tetraedrului regulat așezat cu o față orizontală și cu un vîrf în planul orizontal de proiecție este ilustrată în figura 5.2.8. În figura 5.2.9 este reprezentat tetraedrul regulat așezat pe o muchie. Întrucît două muchii opuse ale unui tetraedru regulat sînt drepte perpendiculare în spațiu, muchia opusă muchiei situate în planul [H] se poate desena imediat în proiecție orizontală; ea este în adevărată mărime și se înjumătățește cu muchia din planul [H].

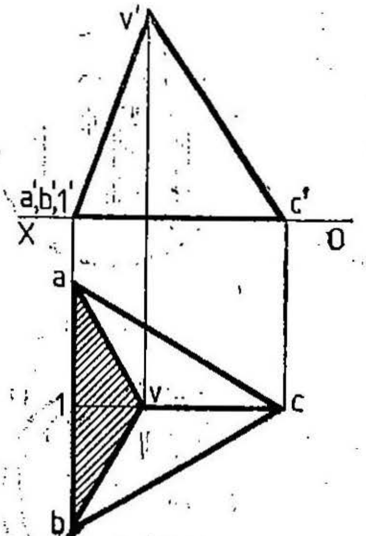


fig. 5.2.7

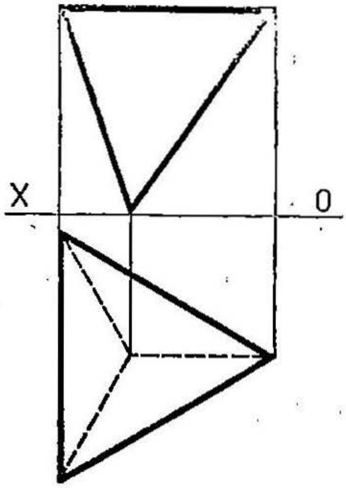


fig. 5.2.8

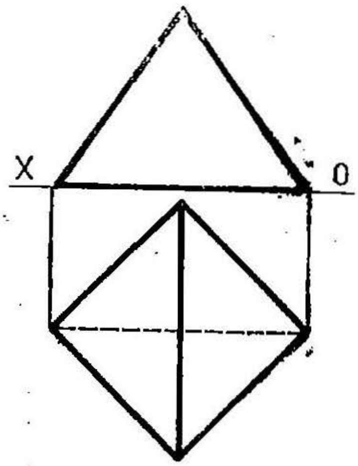


fig. 5.2.9

REPREZENTAREA CUBULUI

În figura 5.2.10 este reprezentat un cub secționat cu un plan astfel încît secțiunea este un hexagon regulat. Prin rotații de nivel sau de front, se pot obține reprezentări dublu ortogonale ale cubului în diverse poziții: cu o față în planul orizontal [H] (fig. 5.2.11 și 5.2.12), cu o muchie în [H] (fig. 5.2.13) sau cu un vîrf în [H]. În cazul din figura 5.2.14, cubul are o diagonală interioară în poziție verticală, iar conturul aparent orizontal este un hexagon regulat.

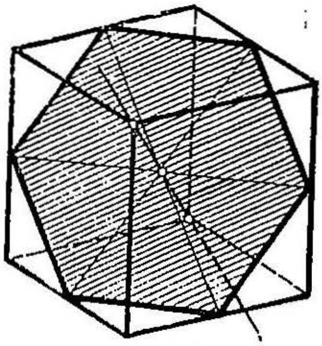


fig. 5.2.10

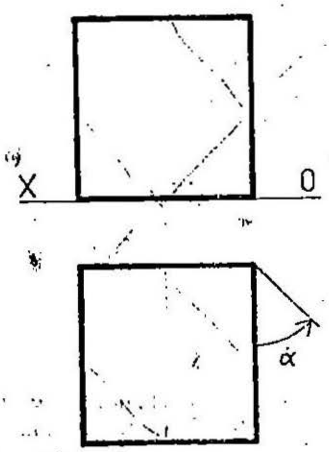


fig. 5.2.11

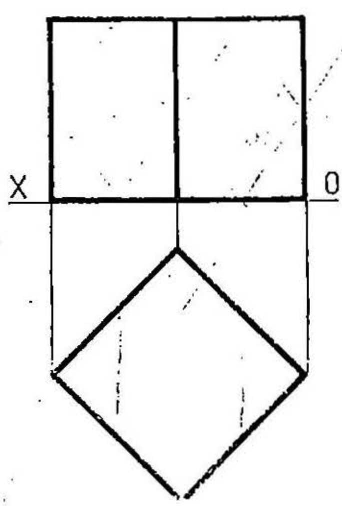


fig. 5.2.12

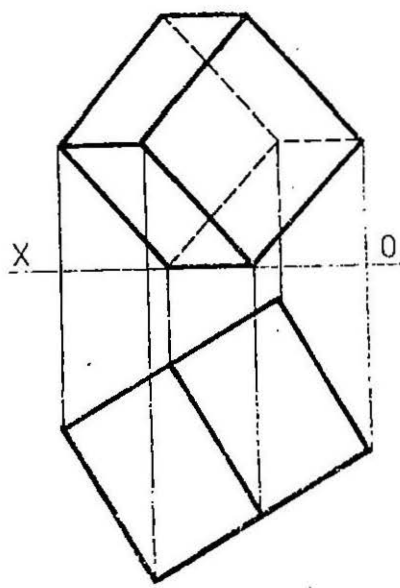


fig. 5.2.13

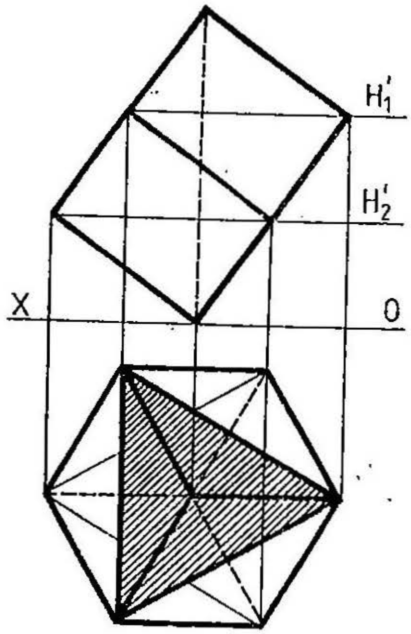


fig. 5.2.14

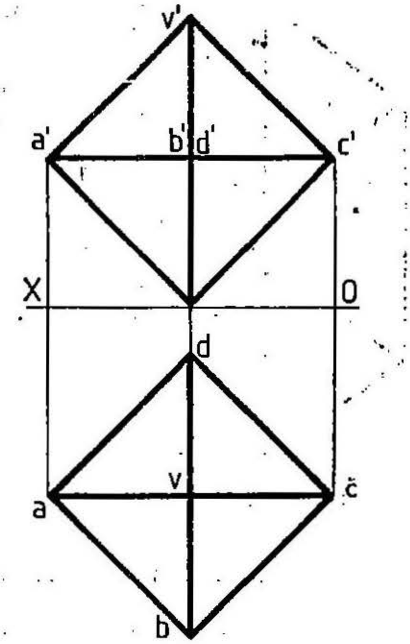


fig. 5.2.16

REPREZENTAREA OCTAEDRULUI REGULAT

În cazul poziției „pe un vîrf" a octaedrului regulat (fig. 5.2.15), se poate observa că patru muchii alcătuiesc un pătrat ABCD așezat orizontal, ceea ce permite reprezentarea ușoară în dublă proiecție ortogonală (fig. 5.2.16). Din această reprezentare se trece în reprezentarea din figura 5.2.17, printr-o schimbare de plan vertical de proiecție sau printr-o *rotație de nivel*.

Prin *rotații de front* se obțin pozițiile din figura 5.2.18 (octaedrul regulat este așezat pe o muchie) și din figura 5.2.19 (octaedrul regulat este așezat pe o față). În figura 5.2.19, deoarece două fețe opuse ale unui octaedru regulat sînt paralele, apar în plan două triunghiuri echilaterale egale, dispuse rotit unul față de celălalt și avînd același centru; conturul aparent orizontal este un hexagon regulat.

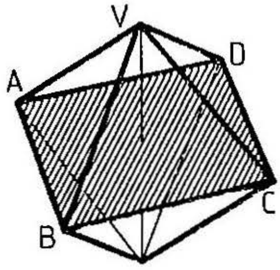


fig. 5.2.15

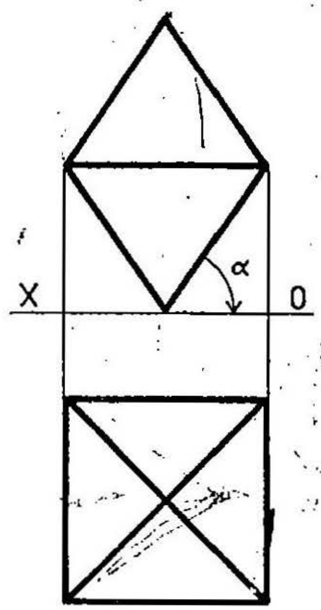


fig. 5.2.17

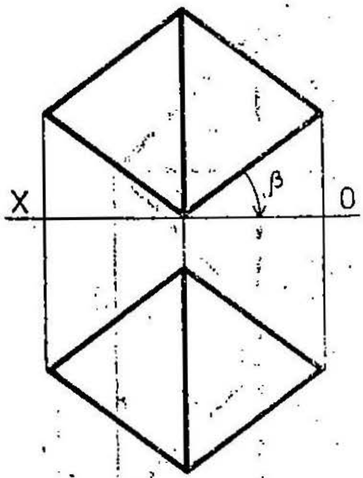


fig. 5.2.18

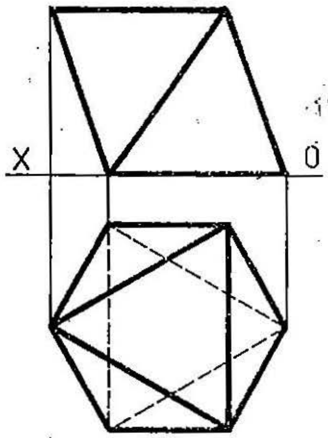


fig. 5.2.19

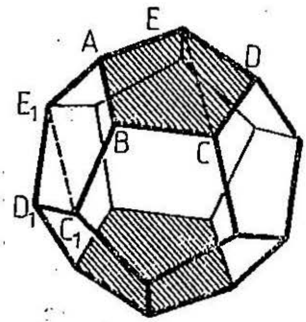


fig. 5.2.20

5.2. REPREZENTAREA DODECAEDRULUI REGULAT

Considerînd dodecaedrul regulat așezat pe o față se poate desena imediat în plan fața sa superioară (de asemenea orizontală) ABCDE și proiecțiile muchiilor care pleacă din A, B, C, D și E (fig. 5.2.20). Avînd punctele **a**, **b**, **c**, **d**, **e** și **o** (fig. 5.2.21) și știind că diagonalele paralele ale pentagoanelor sînt egale, se obțin punctele c_1 și e_1. Punctul d_1 se află folosind proprietatea de paralelism dintre o diagonală a unui pentagon regulat și latura opusă. În proiecția verticală se determină palierele $[H_1']$ și $[H_2']$.

Se completează apoi proiecția orizontală (prin simetrie) și se ridică punctele astfel obținute în proiecția verticală (fig. 5.2.22). Prin *rotații de front* se reprezintă dodecaedrul așezat pe un vîrf (fig. 5.2.23) și pe o muchie (fig. 5.2.24).

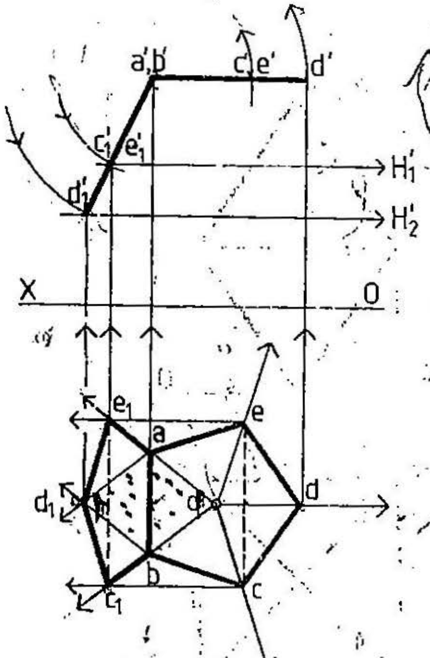


fig 5.2.21

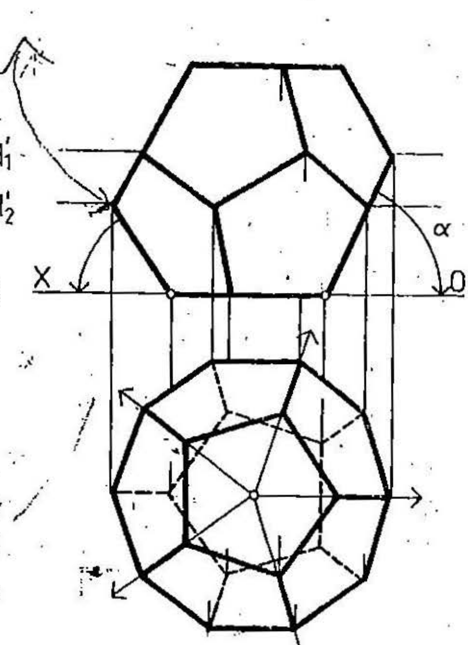


fig. 5.2.22

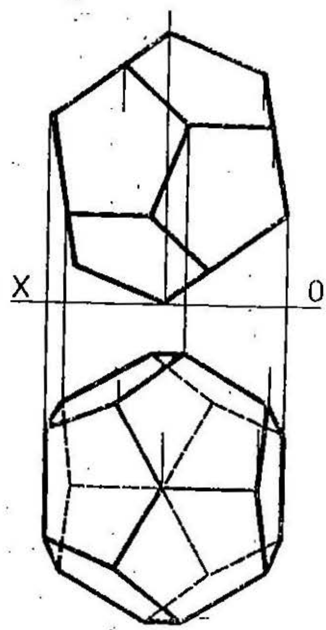


fig. 5.2.23

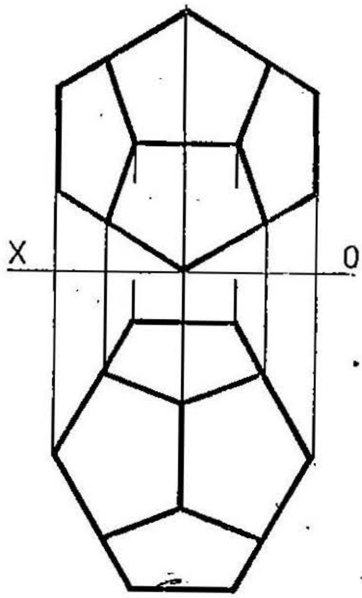


fig. 5.2.24

REPREZENTAREA ICOSAEDRULUI REGULAT

Considerîndu-se un icosaedru regulat așezat pe un vîrf, se observă secțiunea orizontală pentagonală ABCDE, care se poate reprezenta imediat în plan (fig. 5.2.25). O a doua secțiune orizontală este tot un pentagon regulat, așezat rotit față de primul. Se desenează deci în proiecție orizontală vîrfurile **a, b, c, d, e** și **v** (fig. 5.2.26). În proiecție verticală se obține vîrful **v'** și palierele $[H_1']$ și $[H_2']$. Reprezentarea completă este cea din figura 5.2.27. Prin *rotații de front* se reprezintă icosaedrul regulat așezat cu o față în planul orizontal de proiecție (fig. 5.2.28) și cu o muchie în planul orizontal de proiecție (fig. 5.2.29).

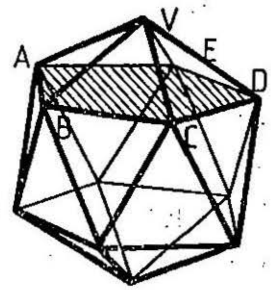


fig. 5.2.25

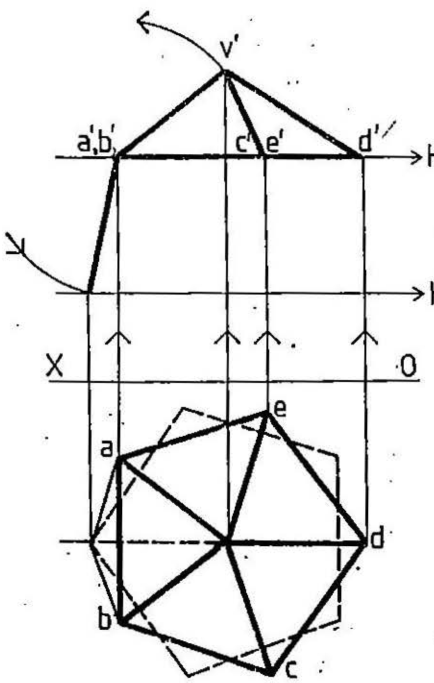


fig. 5.2.26

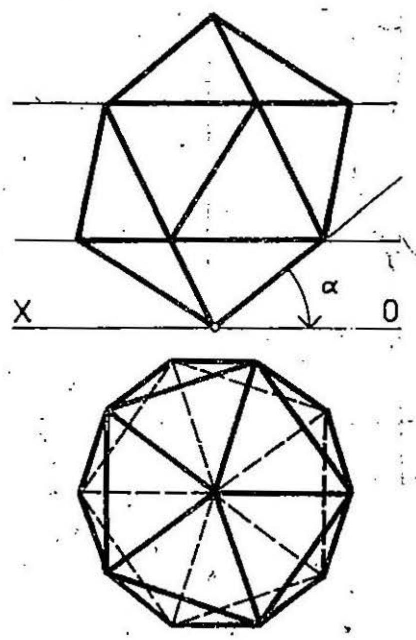


fig. 5.2.27

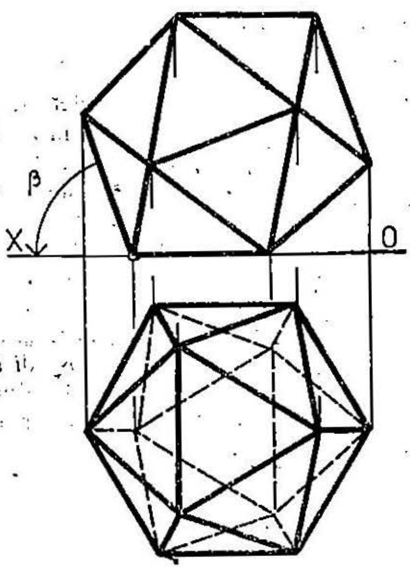


fig. 5.2.28

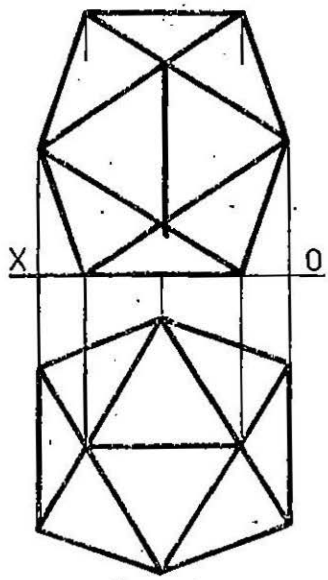


fig. 5.2.29

REPREZENTAREA POLIEDRELOR REGULATE PRIN ÎNSCRIERE ÎN CUB

Tetraedrul regulat. Se pot înscrie doi tetraedri regulați în același cub (fig. 5.2.30). Relația dintre muchia tetraedrului (L_T) și muchia cubului (L_C) este $\sqrt{2}$. Figura 5.2.31 ilustrează situația în care cubul are două fețe orizontale, iar figura 5.2.32 reprezintă situația în care tetraedrul are o față orizontală (iar cubul are o diagonală interioară în poziție verticală).

Octaedrul regulat. Se poate obține un octaedru regulat prin unirea centrelor fețelor unui cub (fig. 5.2.33). Relația dintre muchia octaedrului (L_O) și muchia cubului (L_C) este $\sqrt{2}/2$. Figura 5.2.34 ilustrează situația în care cubul are două fețe orizon-

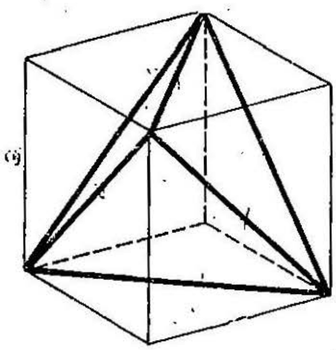


fig. 5.2.30

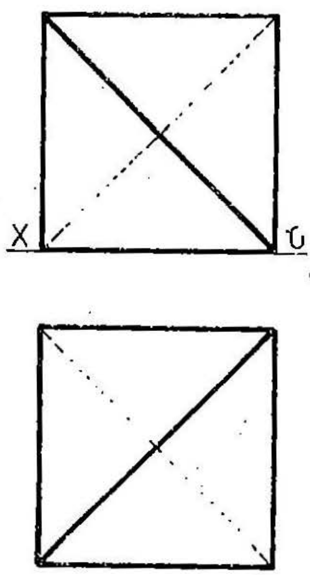


fig. 5.2.31

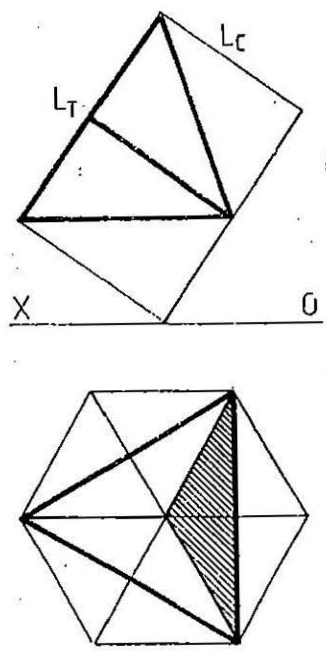


fig. 5.2.32

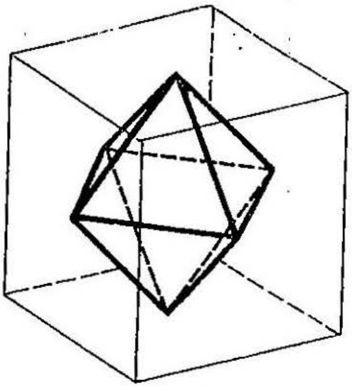


fig. 5.2.33

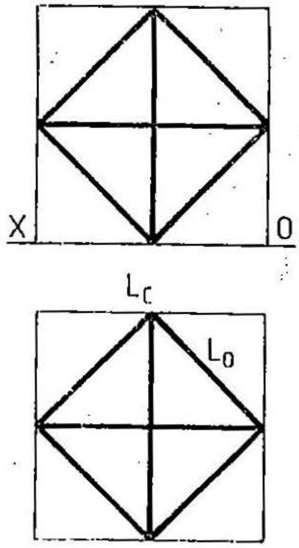


fig. 5.2.34

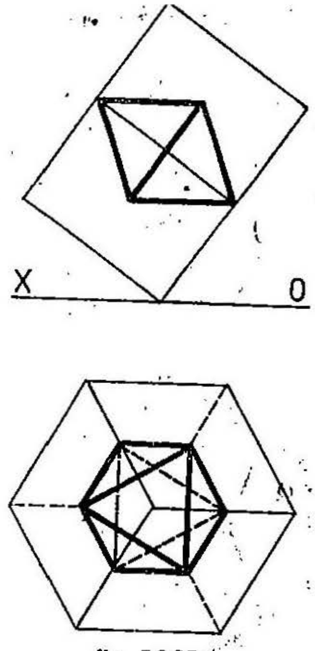


fig. 5.2.35

tale, iar figura 5.2.35 reprezintă situația în care cubul are o diagonală interioară în poziție verticală, iar octaedrul are două fețe orizontale.

Dodecaedrul regulat. Dodecaedrul regulat se poate înscrie în cub pornind de la trei perechi de segmente egale și paralele, plasate pe centrele fețelor cubului (fig. 5.2.36). Valoarea segmentelor se poate obține dintr-o construcție grafică, ce corespunde relației $L_D = L_C\ (3 - \sqrt{5})/2$ (fig. 5.2.37). Se obțin cele două proiecții din figura 5.2.38.

Icosaedrul regulat. Icosaedrul regulat se înscrie cub printr-o construcție asemănătoare (fig. 5.2.3 Valorile segmentelor paralele se obțin din aceea figură (5.2.37), unde se poate observa că $L_D + L_I =$ $= L_C$.

Relația este: $L_I = L_C\,(\sqrt{5} - 1)/2$. Se obțin ce două proiecții din figura 5.2.40.
Figura 5.2.41 ilustrează matricea inter-relațiil dintre cele cinci poliedre regulate (*Critchlo* 1965).

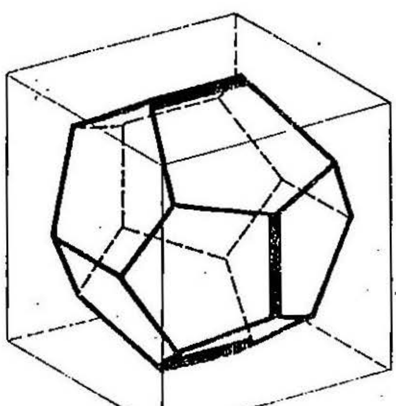


fig. 5.2.36

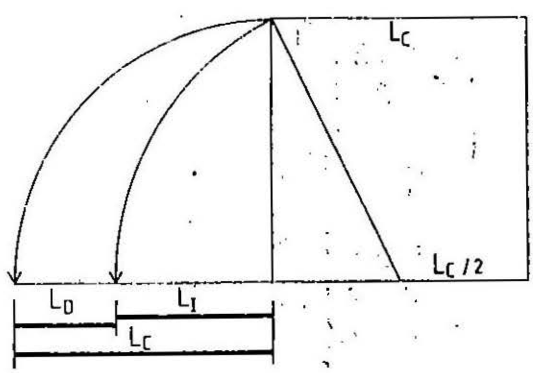


fig. 5.2.37

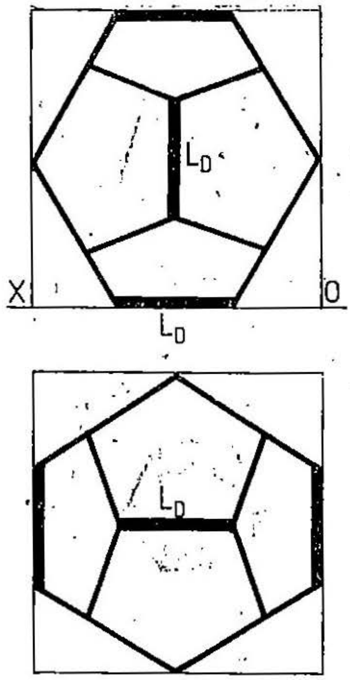


fig. 5.2.38

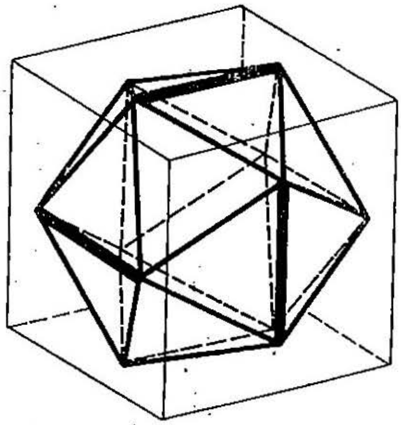


fig. 5.2.39

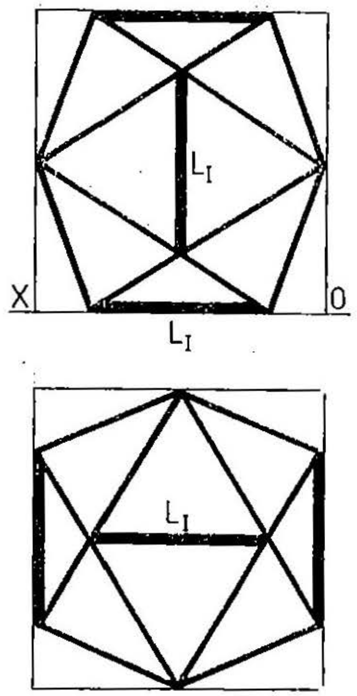


fig. 5.2.40

ANALIZA POLIEDRELOR REGULATE

Se poate efectua o analiză a poliedrelor regulate prin secționarea cu plane, evidențierea unor plane mediane, diagonale etc. Analiza este ilustrată printr-un *icosaedru regulat* înscris într-un cub (fig. 5.2.42).

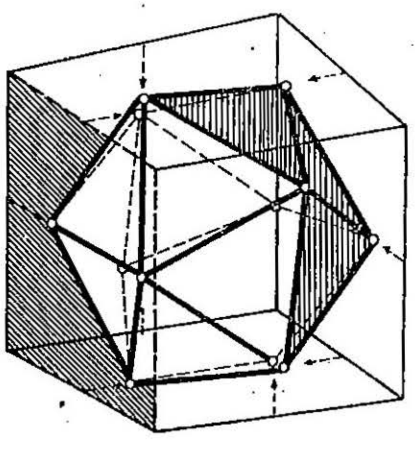


fig. 5.2.42

Figurile 5.2.43...5.2.46 evidențiază planele determinate de perechile de muchii opuse ale icosaedrului, construite ca segmente egale și paralele, situate pe centrele fețelor opuse ale cubului.

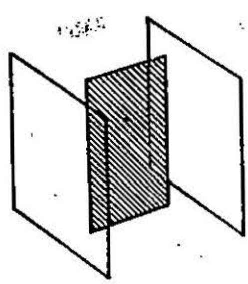


fig. 5.2.43

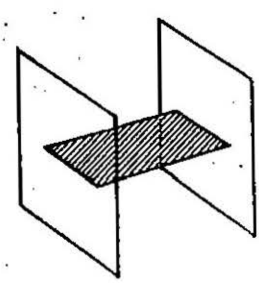


fig. 5.2.44

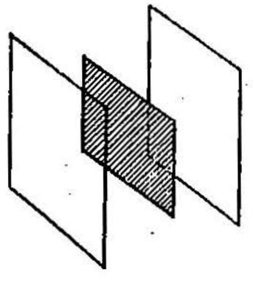


fig. 5.2.45

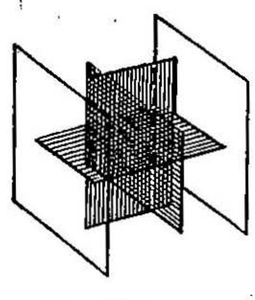


fig. 5.2.46

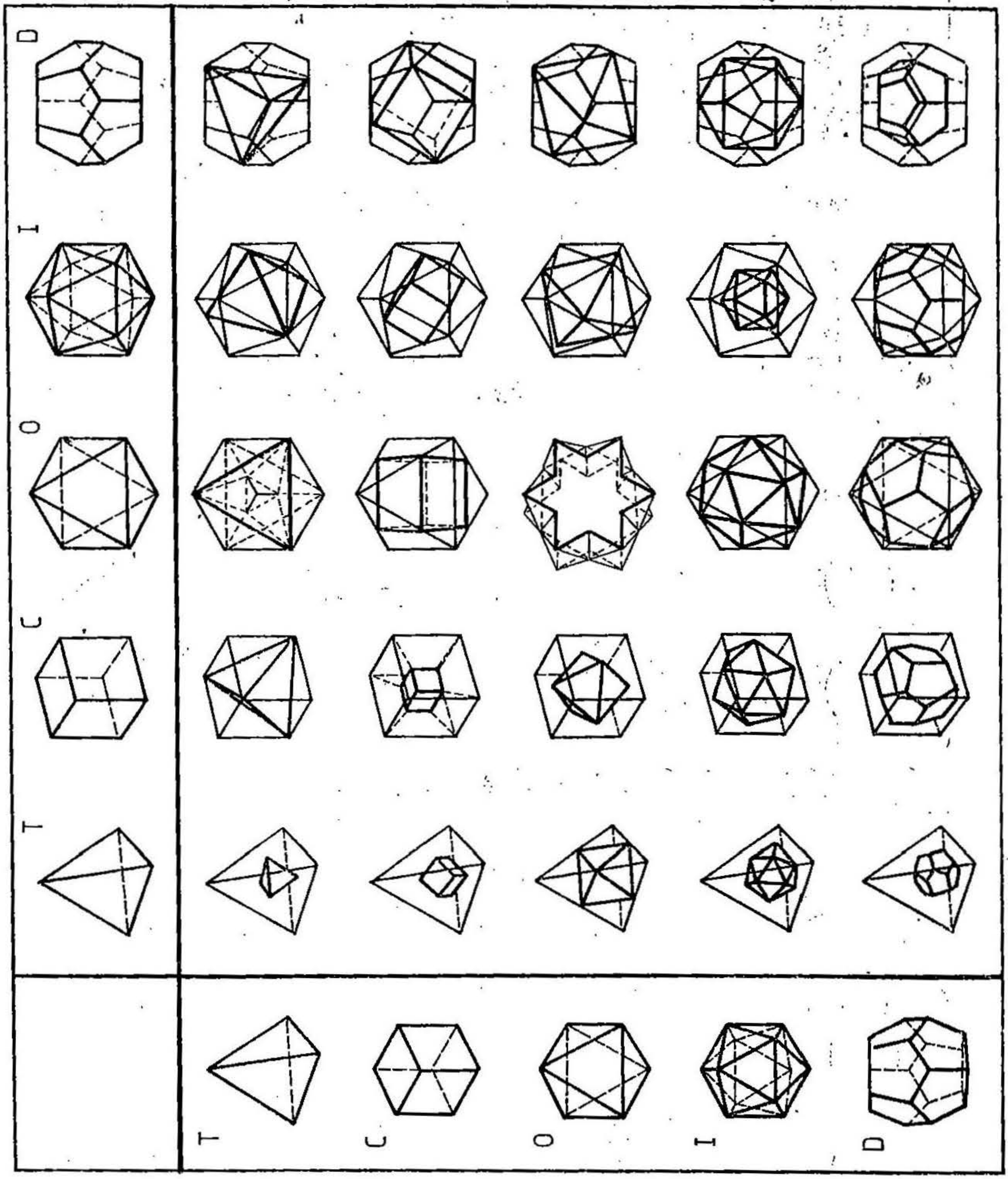


fig. 5.24

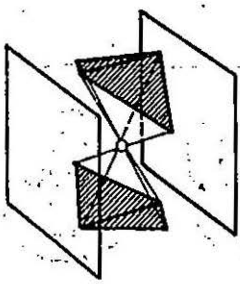


fig. 5.2.47

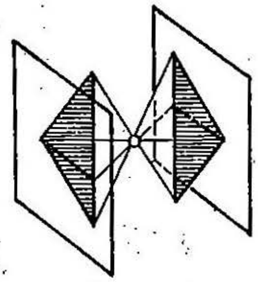


fig. 5.2.48

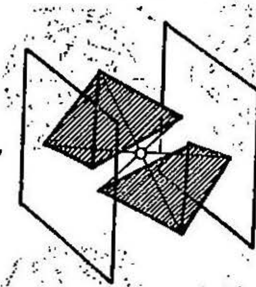


fig. 5.2.49

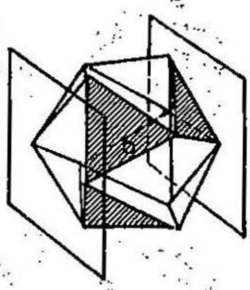


fig. 5.2.50

Există 15 asemenea dreptunghiuri într-un icosaedru regulat și laturile lor se află în raportul de aur (1/1,618). Figurile 5.2.47...5.2.50 evidențiază perechi de fețe adiacente ale icosaedrului regulat. Triunghiurile hașurate din figura 5.2.50 pot constitui, dacă suferă o ușoară transformare de poziție, fețele triunghiulare ale unui cuboctaedru (poliedru semiregulat).

Analiza configurației icosaedrale prin împachetări de sfere. Se poate obține o configurație icosaedrală prin împachetarea a 12 sfere. În varianta I (fig. 5.2.51) cele 12 sfere sînt ordonate ca două coliere intermediare de cîte cinci sfere plus o sferă în vîrf și o sferă la bază. În varianta a II-a (fig. 5.2.52) cele 12 sfere sînt ordonate ca un pachet central de șase sfere plus două grupări de cîte trei sfere (o grupare în vîrf și una la baza pachetului central).

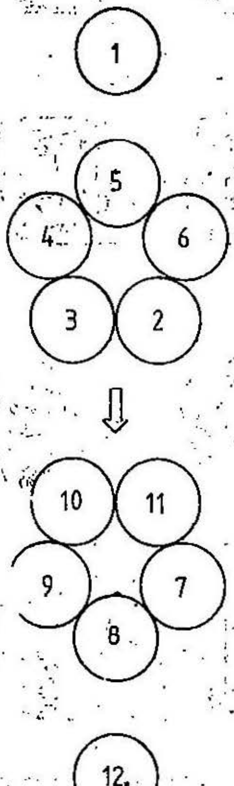


fig. 5.2.51

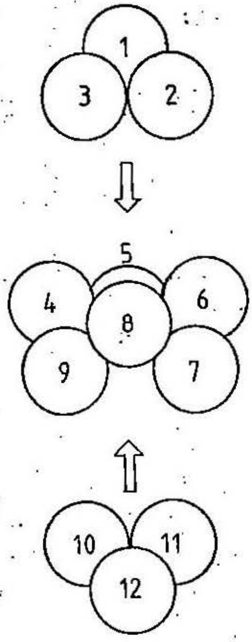


fig. 5.2.52

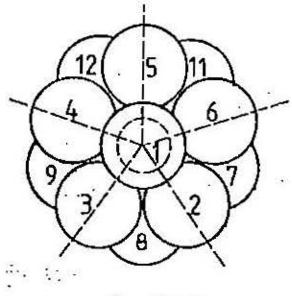


fig. 5.2.53

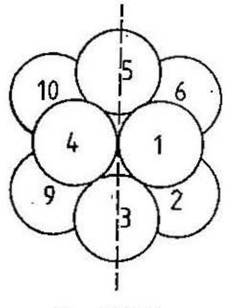


fig. 5.2.54

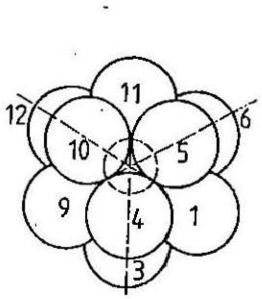


fig. 5.2.55

Rezultatul obținut este același în ambele variante. Figurile 5.2.53...5.2.55 reprezintă vederi ale celor 12 sfere și evidențiază simetriile configurației icosaedrale.

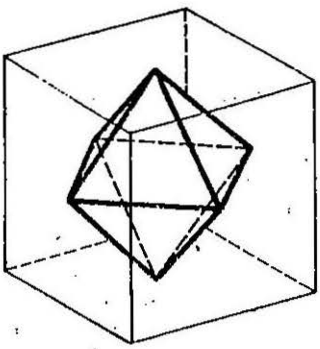


fig. 5.2.56

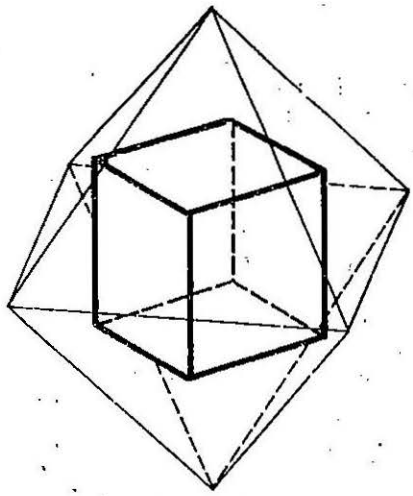


fig. 5.2.57

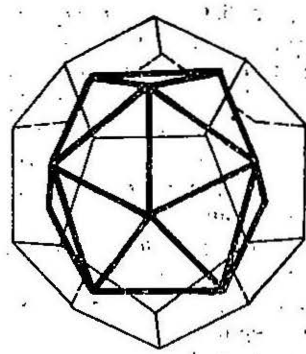


fig. 5.2.58

DUALELE POLIEDRELOR REGULATE

Dacă se unesc centrele tuturor fețelor unui poliedru regulat, se obține „dualul" (sau „reciprocul") său. Rezultă din această construcție că dualul unui poliedru va avea numărul de vîrfuri egal cu numărul de fețe ale poliedrului inițial. Întrucît numărul de fețe ale cubului este egal cu numărul de vîrfuri ale octaedrului regulat și invers, rezultă că octaedrul regulat este dualul cubului și invers (fig. 5.2.56 și 5.2.57).

În mod asemănător, deoarece numărul de fețe ale dodecaedrului regulat este egal cu numărul de vîrfuri ale icosaedrului regulat, rezultă că icosaedrul regulat este dualul dodecaedrului regulat și invers (fig. 5.2.58 și 5.2.59). Dualul tetraedrului regulat este el însuși, deoarece tetraedrul are același număr de fețe și de vîrfuri (4). În figura 5.2.60 s-a obținut dualul tetraedrului regulat prin unirea centrelor fețelor sale.

Unirea centrelor fețelor unui poliedru nu este singura transformare care permite construirea dualului său. Se poate verifica în toate figurile de mai sus că o altă posibilitate de obținere a dualului o constituie construirea în fiecare vîrf al poliedrului regulat respectiv a unui plan egal înclinat față de fețele care se întîlnesc în acel vîrf. Intersecția planelor definește dualul.

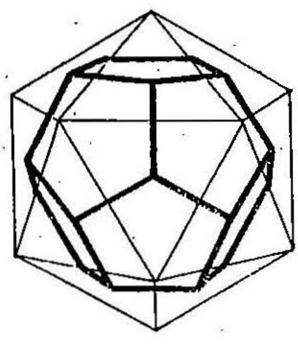


fig. 5.2.59

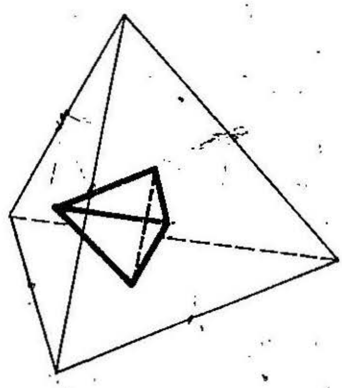


fig. 5.2.60

Înjumătățirea muchiilor. Unind mijloacele muchiilor unui poliedru regulat se obține un poliedru semiregulat. Se obțin astfel *cuboctaedrul* (prin înjumătățirea muchiilor cubului sau prin înjumătățirea muchiilor octaedrului) și *icosdodecaedrul* (prin înjumătățirea muchiilor icosaedrului sau prin înjumătățirea muchiilor dodecaedrului). Acest lucru se explică prin faptul că, atît cubul, cît și octaedrul, au același număr de muchii, fiind duale. Același lucru este valabil pentru icosaedru și dodecaedru.

Teșire. Această operație mai complicată permite obținerea *cubului teșit* și a *dodecaedrului teșit.*

Teșirea muchiilor. Prin teșirea muchiilor cuboctaedrului sau icosdodecaedrului se obțin *rombcuboctaedrul* și *rombicosdodecaedrul.*

N o t ă . Vom nota fețele poliedrelor cu F_3, F_4, F_5 și F_6, după cum sînt triunghiuri, pătrate, pentagoane sau hexagoane regulate.

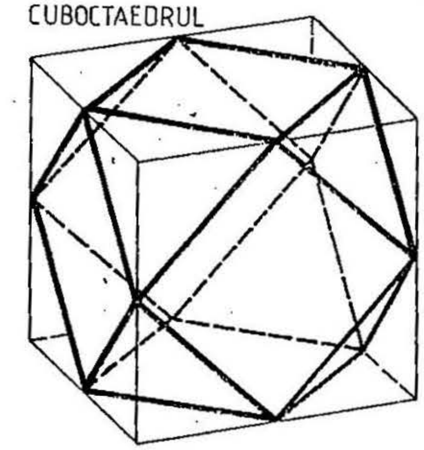


fig. 5.3.2

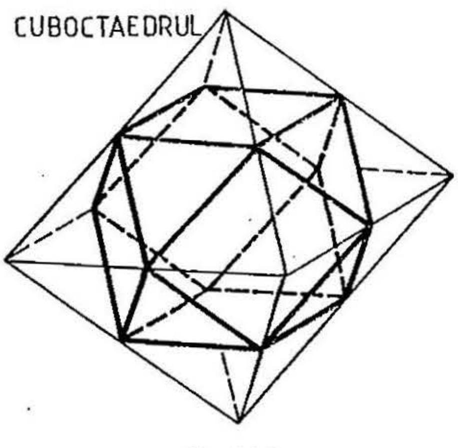


fig. 5.3.3

Cuboctaedrul, alcătuit din șase fețe pătrate și opt fețe triunghiuri echilaterale $(6F_4 + 8F_3)$, se obține prin înjumătățirea muchiilor cubului (fig. 5.3.2) sau prin înjumătățirea muchiilor octaedrului regulat (fig. 5.3.3).

Icosdodecaedrul, compus din 20 fețe triunghiuri echilaterale și 12 fețe pentagoane regulate $(20F_3 + 12F_5)$, se obține prin înjumătățirea muchiilor dodecaedrului regulat (fig. 5.3.4) sau prin înjumătățirea muchiilor icosaedrului regulat (fig. 5.3.5).

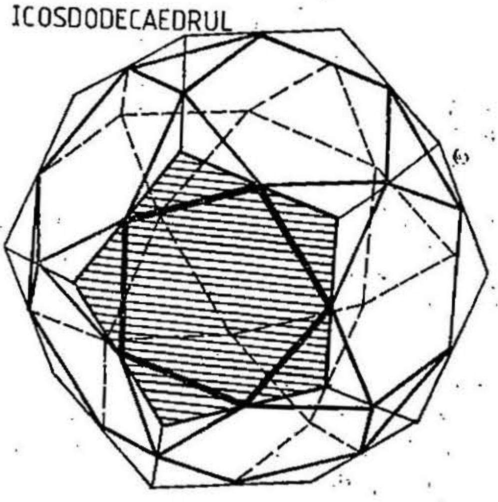


fig. 5.3.4

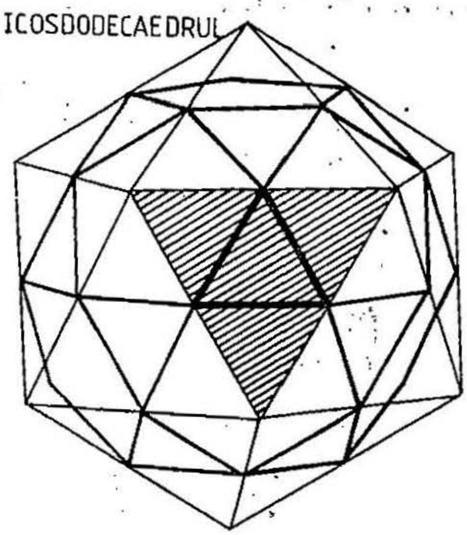


fig. 5.3.5

5.3. POLIEDRELE SEMIREGULATE ŞI DUALELE LOR

În figura 5.3.1 sînt reprezentate cele *13 poliedre semiregulate*, tipurile de feţe din care se compun şi numărul de feţe din fiecare tip în parte. Poliedrele semiregulate sînt poliedre convexe cu feţe poligoane regulate de mai multe tipuri şi unghiurile solide egale de acelaşi tip; deci, la fiecare vîrf se succed, indiferent de sens, totalitatea tipurilor de feţe ale poliedrului.

Proprietăţile poliedrelor semiregulate. Poliedrele semiregulate au următoarele proprietăţi:

— toate feţele poliedrelor semiregulate sînt poligoane regulate;

— toate muchiile lor sînt egale;

— toate unghiurile solide ale poliedrelor semiregulate sînt egale;

— poliedrele semiregulate sînt inscriptibile în sferă;

— poliedrele semiregulate nu se pot circumscrie unei sfere.

OBŢINEREA POLIEDRELOR SEMIREGULATE

Poliedrele semiregulate se pot obţine prin: trunchiere, înjumătăţirea muchiilor şi teşire.

Trunchiere. Trunchierea presupune tăierea vîrfurilor poliedrelor regulate astfel încît feţele acestora să îşi dubleze numărul de muchii (triunghiul echilateral devine hexagon regulat, pătratul devine octogon regulat, pentagonul regulat devine decagon regulat, iar hexagonul regulat devine dodecagon regulat).

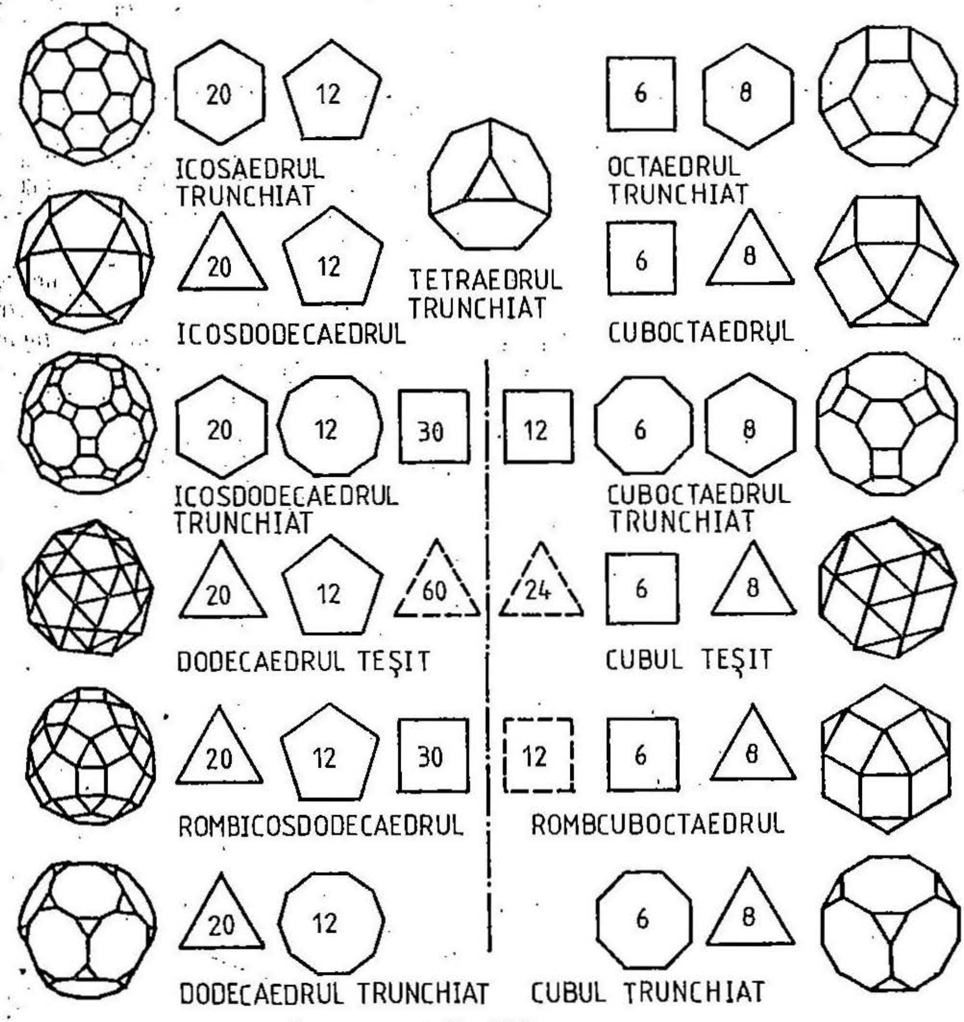


fig. 5.3.1

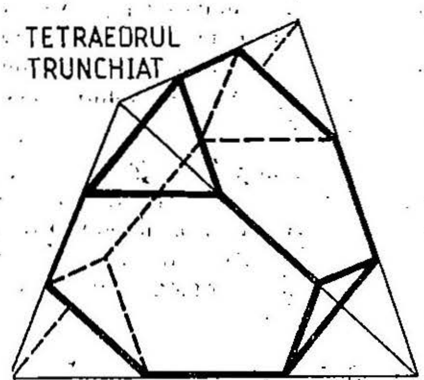


fig. 5.3.6

Următoarele cinci poliedre semiregulate se obțin prin *trunchiere*. Practic, în cazul *tetraedrului trunchiat* (fig. 5.3.6) și *octaedrului trunchiat* (fig. 5.3.7), muchiile poliedrelor regulate respective se împart în trei segmente egale, obținîndu-se astfel transformarea din triunghi echilateral în hexagon regulat. Același lucru este valabil în cazul *icosaedrului trunchiat* (fig. 5.3.8).

În cazul *cubului trunchiat* (fig. 5.3.9), raportul în care se împart muchiile cubului este: 1, $\sqrt{2}$, 1, iar la *dodecaedrul trunchiat* (fig. 5.3.10), acest raport este: 1, $(\sqrt{5}+1)/2$, 1. Se poate obține un dodecagon regulat și dintr-un pentagon regulat identic și concentric, așezat rotit față de primul.

Rombcuboctaedrul (fig. 5.3.11) se prezintă ca un cub cu muchiile teșite, astfel încît să apară fețe pătrate identice cu pătratele de pe fețele cubului. În dreptul celor opt vîrfuri ale cubului apar opt fețe triunghiuri echilaterale. Fețele pătrate sînt în număr

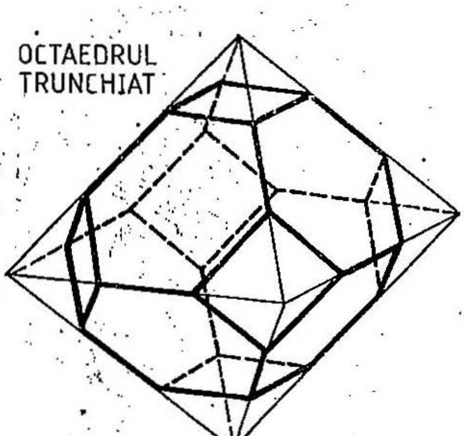


fig. 5.3.7

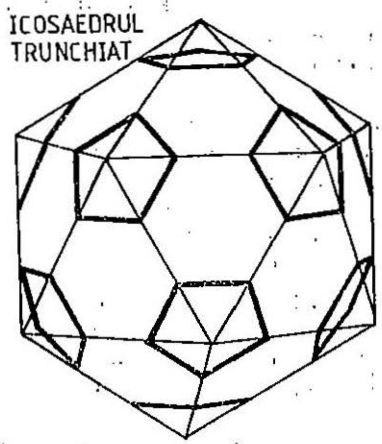


fig. 5.3.8

de 18: șase din ele corespund fețelor cubului inițial, iar alte 12 corespund muchiilor acestui cub. Construcția *rombcuboctaedrului* se face înscriind pe fețele unui cub pătrate în raportul din figura 5.3.11.

Rombicosdodecaedrul (fig. 5.3.12) se prezintă ca un dodecaedru cu muchiile teșite. El se compune din 12 fețe pentagoane regulate (corespunzătoare fețelor dodecaedrului inițial), 20 fețe triunghiuri echilaterale (corespunzătoare vîrfurilor dodecaedrului inițial) și 30 fețe pătrate (corespunzătoare muchiilor dodecaedrului inițial). Construcția rombicosdodecaedrului se face înscriind pe fețele unui dodecaedrul regulat pentagoane regulate în raportul din figura 5.3.12.

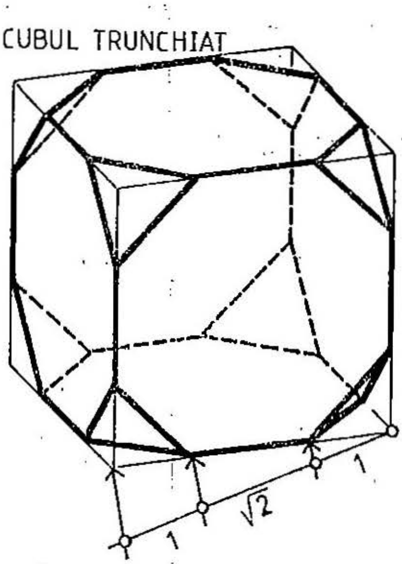


fig. 5.3.9

Procedeul de trunchiere se poate aplica nu numai poliedrelor regulate, ci și unor poliedre semiregulate, rezultînd *alte* poliedre semiregulate: *cuboctaedrul trunchiat* (fig. 5.3.13) și *icosdodecaedrul trunchiat* (fig. 5.3.14). Construcția acestor două poliedre semiregulate se poate face aplicînd pe muchia cubului, respectiv a dodecaedrului regulat, rapoartele din figurile 5.3.13 și 5.3.14.

Cubul teșit se poate construi pornind de la un cub, pe fețele căruia se înscriu pătrate conform figurii 5.3.15. Pe fiecare latură a pătratului se iau segmente proporționale cu numerele: 420, 456, 124 (fig. 5.3.16). Prin unirea vîrfurilor pătratelor înscrise pe fețele cubului rezultă fețele triunghiulare ale cubului teșit.

Construcția *dodecaedrului teșit* este asemănătoare cu cea a cubului teșit (fig. 5.3.18). Se înscriu pe fețele dodecaedrului regulat pentagoane regulate, întocmai ca în figura 5.3.19, luînd pe laturi segmente proporționale cu numerele: 116, 91, 43. Imaginea

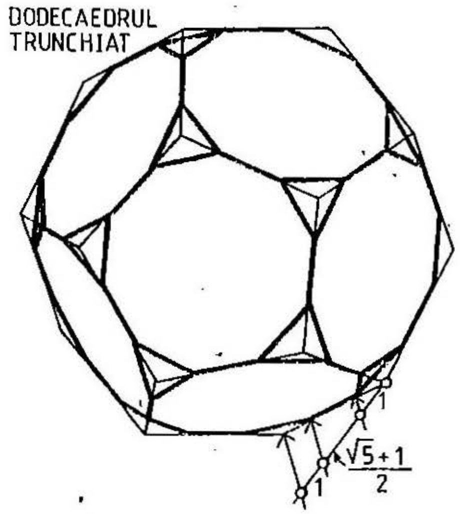


fig. 5.3.10

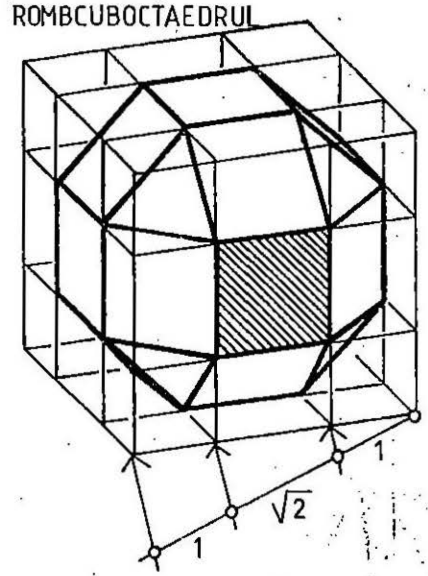


fig. 5.3.11

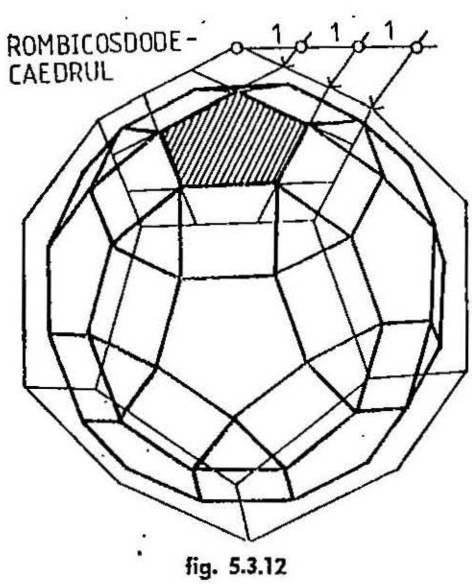


fig. 5.3.12

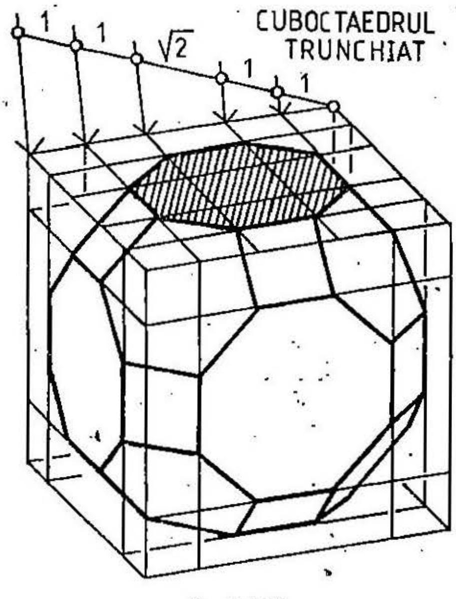


fig. 5.3.13

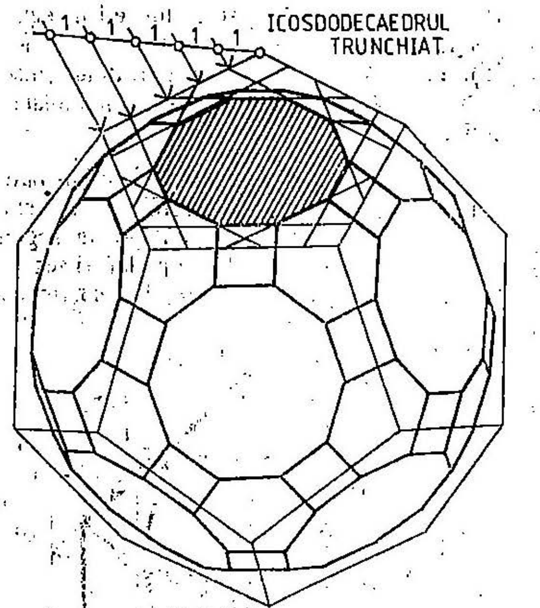


fig. 5.3.14

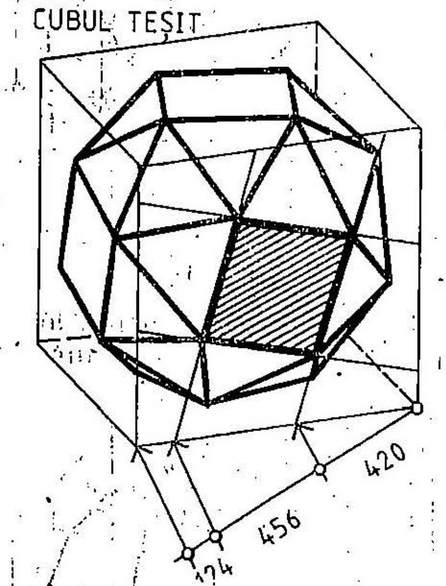


fig. 5.3.15

finală care se obţine este, ca şi la cubul teşit, o suită de feţe mai mari (pentagoane regulate) mărginite de feţe mai mici, triunghiulare (fig. 5.3.17). Numărul de 80 feţe triunghiulare ale dodecaedrului teşit rezultă din 12 pachete de cîte 5 triunghiuri adiacente laturilor celor 12 feţe pentagonale (în total 60 feţe), plus 20 feţe triunghiulare corespunzătoare vîrfurilor dodecaedrului iniţial.

Desfăşuratele celor 13 poliedre semiregulate sînt ilustrate în figurile 5.3.20-5.3.32.

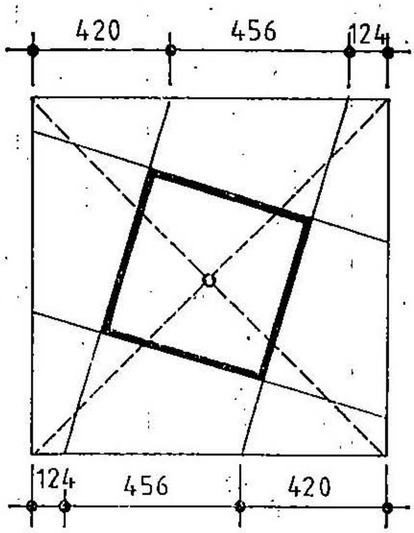


fig. 5.3.16

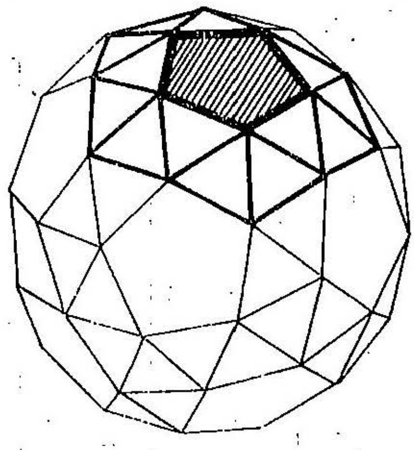


fig. 5.3.17

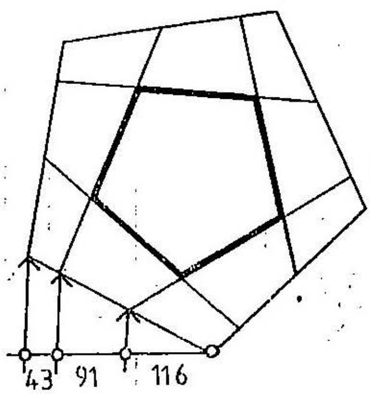


fig. 5.3.19

Sinteza transformărilor prin care se obţin poliedrele semiregulate. Figura 5.3.33 ilustrează transformările prin care se obţin poliedrele semiregulate, pornind de la poliedrele regulate. Se conturează *două familii*, una bazată pe cub şi octaedru, cea-

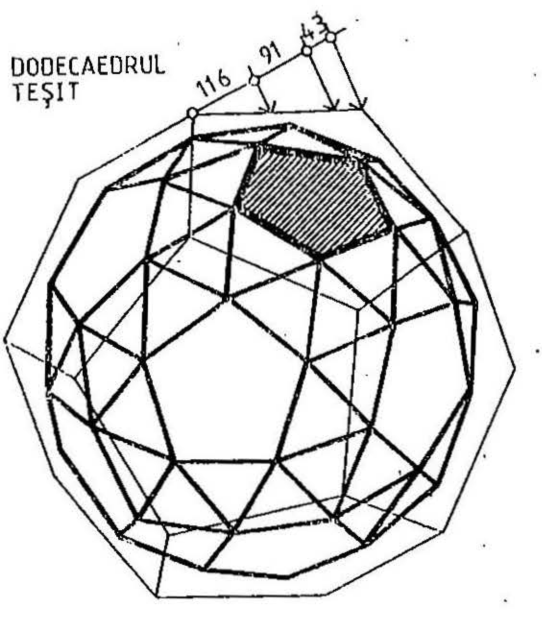


fig. 5.3.18

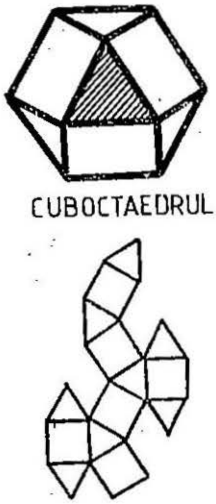


fig. 5.3.20



fig. 5.3.21



fig. 5.3.22

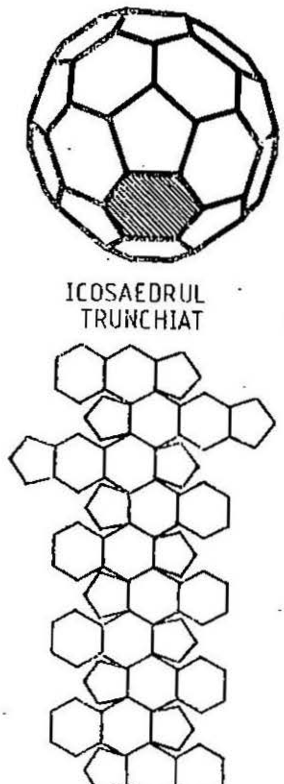


fig. 5.3.23

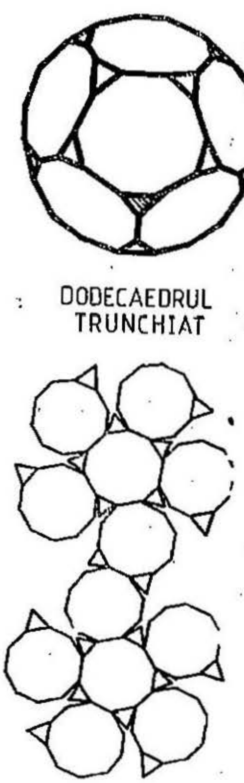


fig. 5.3.24



fig. 5.3.25

laltă bazată pe icosaedru şi dodecaedru. Din cele două perechi de duale se obţin cuboctaedrul şi icosdodecaedrul, care generează mai departe fiecare alte două poliedre semiregulate.

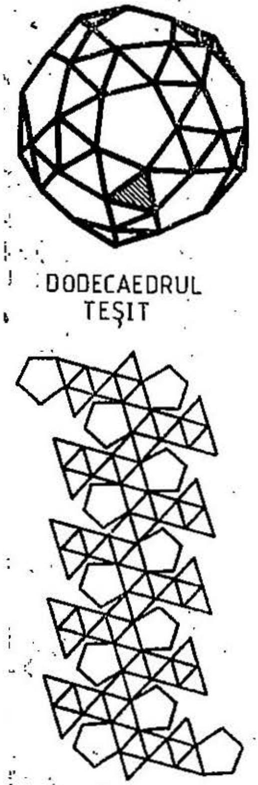


fig. 5.3.26

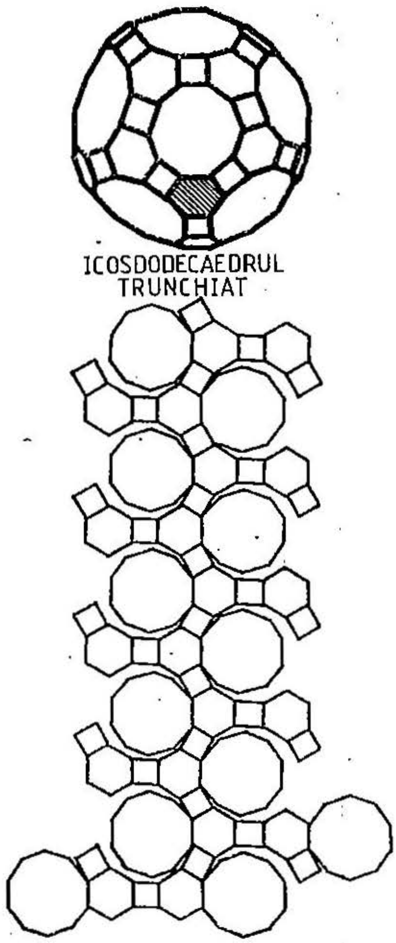


fig. 5.3.27

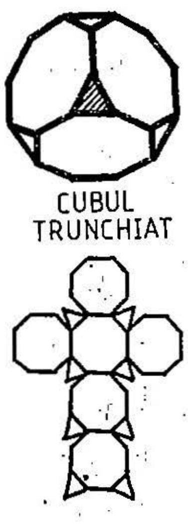


fig. 5.3.28

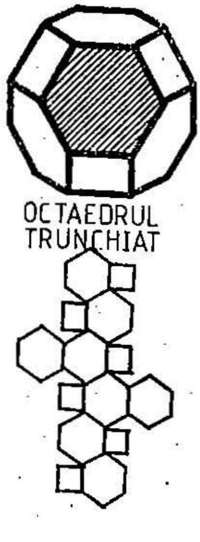


fig. 5.3.29

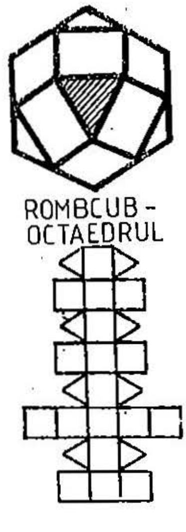


fig. 5.3.30

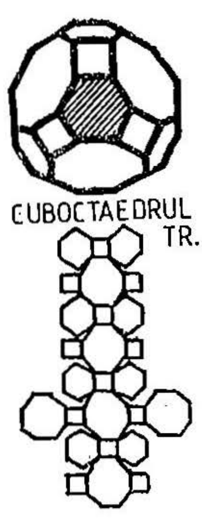


fig. 5.3.31

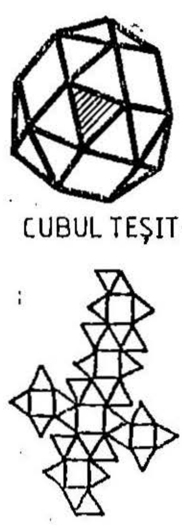


fig. 5.3.32

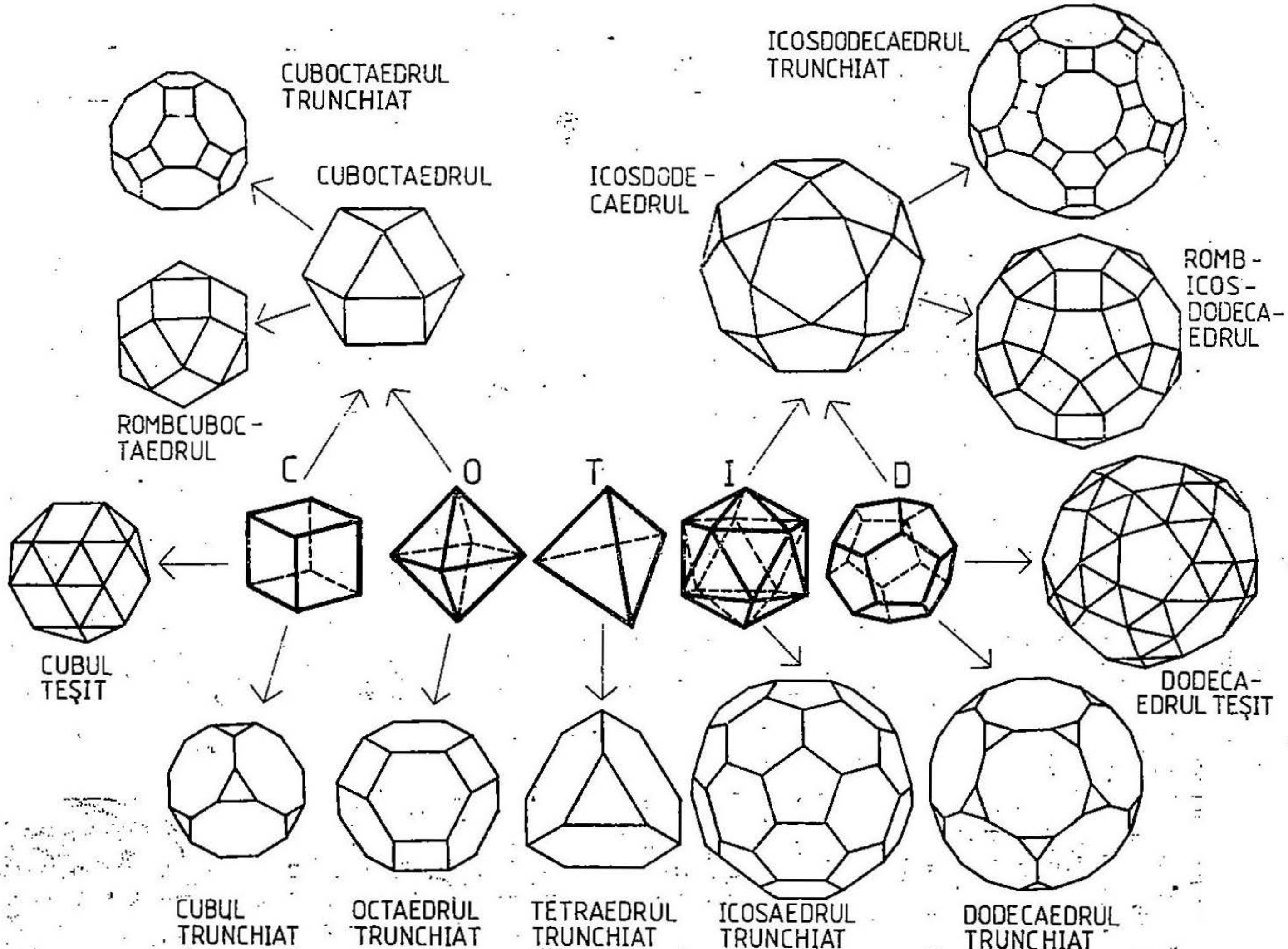

CUBOCTAEDRUL TRUNCHIAT
CUBOCTAEDRUL
ROMBCUBOC-TAEDRUL
ICOSDODECAEDRUL TRUNCHIAT
ICOSDODE-CAEDRUL
ROMB-ICOS-DODECA-EDRUL
C
O
T
I
D
CUBUL TEŞIT
DODECA-EDRUL TEŞIT
CUBUL TRUNCHIAT
OCTAEDRUL TRUNCHIAT
TETRAEDRUL TRUNCHIAT
ICOSAEDRUL TRUNCHIAT
DODECAEDRUL TRUNCHIAT

fig. 5.3.33

Ca exemplificare, s-a efectuat o analiză a structurii *cuboctaedrului* (fig. 5.3.34). În figurile 5.3.35... ...5.3.38 sînt evidențiate fețele opuse ale cuboctaedrului (fețele triunghiulare), iar în figurile 5.3.39...5.3.42 sînt desenate secțiunile hexagonale prin cuboctaedru. Schițele evidențiază o proprietate structurală deosebit de importantă a *cuboctaedrului*, respectiv aceea că muchia sa este egală cu raza sferei circumscrise cuboctaedrului. Din această proprietate rezultă că distanțele de la centrul cuboctaedrului la toate vîrfurile sale sînt egale cu muchia, ceea ce conferă acestui poliedru semiregulat proprietăți de izotropie și o mare stabilitate structurală.

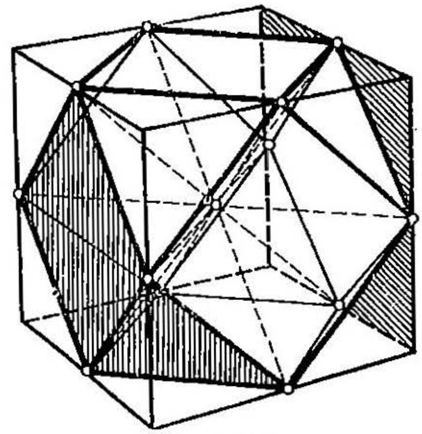


fig. 5.3.34

Analiza configurației cuboctaedrale prin împachetări de sfere. Se poate obține o configurație cuboctaedrală prin împachetarea a 13 sfere. Cele 13 sfere egale sînt dispuse sub forma unui colier de 6 sfere în jurul unei sfere-nucleu (N), la care se adaugă un pachet de trei sfere așezate în vîrf și un pachet de trei sfere așezate la bază (fig. 5.3.43). Figurile 5.3.44...5.3.46 reprezintă vederi ale celor 13 sfere și evidențiază simetriile configurației cuboctaedrale.

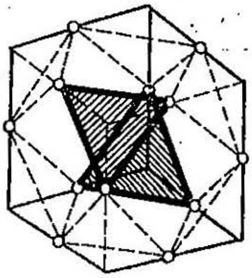


fig. 5.3.35

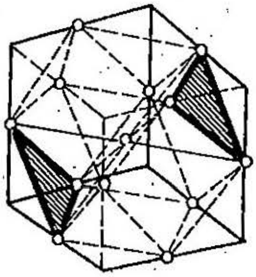


fig. 5.3.36

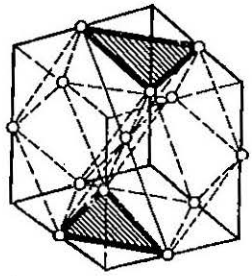


fig. 5.3.37

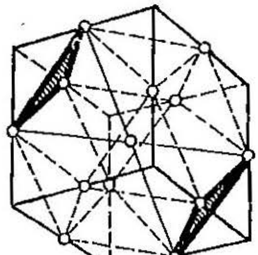


fig. 5.3.38

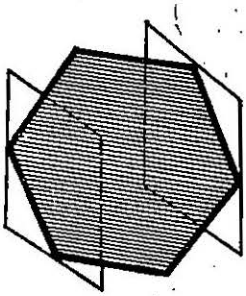


fig. 5.3.39

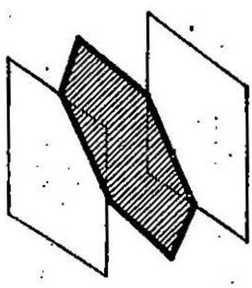


fig. 5.3.40

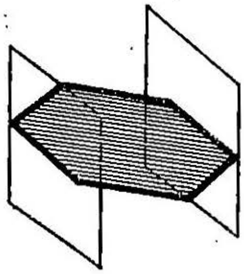


fig. 5.3.41

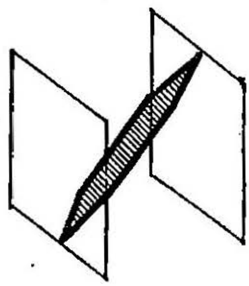


fig. 5.3.42

DUALELE POLIEDRELOR SEMIREGULATE

Ca şi poliedrele regulate, poliedrele semiregulate au *duale* sau *reciproce*. Aceste poliedre topologic duale nu se mai înscriu în sferă, iar feţele lor sînt *strîmbe*. Totuşi, multe dintre ele sînt importante, atît prin proprietăţile lor constructive, cît şi prin proprietatea de a umple spaţiul (echipartiţie spaţială), împreună cu alte poliedre regulate şi semiregulate.

Transformarea cea mai obişnuită prin care se obţin dualele poliedrelor semiregulate este construirea în fiecare vîrf al acestora a unui plan egal înclinat faţă de feţele care concură în acel vîrf. Această construcţie este exemplificată pe două poliedre semiregulate: *cuboctaedrul* (fig. 5.3.47) şi *octaedrul trunchiat* (fig. 5.3.48).

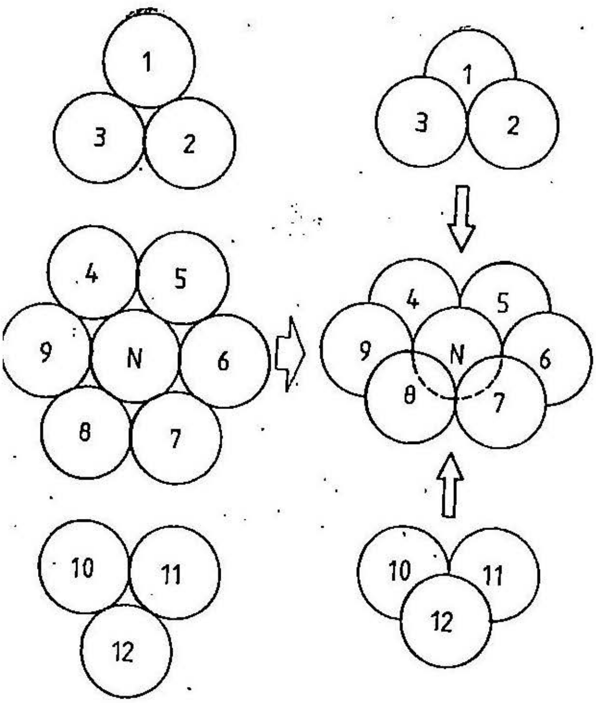


fig. 5.3.43

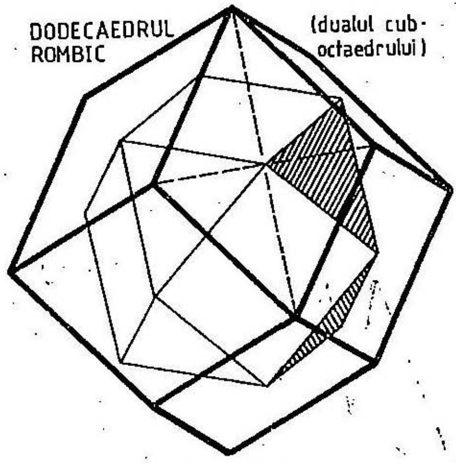


fig. 5.3.47

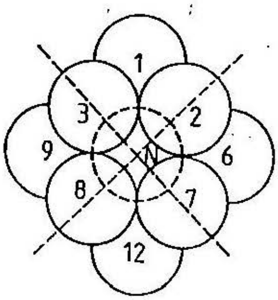


fig. 5.3.44

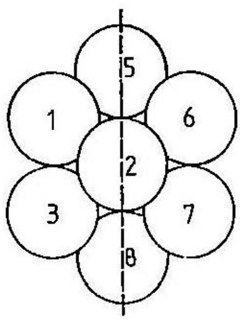


fig. 5.3.45

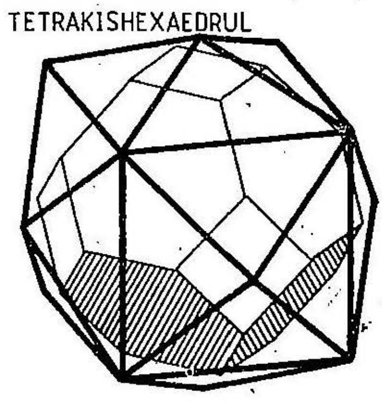


fig. 5.3.48

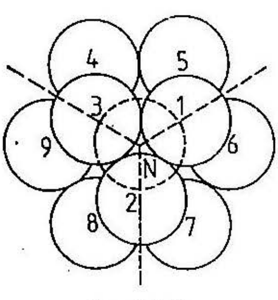


fig. 5.3.46

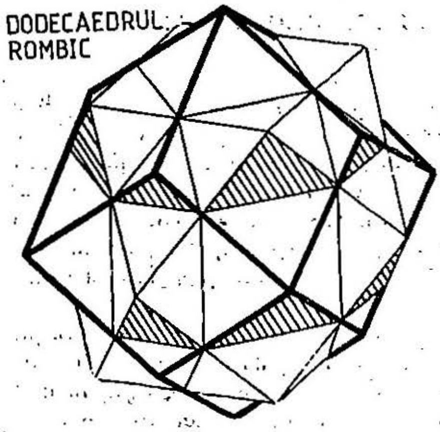


fig. 5.3.49

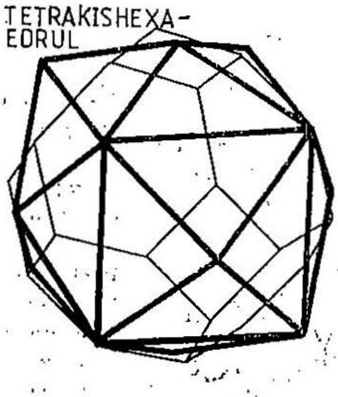


fig. 5.3.50

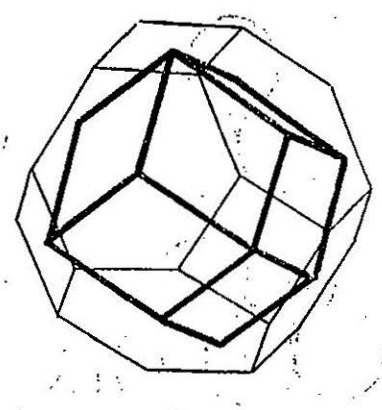


fig. 5.3.51

Se pot obține duale omotetice (asemenea) cu cele obținute prin transformarea descrisă; ele sînt exemplificate în figura 5.3.49, unde muchiile poliedrului semiregulat se intersectează cu cele ale dualului său și în figura 5.3.50, în care intersecția octoedrului trunchiat cu dualul său nu este operată.
Spre deosebire de dualele poliedrelor regulate, unirea centrelor fețelor poliedrelor semiregulate nu generează duale; în figura 5.3.51, de exemplu, o asemenea operație aplicată octaedrului trunchiat generează un *dodecaedru rombic* (care este dualul cuboctaedrului).
Construcția celor 13 duale ale poliedrelor semiregulate depășește cadrul acestui volum și poate fi exersată ca temă suplimentară. Pentru facilitarea exercițiului sînt date unele indicații cu privire la construcția fețelor celor 13 duale (fig. 5.3.52... ...5.3.64). Desenele sînt executate la scară; totuși,

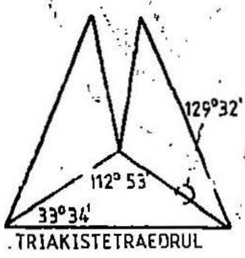


fig. 5.3.52

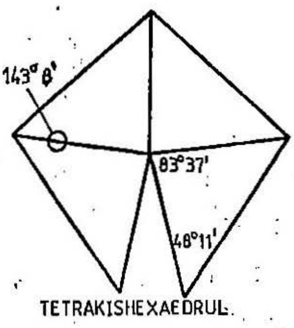


fig. 5.3.53

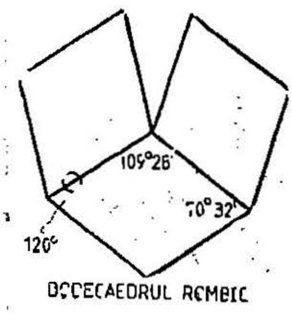


fig. 5.3.54

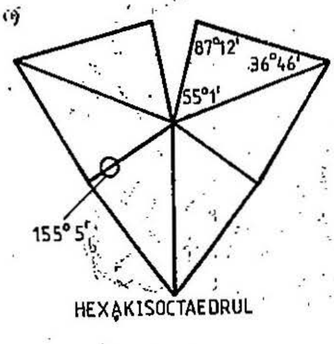


fig. 5.3.55

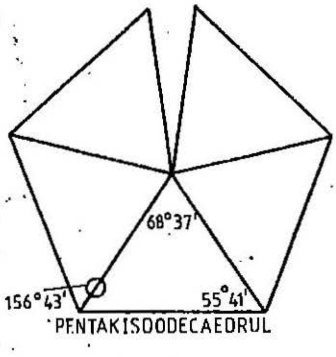


fig. 5.3.56

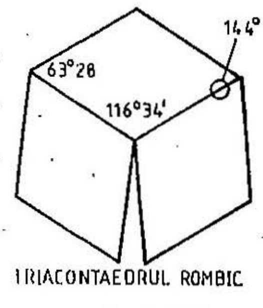


fig. 5.3.57

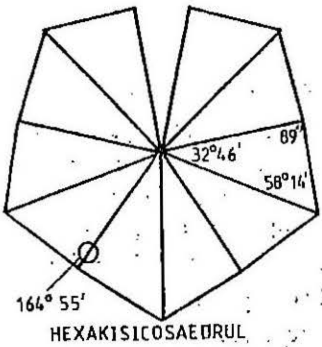


fig. 5.3.58

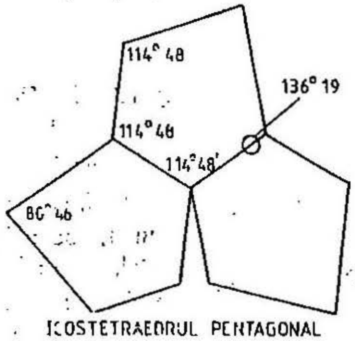


fig. 5.3.59

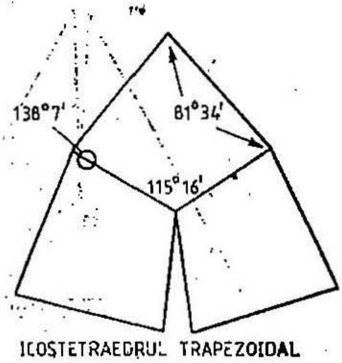


fig. 5.3.60

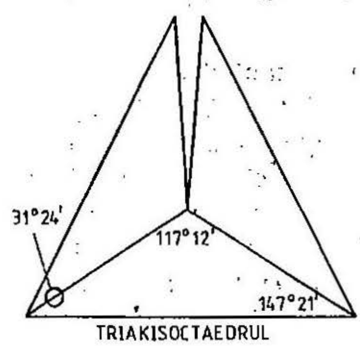


fig. 5.3.61

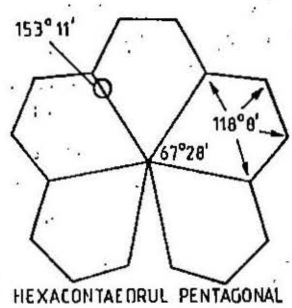


fig. 5.3.62

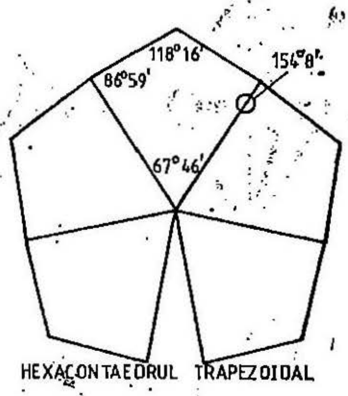


fig. 5.3.63

pentru precizia construcţiei dualelor, sînt indicate unghiurile poligoanelor feţelor, precum şi unghiurile diedre dintre feţe. În acest fel, se pot construi desfăşuratele dualelor şi se pot executa machete. Pentru construcţia desfăşuratelor dualelor poliedrelor semiregulate sînt utile datele de mai jos, referitoare la numărul de feţe, muchii şi vîrfuri ale lor.

Denumirea dualului	Poliedrul semiregulat	F	M	V
Triakistetraedrul (fig. 5.3.52)	Tetraedrul trunchiat	12	18	8
Tetrakishexaedrul (fig. 5.3.53)	Octaedrul trunchiat	24	36	14
Pentakisdodecaedrul (fig. 5.3.56)	Icosaedrul trunchiat	60	90	32
Dodecaedrul rombic (fig. 5.3.54)	Cuboctaedrul	12	24	14
Triacontaedrul rombic (fig. 5.3.57)	Icosdodecaedrul	30	60	32
Hexakisoctaedrul (fig. 5.3.55)	Cuboctaedrul trunchiat	48	72	26
Hexakisicosaedrul (fig. 5.3.58)	Icosdodecaedrul trunchiat	120	180	62
Icostetraedrul pentagonal (fig. 5.3.59)	Cubul teşit	24	60	38
Hexacontaedrul pentagonal (fig. 5.3.62)	Dodecaedrul teşit	60	150	92
Icostetraedrul trapezoidal (fig. 5.3.60)	Rombcuboctaedrul	24	48	26
Hexacontaedrul trapezoidal (fig. 5.3.63)	Rombicosdodecaedrul	60	120	62
Triakisoctaedrul (fig. 5.3.61)	Cubul trunchiat	24	36	14
Triakisicosaedrul (fig. 5.3.64)	Dodecaedrul trunchiat	60	90	32

5.13 DELTAEDRI

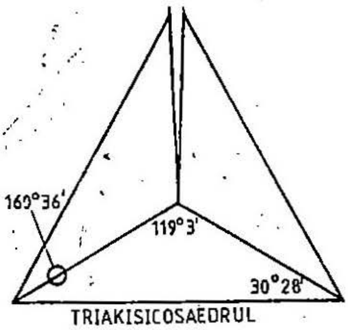


fig. 5.3.64

Figurile 5.3.65...5.3.69 reprezintă cinci din cei opt deltaedri (poliedre ale căror fețe sînt triunghiuri echilaterale) și desfășuratele lor. Primii trei deltaedri, care nu sînt ilustrați aici, sînt: tetraedrul regulat, octaedrul regulat și icosaedrul regulat. Astfel, figura 5.3.65 reprezintă *hexadeltaedrul*, care are 6 fețe; figura 5.3.66 reprezintă *decadeltraedrul*, care are 10 fețe, figura 5.3.67 reprezintă *tetrakaidecadeltaedrul* (*trigonaldeltaedrul*), care are 14 fețe; figura 5.3.68 reprezintă *dodecadeltaedrul*, care are 12 fețe, iar figura 5.3.69 reprezintă *cubicantiprismicdeltaedrul* (*hexadecadeltaedrul*), care are 16 fețe.

Primii trei deltaedri ilustrați sînt foarte ușor de construit. Dintre ceilalți doi, cubicantiprismicdeltaedrul se construiește pornind de la antiprisma din figura 5.3.69, alcătuită din două fețe pătrate și 8 fețe triunghiuri echilaterale. Dodecadeltaedrul (fig. 5.3.68) este cel mai greu de construit și reprezentat. Ca exercițiu, desenați două vederi ortogonale ale sale după ce ați studiat problema pe machetă.

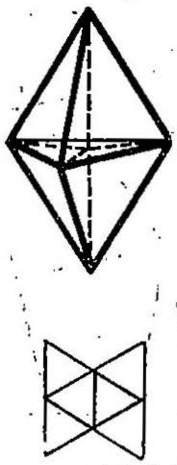


fig. 5.3.65

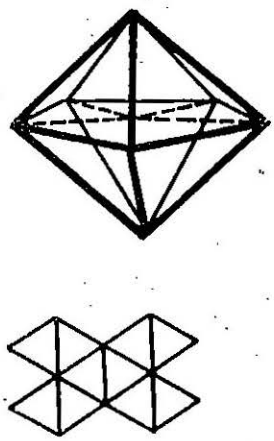


fig. 5.3.66

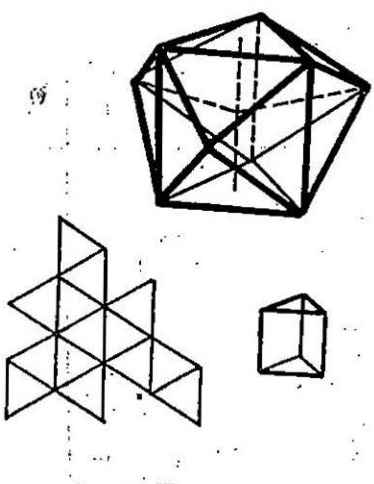


fig. 5.3.67

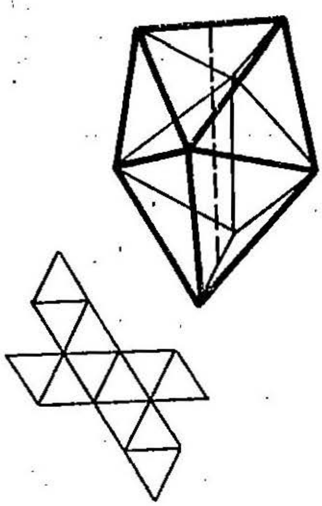


fig. 5.3.68

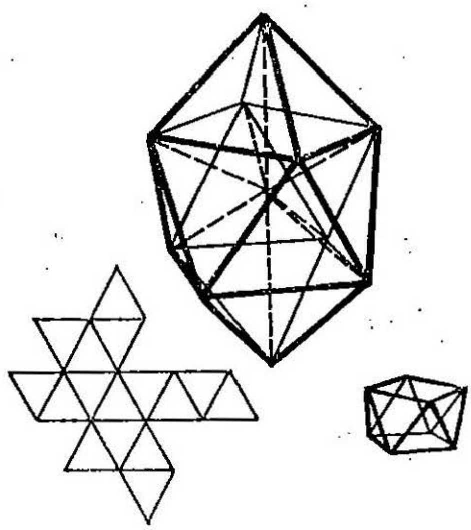


fig. 5.3.69

5.4. ECHIPARTIŢII PLANE

Echipartiţiile plane au fost denumite şi mozaicuri, grile, latice sau reţele. Pentru ca un număr de poligoane repetitive să acopere complet o suprafaţă plană, trebuie să fie satisfăcute unele condiţii legate de vîrfurile poligoanelor.

Ne propunem să acoperim o suprafaţă plană cu poligoane identice, regulate şi cu un număr n de laturi. Unghiurile la vîrf ale fiecărui poligon regulat vor fi $(n-2)/n \cdot 180°$. Numărul de poligoane care se întîlnesc în fiecare vîrf va fi egal cu:

$$\frac{360°}{(n-2)/n \cdot 180°} = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}.$$

Întrucît orice poligon trebuie să aibă un număr de laturi mai mare decît 2, valorile care rezultă pentru n sînt 3, 4 şi 6. Prin urmare, *triunghiul echilateral* (3 laturi), *pătratul* (4 laturi) şi *hexagonul regulat* (6 laturi) sînt singurele poligoane regulate care pot să acopere complet, ele singure, o suprafaţă plană. Ele dau naştere celor *trei echipartiţii plane regulate*.

Dacă ne propunem să acoperim un plan cu o combinaţie de poligoane regulate, soluţiile sînt mai numeroase. Dar numărul maxim de poligoane regulate care se pot aşeza în jurul unui vîrf este 6. Prin urmare, posibilităţile de aşezare a trei...pînă la şase poligoane regulate în jurul aceluiaşi vîrf sînt date de ecuaţia în numere întregi:

$$\left(\frac{n_1-2}{n_1}+\frac{n_2-2}{n_2}+\frac{n_3-2}{n_3}\right)180° = 360°,$$

de unde rezultă:

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}.$$

În mod asemănător, în cazul a patru poligoane regulate aşezate în jurul unui vîrf, numărul de combinaţii este dat de ecuaţia în numere întregi:

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1.$$

În cazul combinaţiilor de cinci, respectiv şase poligoane regulate în jurul aceluiaşi vîrf, ecuaţiile în numere întregi sînt:

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2};$$

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=2.$$

Rezultă 17 soluţii în numere întregi, din care 3 sînt chiar cele trei echipartiţii regulate (cu poligoane regulate de acelaşi tip): K, P şi S din tabelul de mai jos. Alte şase combinaţii (A, B, C, D, F şi J) pot fi eliminate din discuţie, deoarece satisfac condiţia impusă doar într-unul din vîrfuri şi nu pot genera o reţea care să acopere complet planul.

Combinaţia	Tipul poligoanelor						Combinaţia	Tipul poligoanelor					
	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6		n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
A	3	7	42				K	6	6	6			
B	3	8	24				L	3	3	4	12		
C	3	9	18				M	3	3	6	6		
D	3	10	15				N	3	4	4	6		
E	3	12	12				P	4	4	4	4		
F	4	5	20				Q	3	3	3	4	4	
G	4	6	12				R	3	3	3	3	6	
H	4	8	8				S	3	3	3	3	3	3
J	5	5	10										

Cele opt combinaţii care rămîn vor fi numerotate de la 1 la 8. Ele sînt cele care dau naştere unui număr de 8 *echipartiţii plane semiregulate cu un singur tip de nod* şi 14 *echipartiţii plane semiregulate cu mai multe tipuri de noduri*. Prin urmare, cele 8 combinaţii reprezintă posibilităţile de aşezare a mai multor poligoane regulate în jurul aceluiaşi vîrf sau nod, prezentate în tabelul următor.

Numărul de ordine	Codul dat	Tipul poligoanelor (numărul de laturi)				
		n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
1	M	3	6	3	6	
2	N	3	4	6	4	
3	Q	3	3	4	3	4
4	G	4	6	12		
5	R	3	3	3	3	6
6	E	3	12	12		
7	H	4	8	8		
8	L	3	3	4	12	

8 ECHIPARTIȚIILE PLANE REGULATE

Cele trei echipartiții plane regulate sînt:

— echipartiția plană cu triunghiuri echilaterale (fig. 5.4.1);
— echipartiția plană cu hexagoane regulate (fig. 5.4.2);
— echipartiția plană cu pătrate (fig. 5.4.3).

Prin transformări mai simple sau mai complicate ale echipartițiilor plane regulate se pot obține panouri sau pardoseli decorative, motive decorative etc. Principiul de bază al acestor transformări este acela al obținerii unor *elemente repetitive identice*, respectiv de un singur tip. Aceste elemente nu vor mai fi poligoane regulate, ci poligoane neregulate sau chiar forme curbe. Tehnica mozaicului a cunoscut o amplă dezvoltare a acestor tipuri de acoperire a suprafețelor plane, prin transformări ale rețelelor sau echipartițiilor plane. Figurile 5.4.4...5.4.7 ilustrează cîteva transformări posibile pe o echipartiție plană cu pătrate.

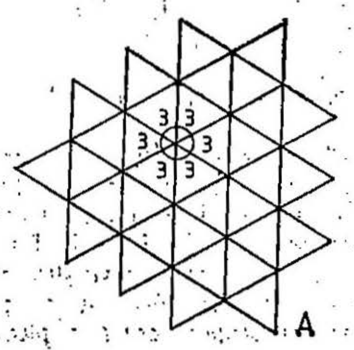


fig. 5.4.1

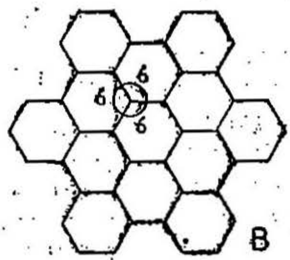


fig. 5.4.2

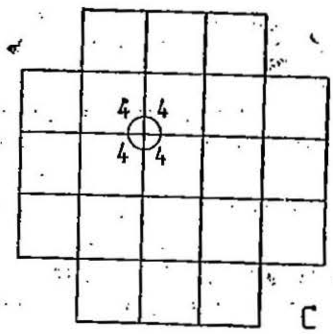


fig. 5.4.3

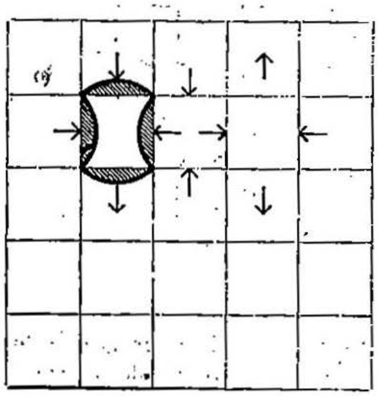


fig. 5.4.4

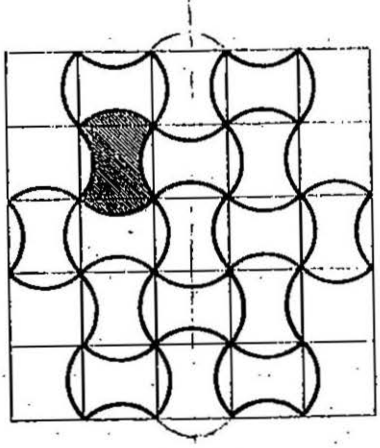


fig. 5.4.5

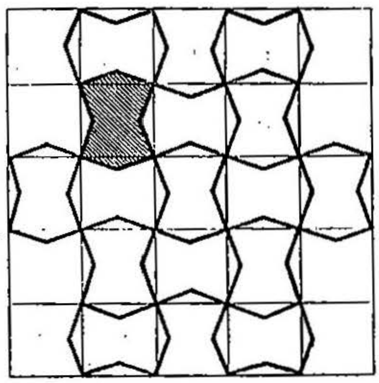


fig. 5.4.6

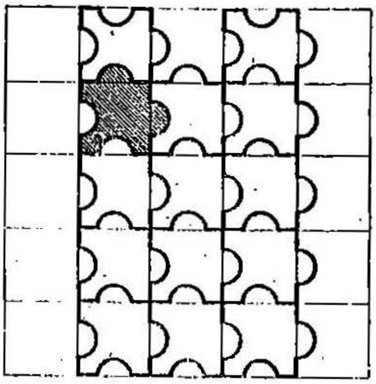


fig. 5.4.7

ECHIPARTIȚIILE SEMIREGULATE CU UN SINGUR TIP DE NOD

Aceste opt echipartiții corespund celor opt combinații de poligoane regulate așezate în jurul aceluiași vîrf sau nod (fig. 5.4.8...5.4.15). Apar două variante, Q_1 și Q_2 (fig. 5.4.10 și 5.4.13), care prezintă același număr de poligoane regulate, dar așezate în ordine diferită: 3, 3, 4, 3, 4 respectiv 3, 3, 3, 4, 4. Lipsește combinația 8 (Ł), care stă la baza unei echipartiții semiregulate cu mai multe tipuri de nod. Pe cele opt figuri sînt notate tipurile de noduri care generează echipartiția respectivă (respectiv numărul de laturi ale poligoanelor care converg în nodul respectiv).

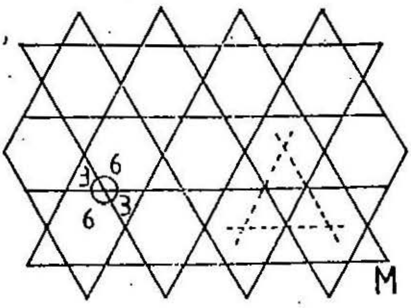


fig. 5.4.8

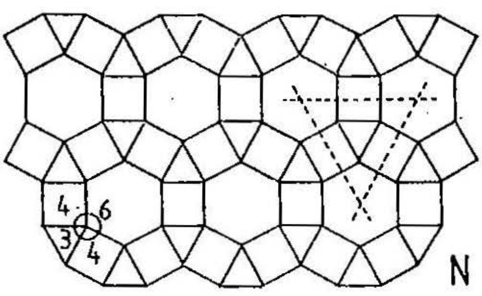


fig. 5.4.9

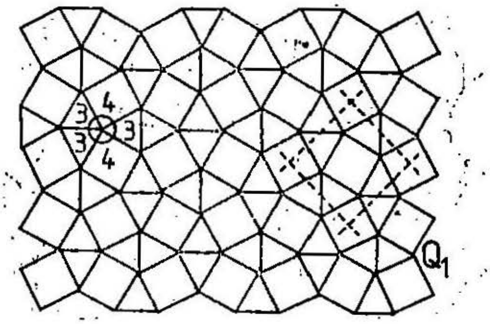


fig. 5.4.10

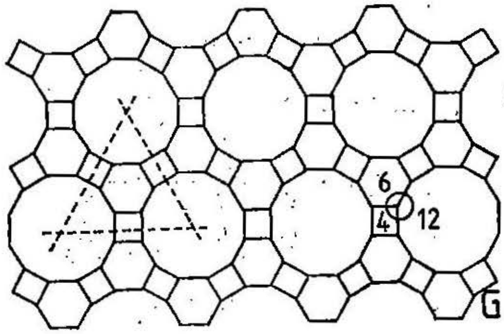


fig. 5.4.11

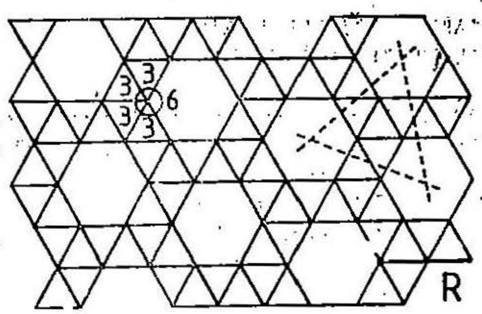


fig. 5.4.12

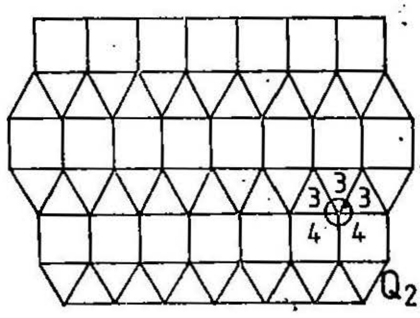


fig. 5.4.13

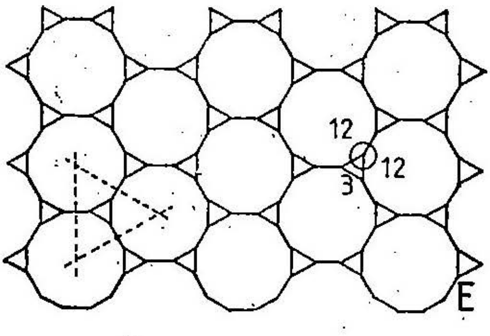


fig. 5.4.14

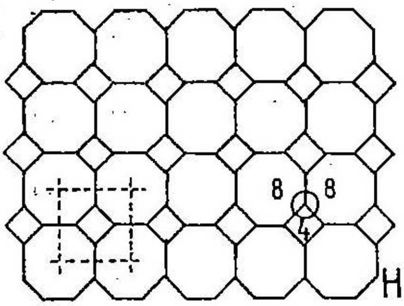


fig. 5.4.15

ECHIPARTIȚIILE SEMIREGULATE CU MAI MULTE TIPURI DE NODURI

Există 14 echipartiții sau rețele plane semiregulate cu mai multe tipuri de noduri. Demonstrațiile matematice depășesc cadrul acestei lucrări (*Critchlow*, 1965), în care sînt prezentate numai grafic cele 14 echipartiții menționate, evidențiind de fiecare dată (prin desen) tipurile de noduri pe figurile respective (fig. 5.4.16...5.4.29).

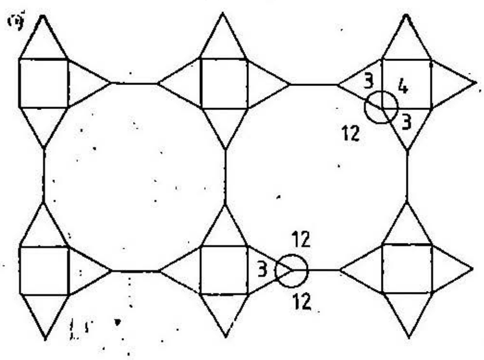


fig. 5.4.16

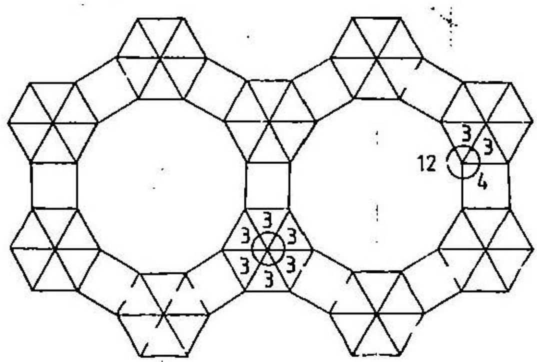


fig. 5.4.17

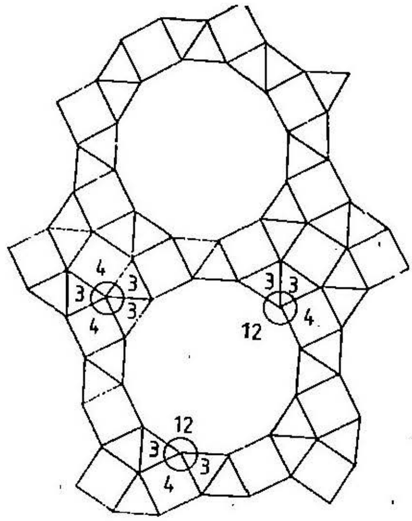


fig. 5.4.18

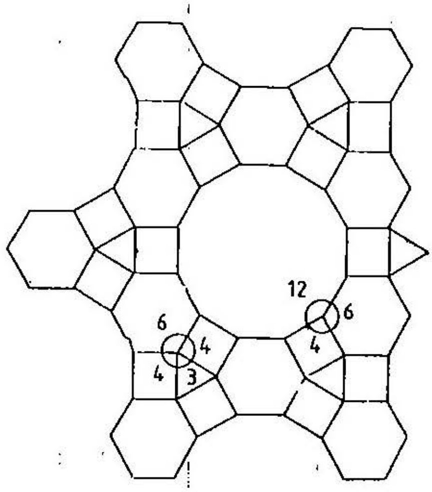


fig. 5.4.19

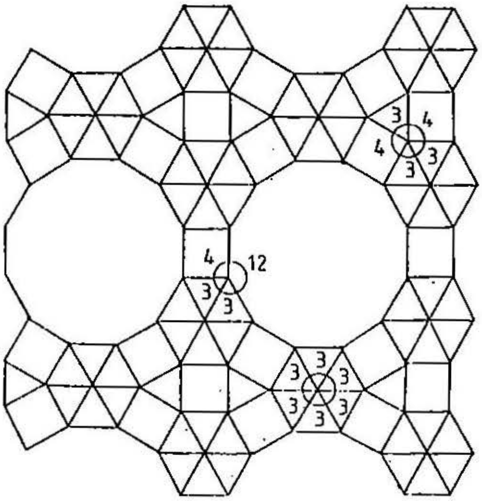


fig. 5.4.20

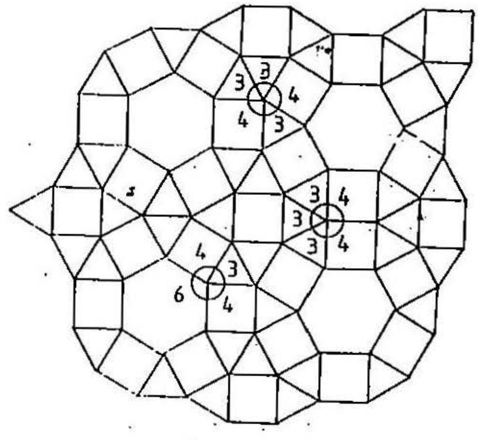


fig. 5.4.23

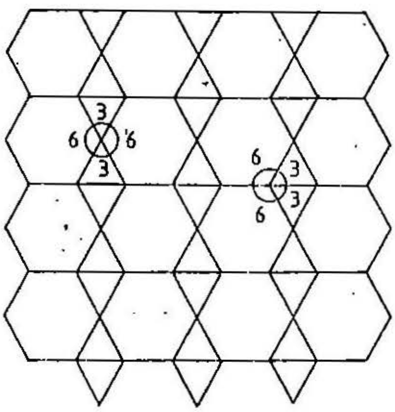


fig. 5.4.21

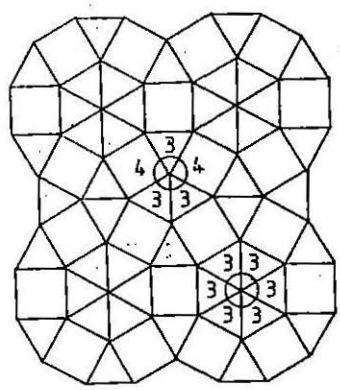


fig. 5.4.24

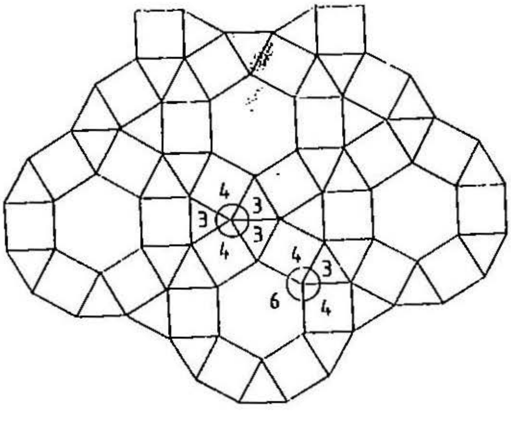


fig. 5.4.22

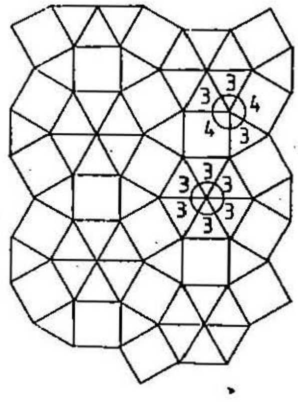


fig. 5.4.25

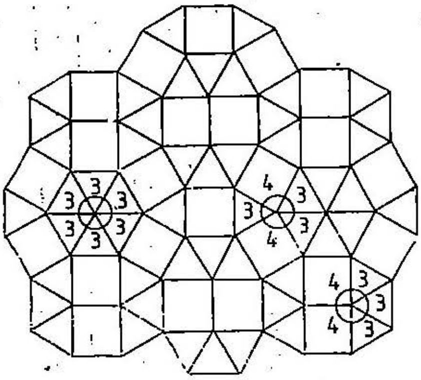


fig. 5.4.26

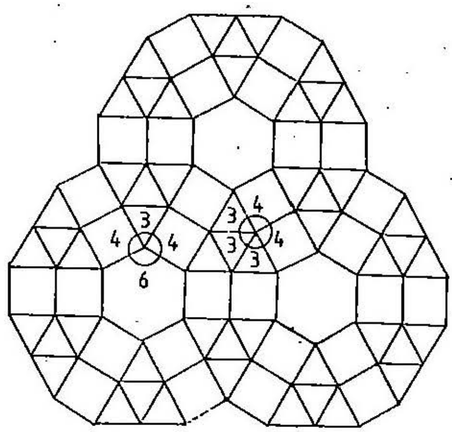


fig. 5.4.29

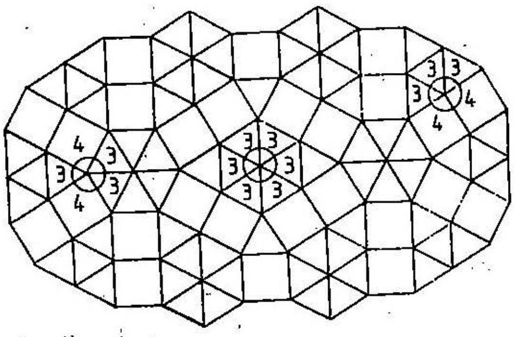


fig. 5.4.27

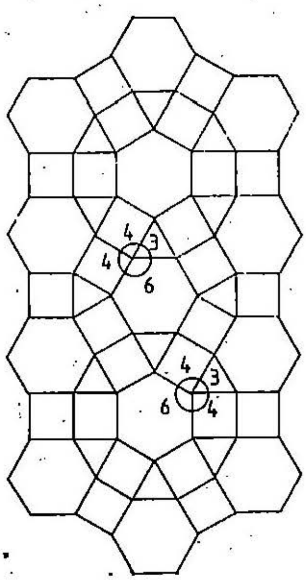


fig. 5.4.28

Se poate vedea că echipartițiile sînt structurate pe baza mai multor tipuri de poligoane regulate care converg în nodurile rețelei și că nodurile sînt de mai multe tipuri:

— două tipuri de noduri în echipartițiile plane semiregulate 1, 2, 4, 6, 7, 9, 10, 13 și 14;

— trei tipuri de noduri în echipartițiile 3, 5, 8, 11 și 12.

DUALELE ECHIPARTIȚIILOR PLANE REGULATE ȘI A CELOR SEMIREGULATE CU UN SINGUR TIP DE NOD

Dualele echipartițiilor plane se obțin unind centrele poligoanelor care alcătuiesc echipartițiile inițiale, deci centrele poligoanelor inițiale devin vîrfurile sau nodurile echipartiției duale.

Se poate observa că echipartițiile plane regulate sînt propriile lor duale: A este duala lui B, B este duala lui A, iar C este propria sa duală (fig. 5.4.30). Dualele echipartițiilor semiregulate cu un singur tip de nod sînt structurate din *poligoane neregulate* triunghiulare, pentagonale sau rombice (fig. 5.4.31).

DUALELE ECHIPARTIȚIILOR SEMIREGULATE CU MAI MULTE TIPURI DE NODURI

În figurile 5.4.32. . .5.4.45 sînt reprezentate dualele celor 14 echipartiții plane semiregulate cu mai multe tipuri de noduri. În fiecare caz în parte, este prezentat hașurat poligonul dualei și sînt indicate tipurile de noduri.

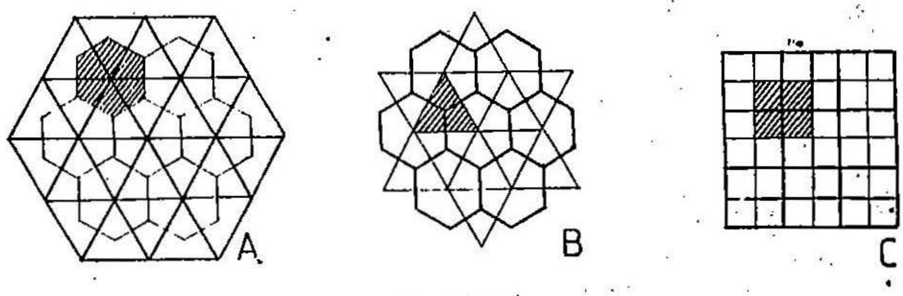


fig. 5.4.30

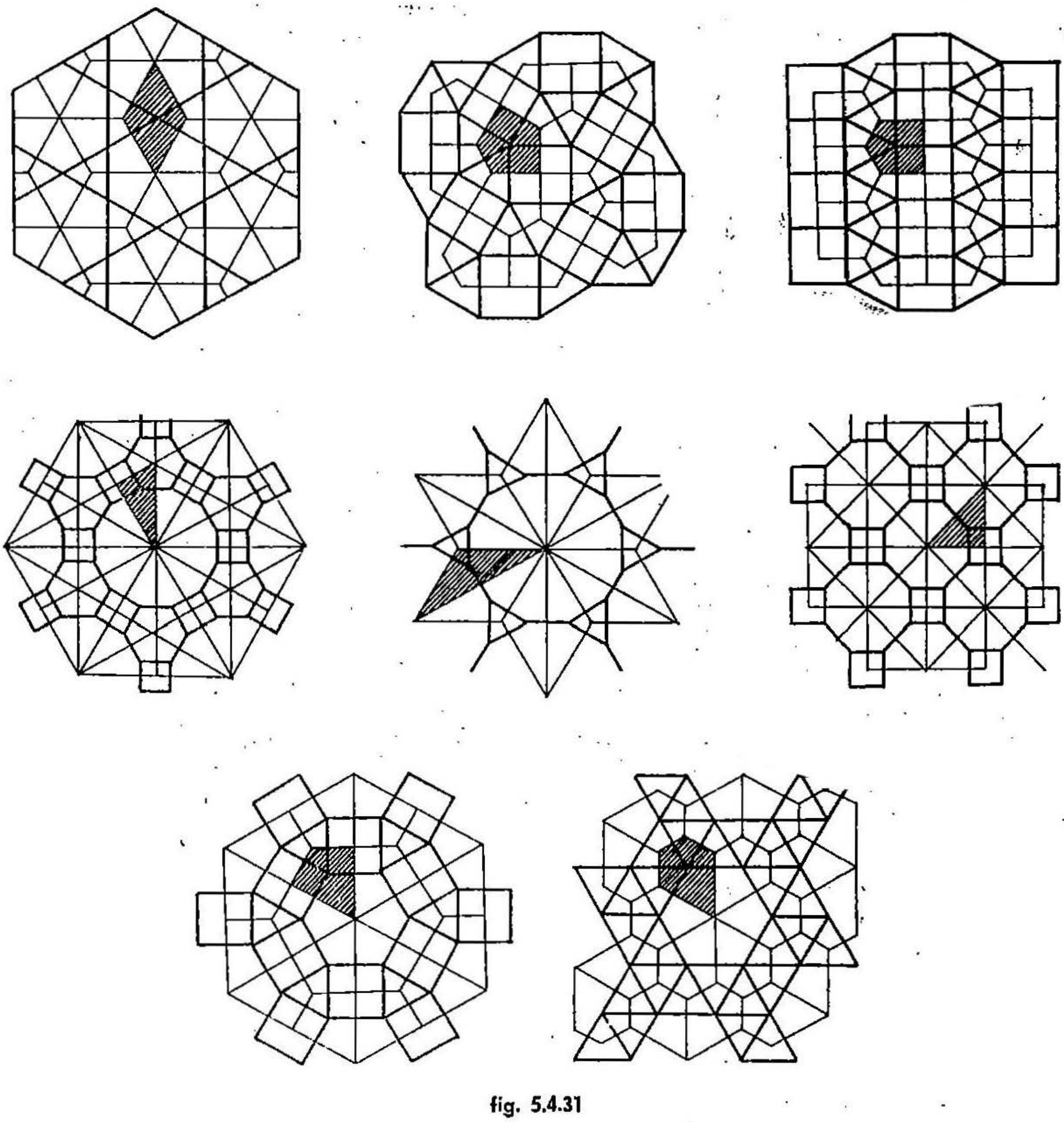


fig. 5.4.31

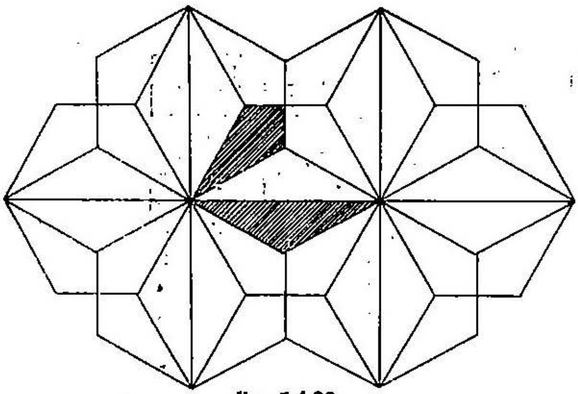


fig. 5.4.32

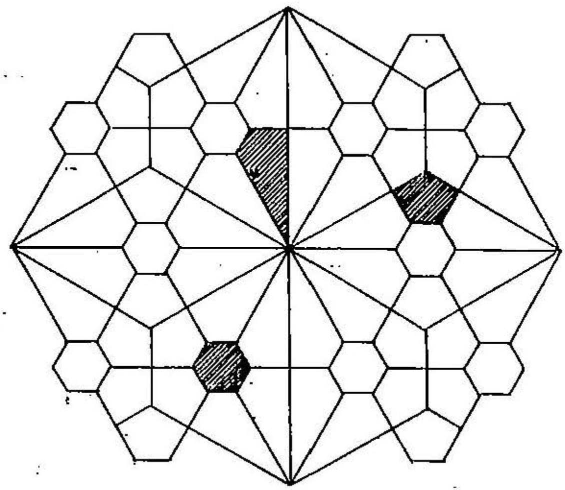


fig. 5.4.35

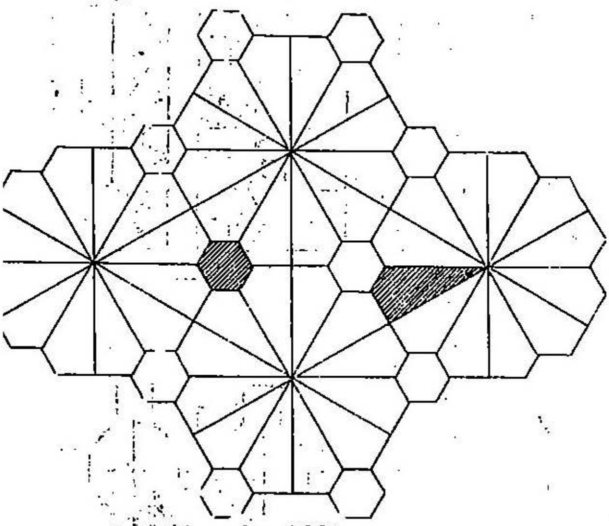


fig. 5.4.33

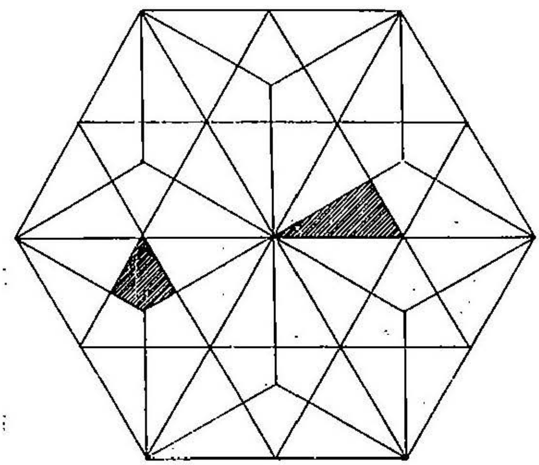


fig. 5.4.36

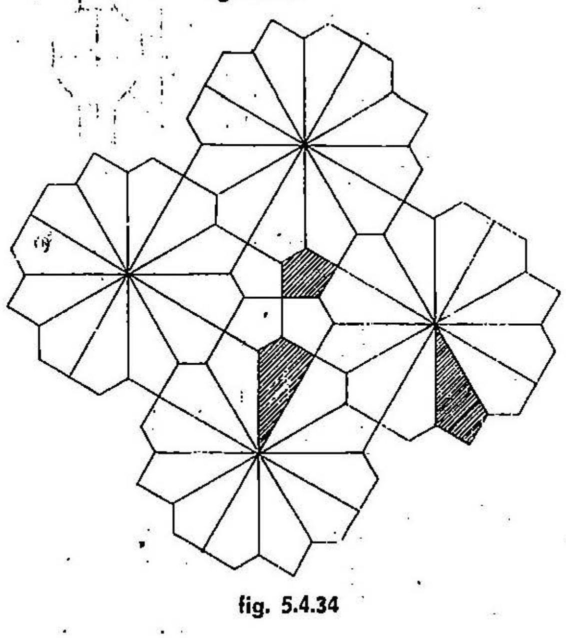


fig. 5.4.34

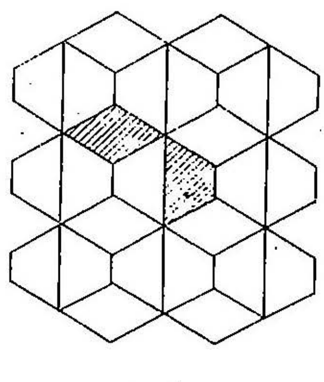


fig. 5.4.37

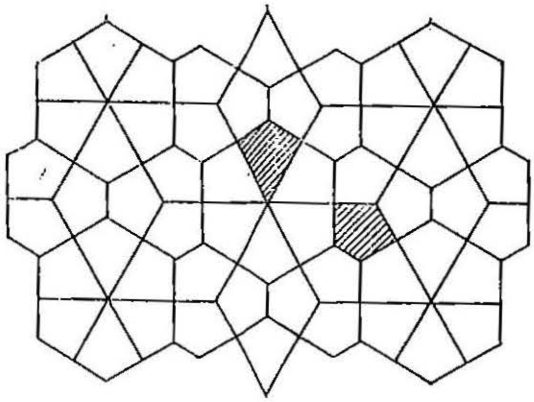


fig. 5.4.38

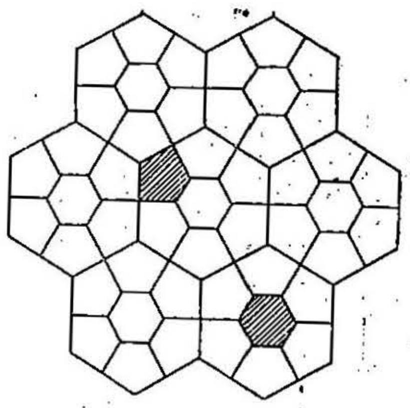


fig. 5.4.41

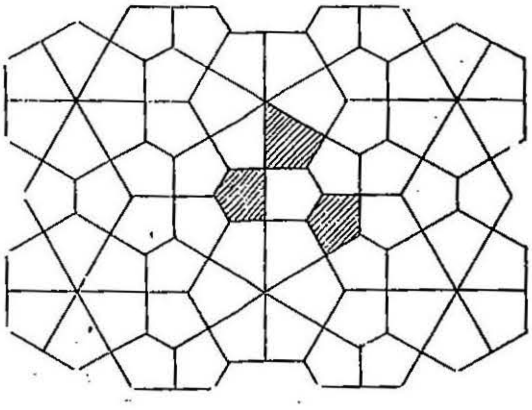


fig. 5.4.39

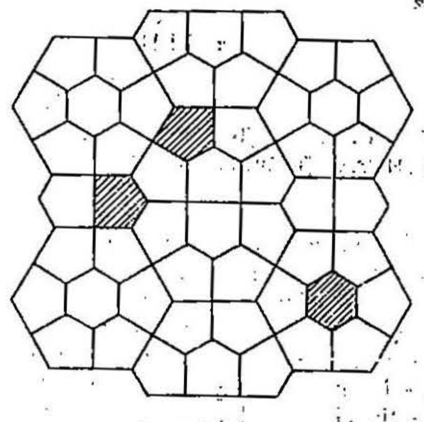


fig. 5.4.42

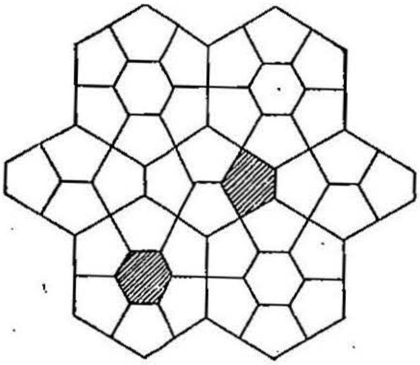


fig. 5.4.40

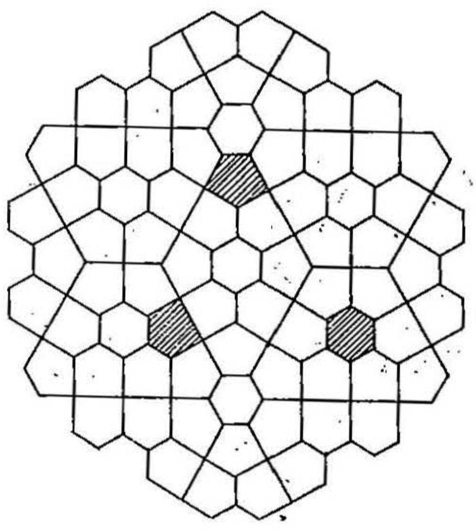


fig. 5.4.43

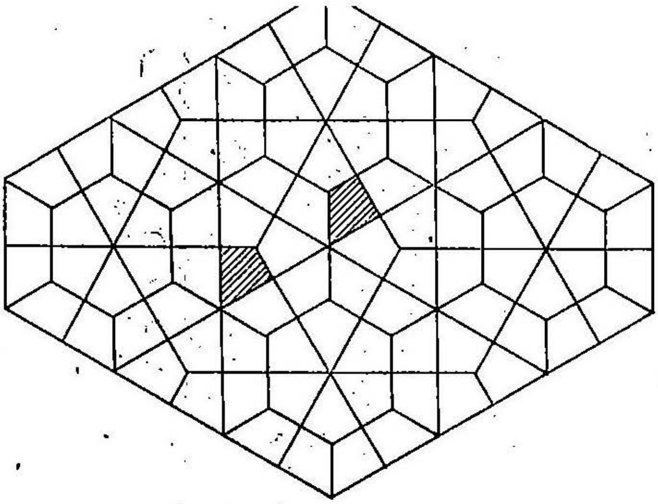


fig. 5.4.44

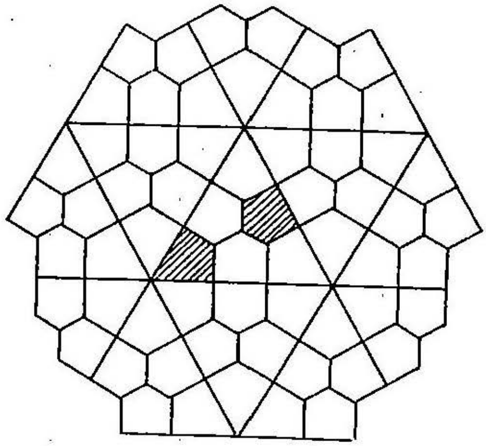


fig. 5.4.45

EXEMPLE DE APLICAȚII DECORATIVE ALE ECHIPARTIȚIILOR PLANE

Posibilitățile decorative care decurg din aplicarea și transformarea echipartițiilor plane regulate și semiregulate sînt practic nelimitate. De pildă, figurile 5.4.46...5.4.48 reprezintă motive decorative obținute prin închiderea unor linii poligonale în echipartițiile plane semiregulate cu mai multe tipuri de noduri.

Figurile 5.4.49...5.4.51 ilustrează tratări posibile ale echipartiției plane regulate (*Critchlow*, 1965). Laturile poligoanelor regulate sînt înlocuite cu curbe astfel încît figurile plane să fie echivalente (să aibă aceeași arie) și liniile să treacă prin nodurile rețelei. Uneori curbele pot fi foarte curioase (fig. 5.4.52), dînd naștere unui element repetitiv la fel de curios (fig. 5.4.53).

Alteori, transformările operate cu abilitate pe echipartițiile plane capătă valențe plastice deosebite

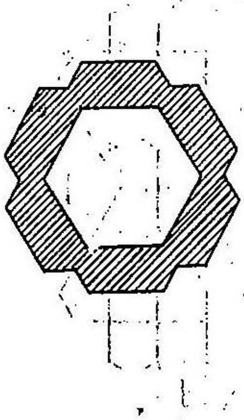


fig. 5.4.46

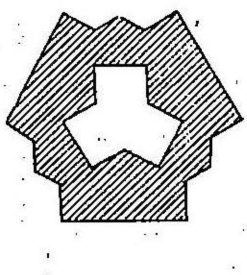


fig. 5.4.47

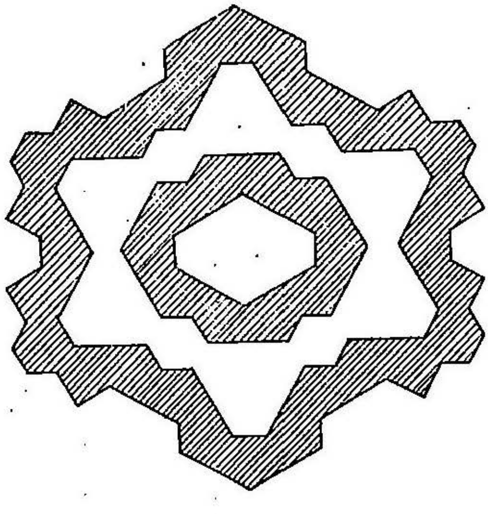


fig. 5.4.48

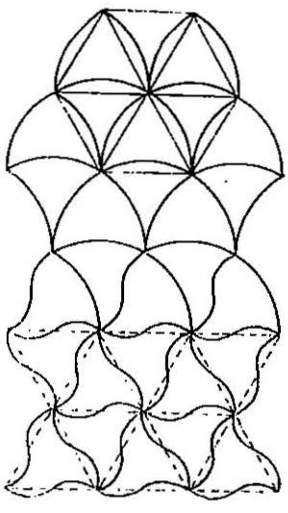


fig. 5.4.49

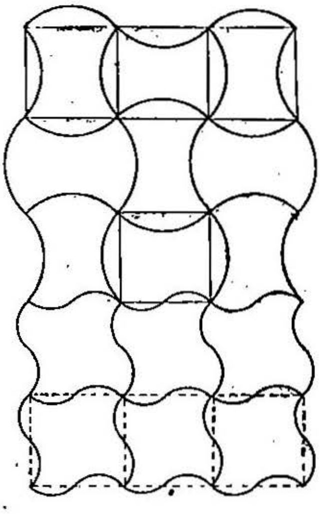


fig. 5.4.50

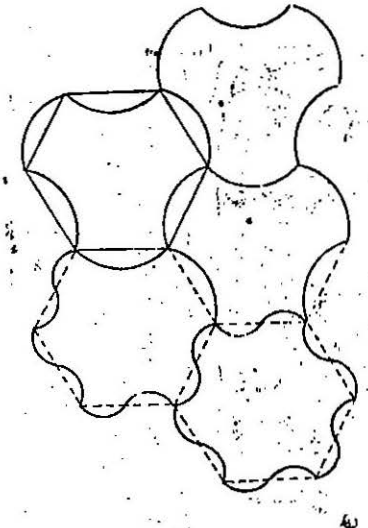


fig. 5.4.51

ca, de pildă, motivele florale și animaliere din grafica lui *Escher*. Compozițiile din figurile 5.4.54 și 5.4.55 sînt relativ ușor de „citit", nodurile rețelei și legile de compunere fiind destul de vizibile în ambele cazuri. Încercați, pentru amuzament, să descoperiți aceste legi în cazul compoziției cu cai și călăreți din gravura lui Escher ilustrată în figura 5.4.56.

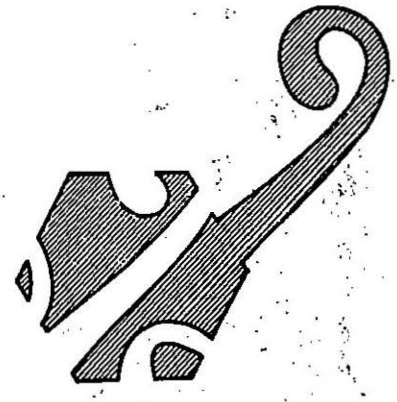


fig. 5.4.53

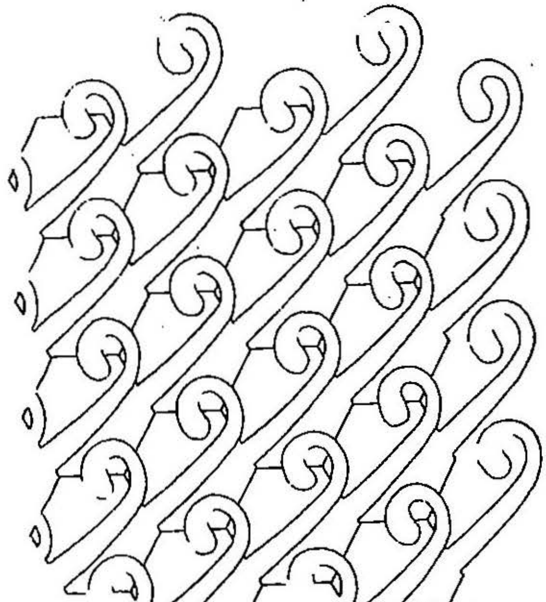


fig. 5.4.52

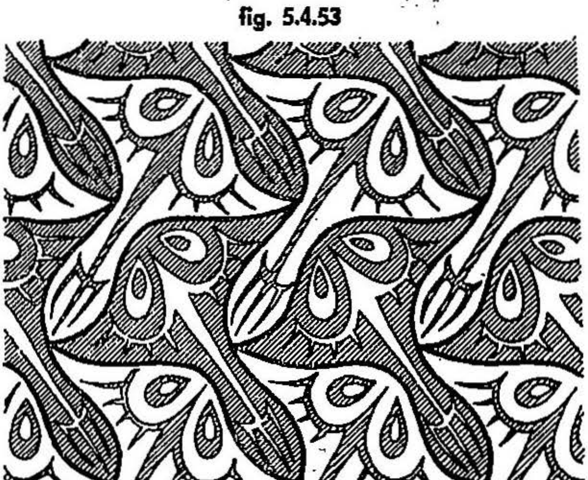


fig. 5.4.54

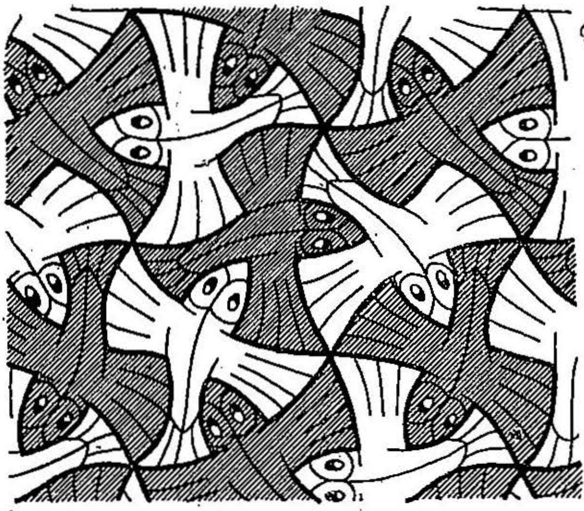


fig. 5.4.55

5.5. ECHIPARTIȚII SPAȚIALE

Echipartițiile spațiale sînt analoage echipartițiilor plane, în sensul că sînt definite ca *umplere a spațiului* cu poliedre regulate, poliedre semiregulate sau combinații ale lor. Ca și la rețelele plane, vom analiza umplerea spațiului și cu ajutorul dualelor poliedrelor semiregulate, al deltaedrilor, al prismelor diverse etc.

Cea mai simplă echipartiție spațială este *rețeaua cubică*, alcătuită din „împachetări" de cuburi, care reprezintă însuși sistemul cartezian de coordonate ortogonale. În cele ce urmează, vom prezenta posibilități de umplere a spațiului cu diverse familii de poliedre, considerîndu-le în special pe acelea care au semnificații și aplicații în arhitectură.

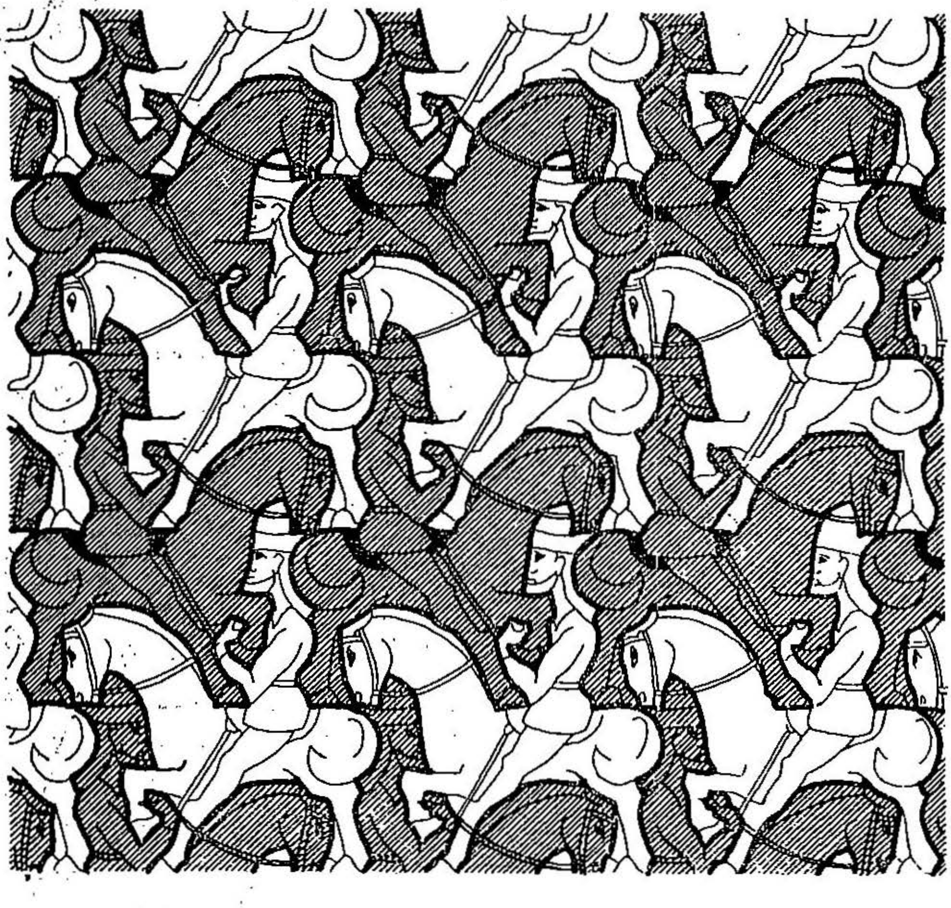


fig. 5.4.56

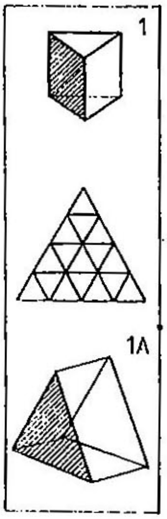


fig. 5.5.1

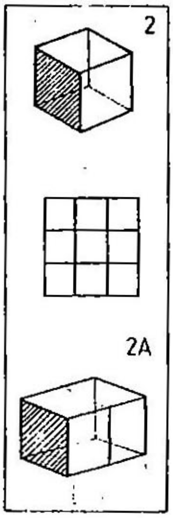


fig. 5.5.2

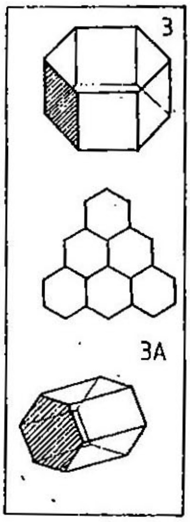


fig. 5.5.3

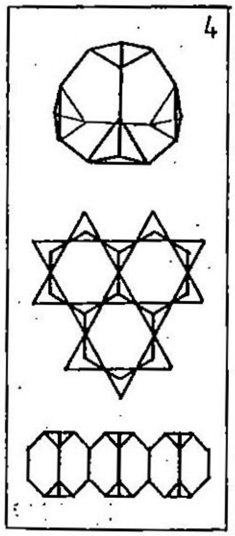


fig. 5.5.4

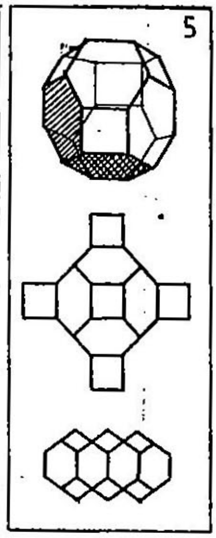


fig. 5.5.5

Din *familia prismelor drepte* fac parte cele trei poliedre reprezentate în figurile 5.5.1...5.5.3 și care pot, fiecare din ele, să umple perfect spațiul. Se poate observa că, de fapt, aceste rețele spațiale sînt extensiile celor trei rețele plane regulate. Poliedrele **1A**, **2A** și **3A** sînt variante pe aceeași rețea.

Poliedrul **4** se numește *tetraedru teșit* (fig. 5.5.4) și poate să umple singur spațiul (prin juxtapunere). Tetraedrul teșit se obține prin adăugarea, pe fiecare față triunghiulară a tetraedrului trunchiat, a cîte unei piramide triunghiulare.

Poliedrul **5** este *octaedrul trunchiat* (fig. 5.5.5) și poate să umple singur spațiul (prin juxtapunere). Octaedrul trunchiat se numește și *poliedrul Kelvin*. Poliedrele **6...8** sînt dodecaedri. Poliedrul **6** (fig. 5.5.6) este *dodecaedrul rombic* (dualul cuboctaedrului). Poliedrul **7** este un *dodecaedru rombic răsucit*; el are șase fețe rombice și șase fețe trapezoidale (fig. 5.5.7).
Poliedrul **8** este *dodecaedrul rombex*; el are opt fețe rombice și patru fețe hexagonale (fig. 5.5.8). Sub fiecare poliedru ilustrat este figurată rețeaua spațială care rezultă prin juxtapunerea mai multor asemenea poliedre pentru umplerea spațiului.

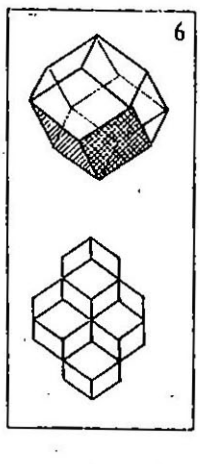


fig. 5.5.6

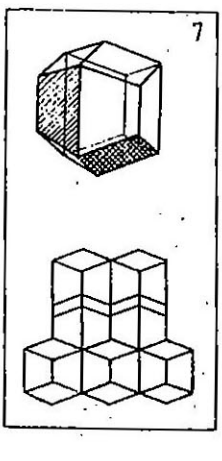


fig. 5.5.7

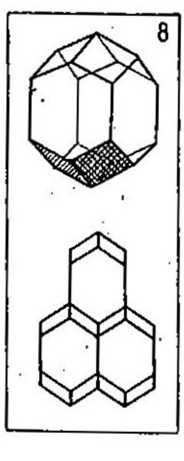


fig. 5.5.8

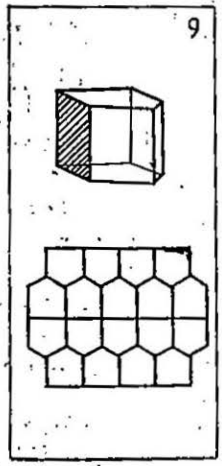


fig. 5.5.9

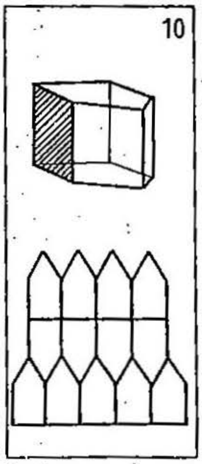


fig. 5.5.10

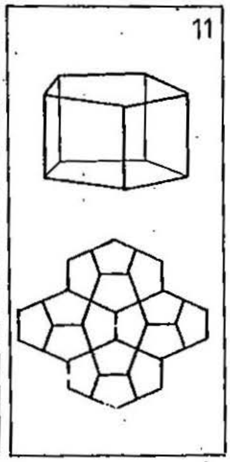


fig. 5.5.11

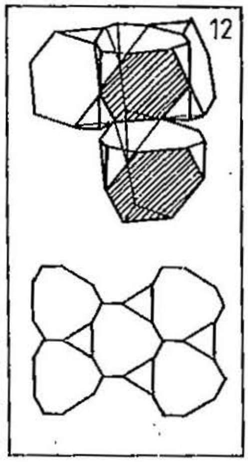


fig. 5.5.12

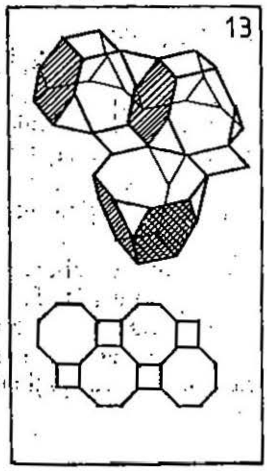


fig. 5.5.13

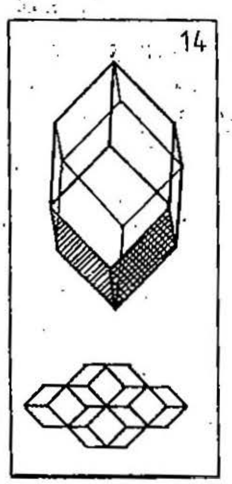


fig. 5.5.14

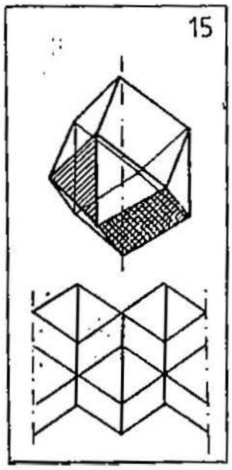


fig. 5.5.15

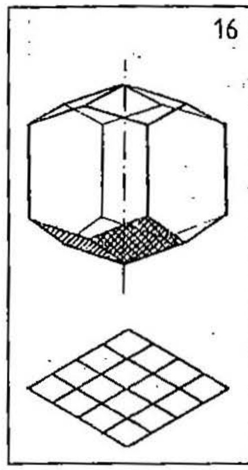


fig. 5.5.16

Figurile 5.5.9...5.5.11 ilustrează *prisme pentagonale* care pot să umple spațiul, generînd rețele spațiale; sînt indicate și rețelele spațiale care rezultă.

Poliedrul din figura 5.5.12 poate fi interpretat ca o proiecție a tetraedrului teșit, care se poate grupa pentru a rezulta o *variantă a dodecaedrului rombic răsucit*; și în acest caz este figurată proiecția rețelei spațiale.

Poliedrul din figura 5.5.13 este o *proiecție a octaedrului trunchiat* tratată la fel ca în figura 5.5.12. Rețeaua de octogoane și pătrate care rezultă este una din cele 8 echipartiții plane semiregulate cu un singur tip de nod.

Poliedrul din figura 5.5.14 este o *adaptare a dodecaedrului rombic*, care poate fi asimilată cu un cuboctaedru cu cîte o jumătate de octaedru la partea superioară respectiv la partea inferioară. Poliedrul din figura 5.5.15 este o *adaptare a dodecaedrului rombic răsucit*, iar poliedrul din figura 5.5.16 este o *adaptare a dodecaedrului rombex*. Rețelele respective sînt figurate sub fiecare schiță volumetrică.

Umplerea spațiului cu deltaedri. Cei opt deltaedri sînt poliedre care pot să umple perfect spațiul, dar nu singure, ci în combinație cu alți deltaedri. Întrucît machetele deltaedrilor sînt foarte ușor de executat (v. subcapitolul 5.3), se recomandă confecționarea unui număr de machete de deltaedri și studierea posibilităților de umplere a spațiului cu combinații de deltaedri, precum și cu combinații de deltaedri și alte poliedre.

Umplerea spațiului cu un poliedru care reprezintă o tranziție între cub și dodecaedrul rombic. Poliedrul este reprezentat în figura 5.5.17. În figura 5.5.18 se poate vedea cum acest poliedru se poate împacheta după șase direcții. Figura 5.5.19 reprezintă modul de asamblare a poliedrelor după direcțiile Ox, Oy și Oz, iar figura 5.5.20 ilustrează o grupare de trei asemenea poliedre care formează un „colț de cub". Figura 5.5.21 reprezintă o grupare pe cele șase direcții. Liniile punctate definesc un dodecaedru rombic. Proprietatea de umplere a spațiului cu poliedrul studiat este ilustrată în figura 5.5.22.

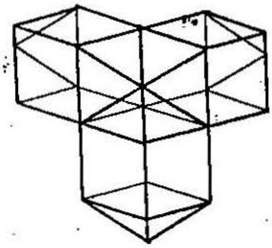


fig. 5.5.20

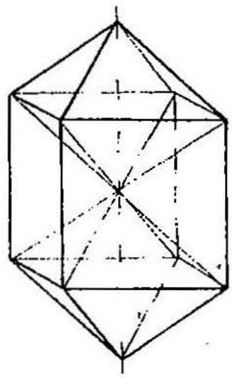


fig. 5.5.17

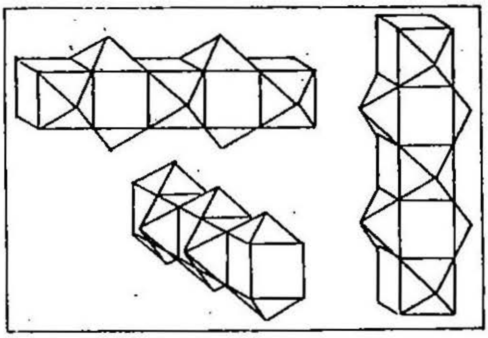


fig. 5.5.19

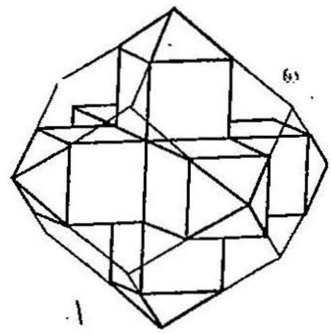


fig. 5.5.21

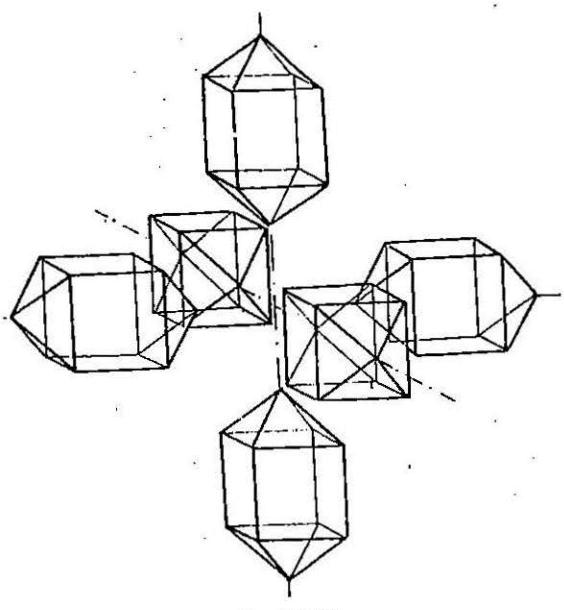


fig. 5.5.18

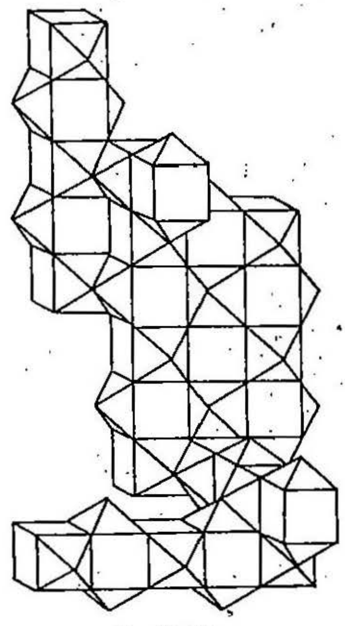


fig. 5.5.22

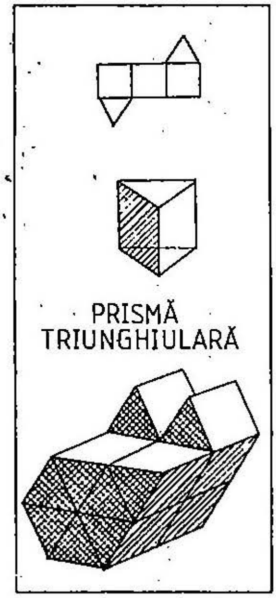


fig. 5.5.23

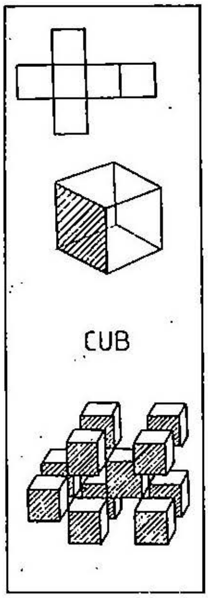


fig. 5.5.24

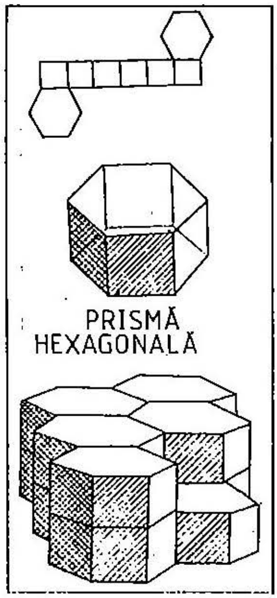


fig. 5.5.25

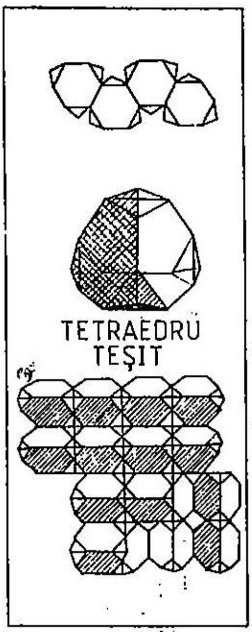


fig. 5.5.26

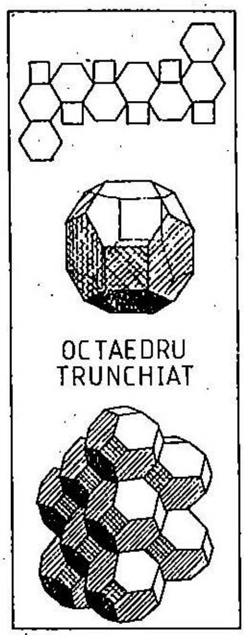


fig. 5.5.27

SINTEZA ECHIPARTIŢIILOR SPAŢIALE

În cele ce urmează sînt prezentate sintetic poliedrele care pot să umple spaţiul (singure sau în combinaţie cu altele). Sînt figurate toate desfăşuratele, precum şi reprezentările axonometrice ale reţelelor spaţiale care rezultă.

Umplerea spaţiului cu un singur tip de poliedru. Există opt tipuri de poliedre care pot să umple singure spaţiul (prin juxtapunere); ele sînt grupate în trei familii:

— familia prismei (fig. 5.5.23...5.5.25);
— familia poliedrelor trunchiate (fig. 5.5.26...5.5.27);
— familia dodecaedrului (fig. 5.5.28...5.5.30).

Umplerea spaţiului cu două tipuri de poliedre este reprezentată de trei familii de poliedre:

— familia octaedrului (fig. 5.5.31...5.5.33);
— familia prismei (fig. 5.5.34...5.5.38).
— familia poliedrelor trunchiate (fig. 5.5.39...5.5.40);

Umplerea spaţiului cu trei tipuri de poliedre se realizează cu trei familii de poliedre:

— familia tetraedrului trunchiat (fig. 5.5.41...5.5.42).;
— familia cubului (fig. 5.5.43...5.5.45);
— familia prismei (fig. 5.5.46...5.5.48).

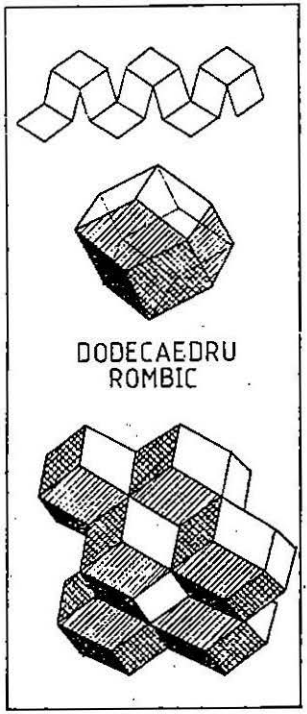


fig. 5.5.28

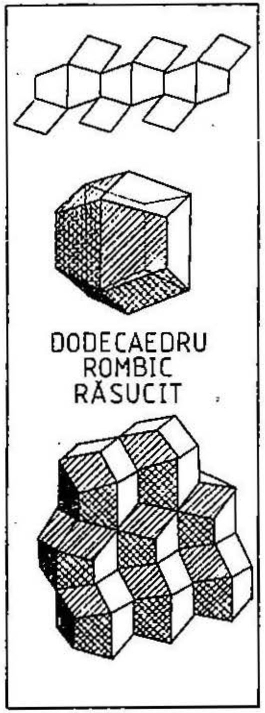


fig. 5.5.29

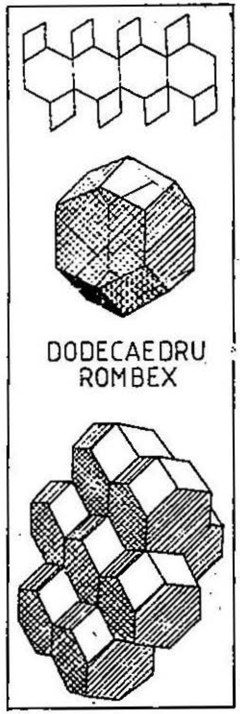


fig. 5.5.30

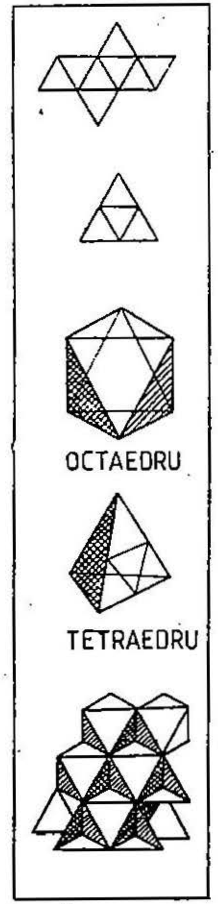


fig. 5.5.31

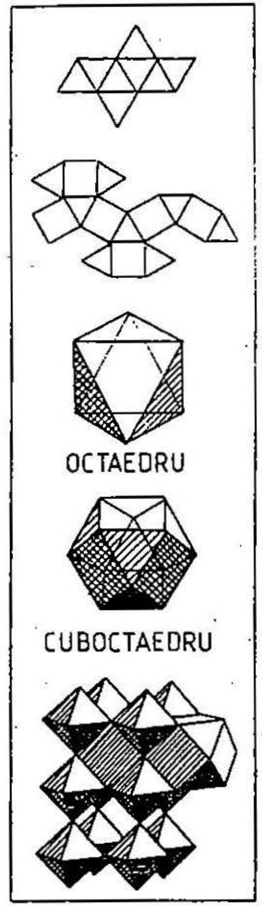


fig. 5.5.32

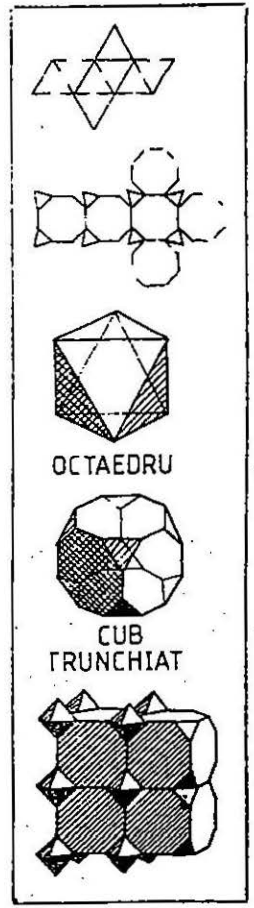


fig. 5.5.33

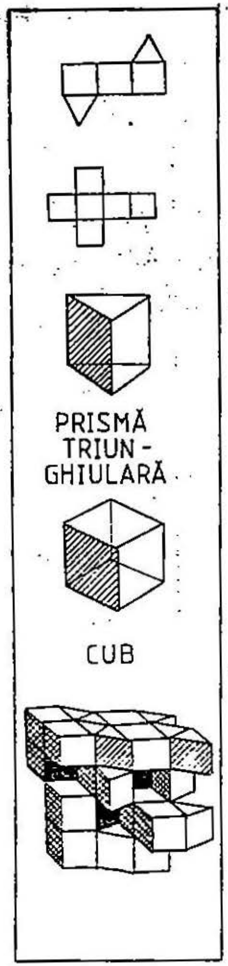


fig. 5.5.34

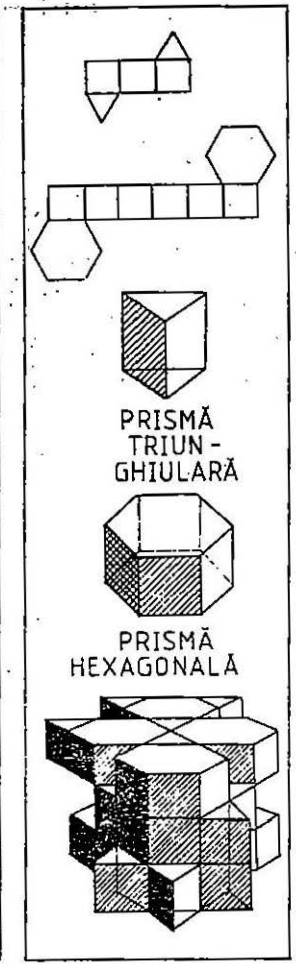


fig 5.5.35

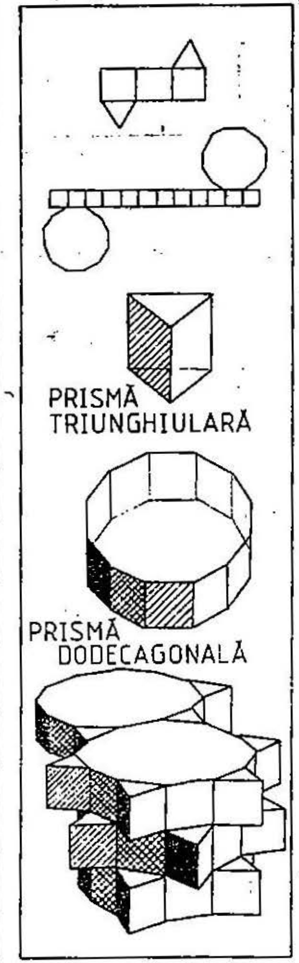


fig. 5.5.36

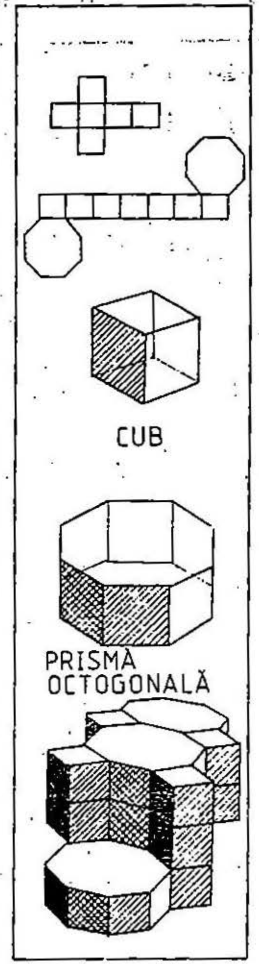


fig. 5.5.37

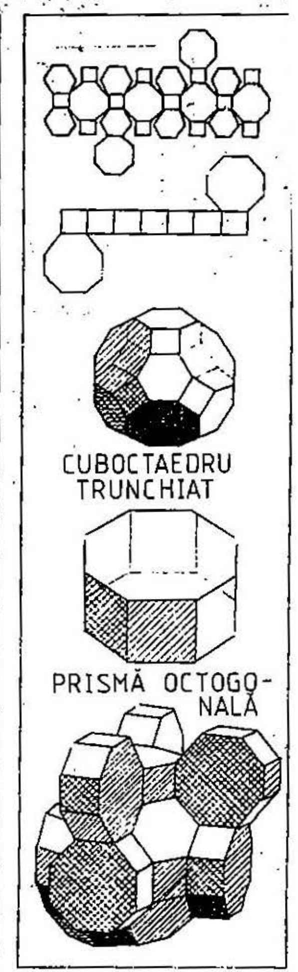


fig. 5.5.38

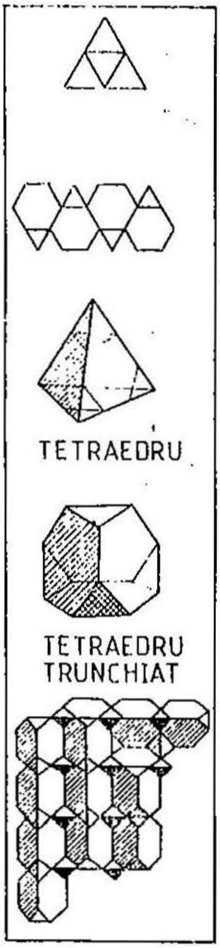


fig. 5.5.39

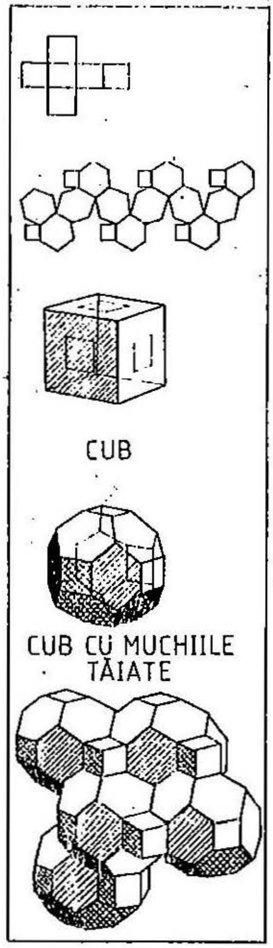


fig. 5.5.40

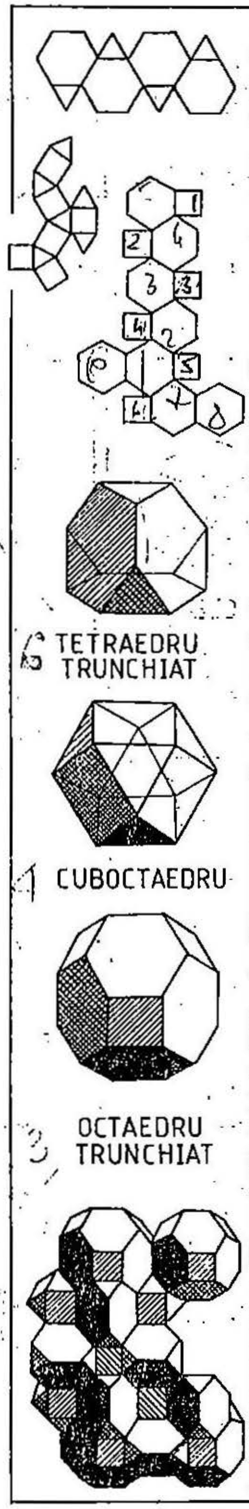


fig. 5.5.41

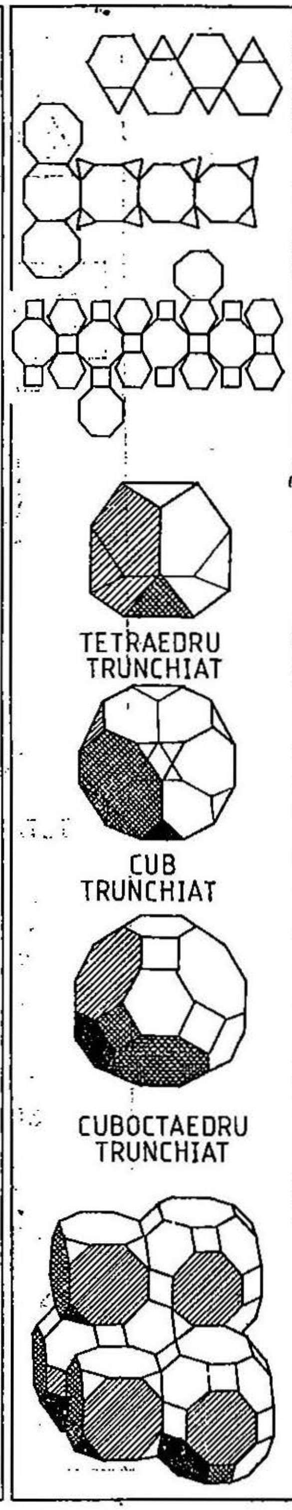


fig. 5.5.42

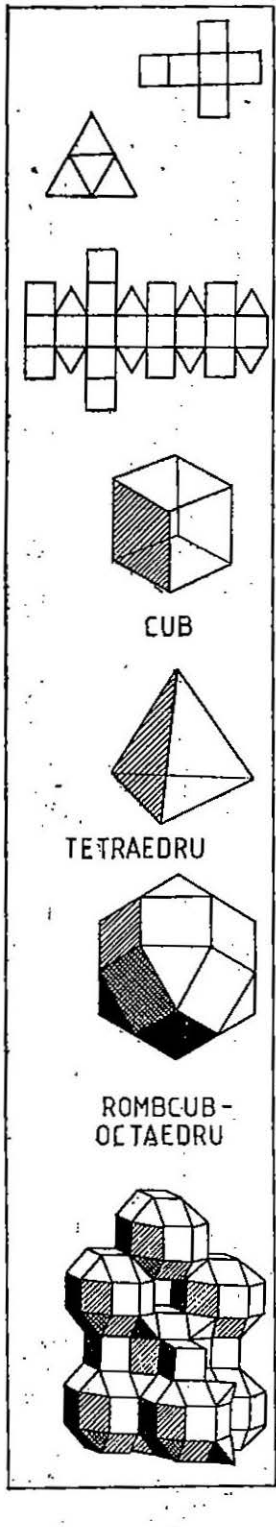


fig. 5.5.43

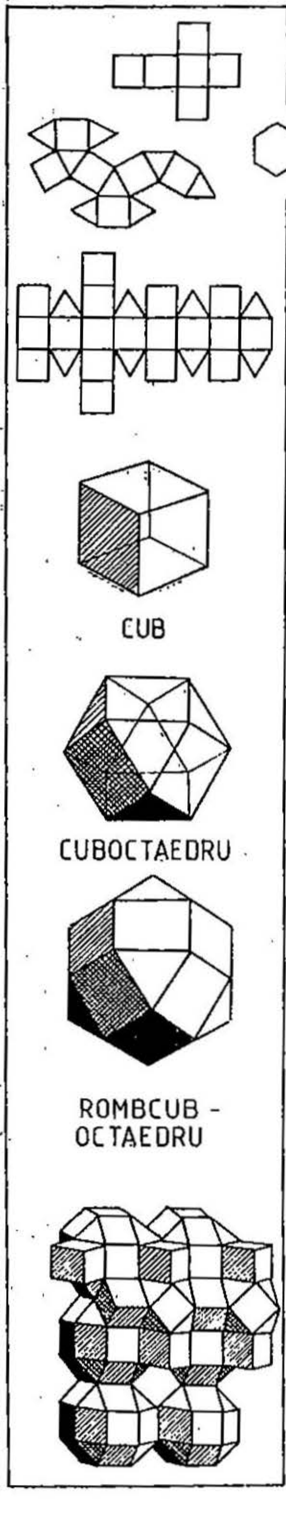


fig. 5.5.44

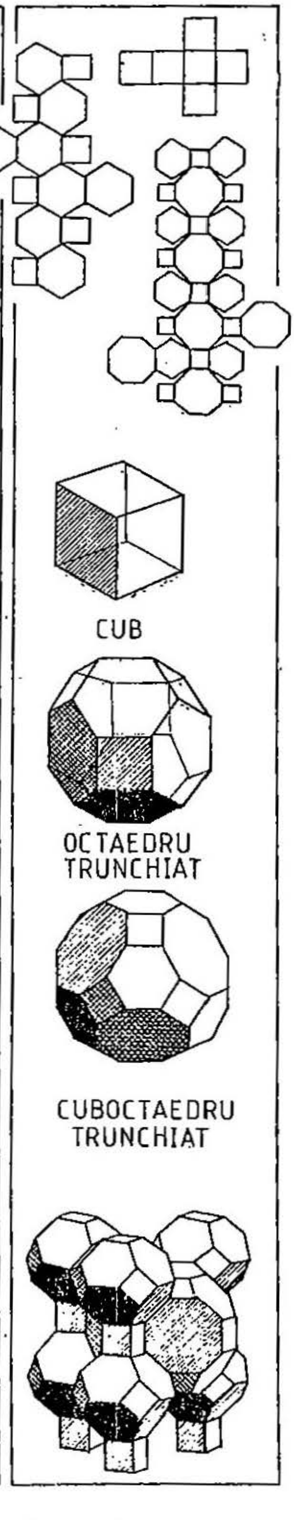


fig. 5.5.45

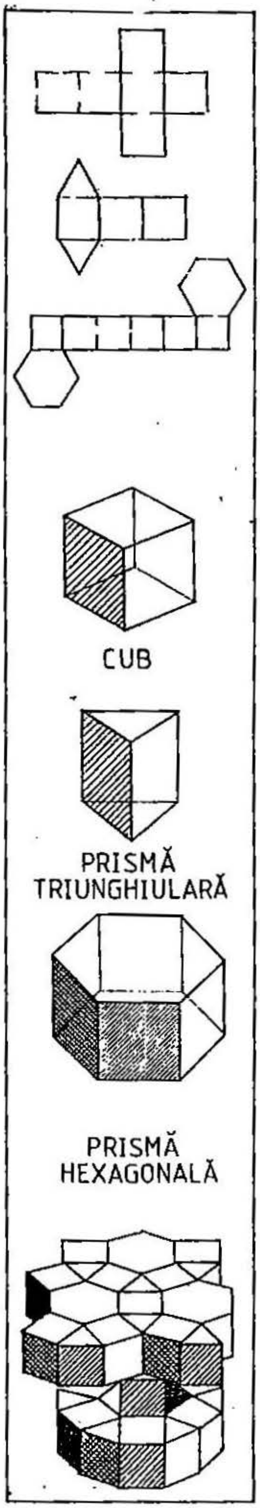


fig. 5.5.46

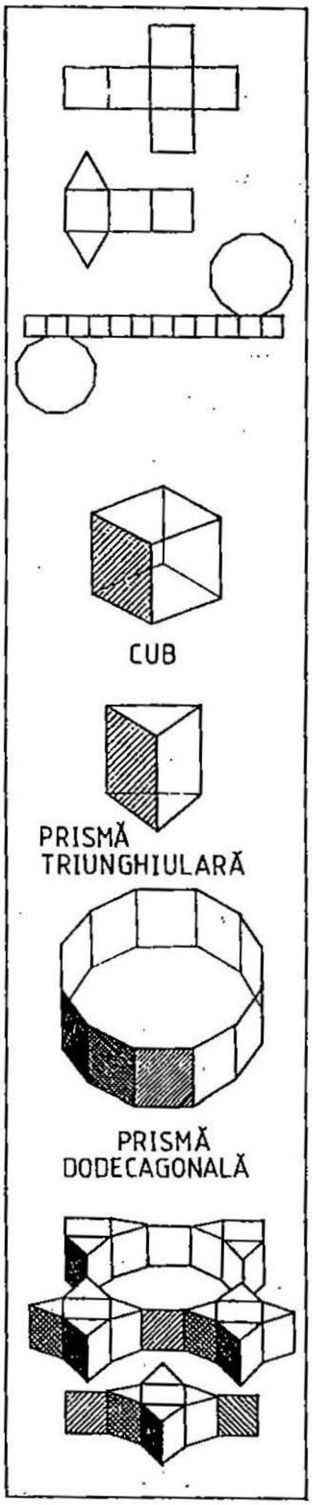


fig. 5.5.47

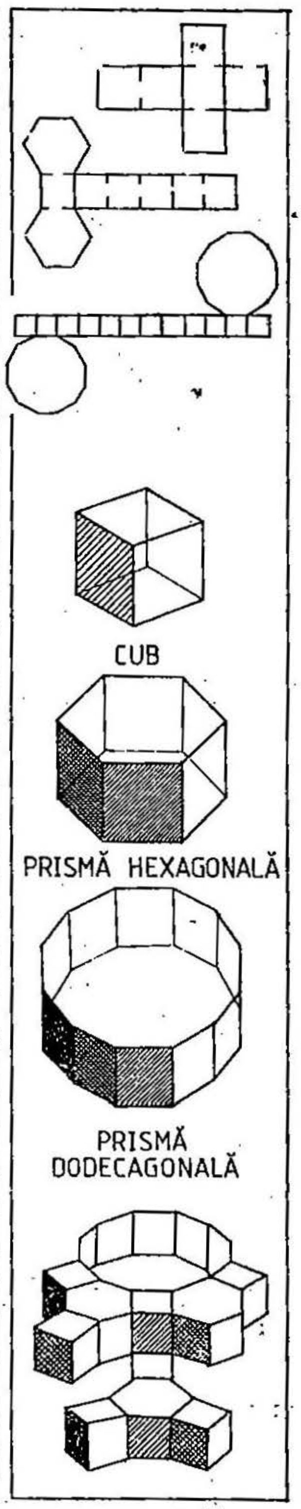


fig. 5.5.48

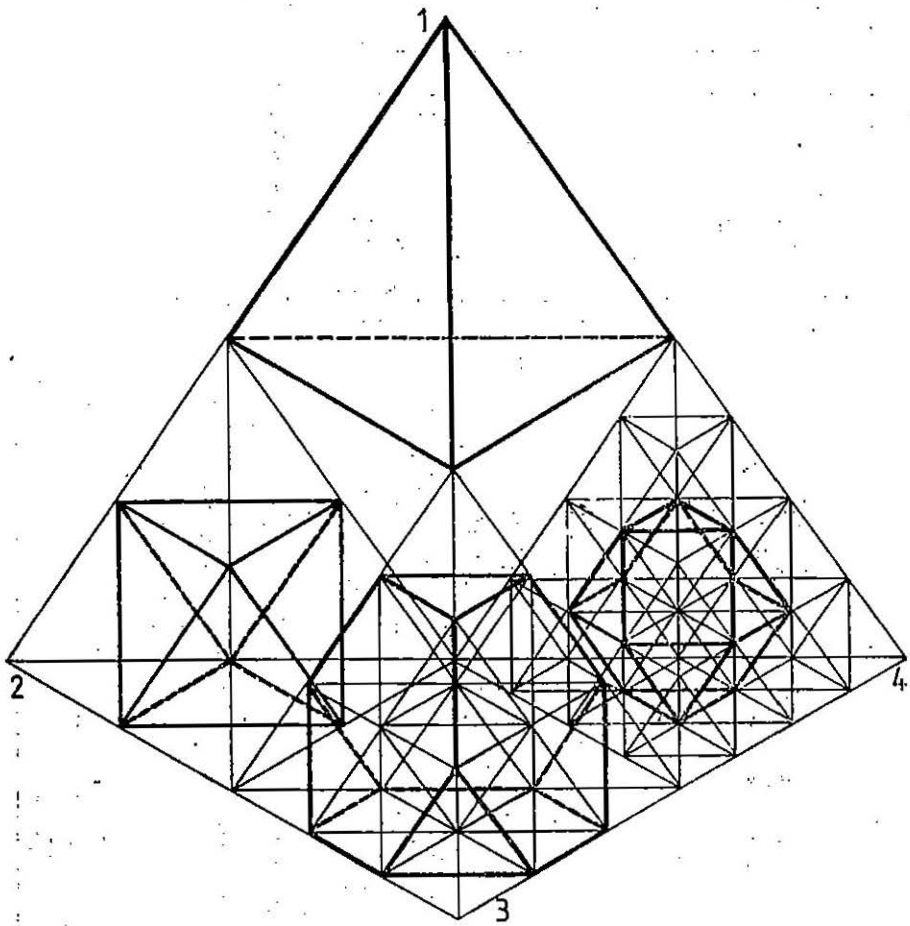


fig. 5.5.49

Figura 5.5.49 prezintă relațiile spațiale dintre tetraedrul regulat și alte poliedre regulate și semiregulate. Tetraedrul regulat din figură este divizat în patru tetraedri regulați avînd muchie jumătate din muchia tetraedrului mare. În trei din aceștia sînt înscrise trei poliedre: un octaedru regulat, un tetraedru trunchiat și un cuboctaedru.

5.6. CUPOLE GEODEZICE ȘI STRUCTURI SPAȚIALE PLANE

S. 14 CUPOLE GEODEZICE

Sistemele curbe de acoperire a spațiului au evoluat în decursul timpului de la bolțile masive și greoaie ale antichității la bolțile gotice în rețea, ajungîndu-se la un sistem nervurat în piatră, bazat pe o stereotomie a pietrei dusă la apogeu. O preocupare permanentă în concepția sistemelor de acoperire a spațiului a constituit-o ușurarea lor continuă, atît prin formă, cît și prin materialele folosite. Astfel s-a făcut trecerea de la grinzile cu zăbrele (fig. 5.6.1) la bolta din ferme metalice sau pe nervuri meridiane cu zăbrele (fig. 5.6.2). Avantajele oferite de sistemele spațiale alcătuite din bare și noduri au dus către un *studiu al poliedrelor regulate și semiregulate folosite ca bază de plecare în aproximarea cît mai exactă a sferei*. Proprietățile geometrice spațiale ale poliedrelor au fost studiate și justificate dinamic de către Buckminster Fuller (încă din 1917) și de către William Bragg (din 1924). Buckminster Fuller a ajuns la concluzia că, într-o structură sau rețea geometrică, eforturile tind să se transmită pe drumul cel mai scurt.
Tetraedrul, *octaedrul* și *icosaedrul* (avînd fețele triunghiuri echilaterale) sînt singurele care satisfac condiția de indeformabilitate geometrică; ele sînt

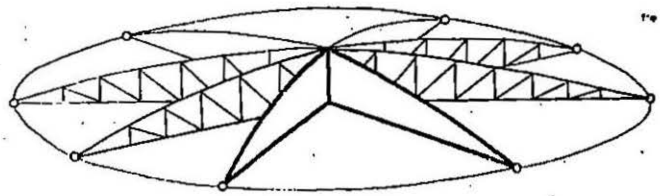


fig. 5.6.1

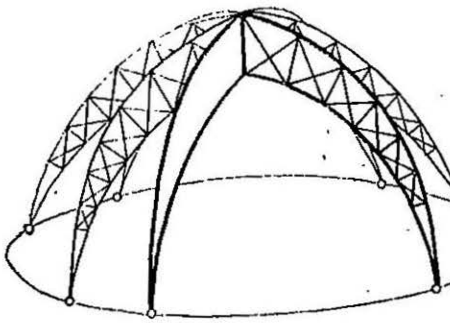


fig. 5.6.2

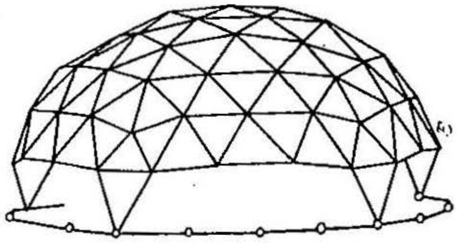


fig. 5.6.3

static determinate. Tetraedrul, octaedrul şi icosaedrul pot fi subîmpărţite în triunghiuri care, proiectate spre exterior pe sfera circumscrisă lor, duc la obţinerea unor structuri triangulate cu minim de efort şi maxim de rezistenţă, numite *structurile geodezice ale lui Buckminster Fuller* (fig. 5.6.3).

Aproximarea sferei cu poliedre regulate şi semiregulate la care să rezulte *un singur tip de bare şi de noduri*, nu se poate face la orice diametru al bolţii sferice de acoperire. Pentru o mînuire uşoară a barelor la montare şi demontare, ele nu pot fi nici prea lungi şi nici prea grele, astfel că raza sferei este limitată. De exemplu, pentru o lungime optimă a barei de 2—3 m, icosaedrul ca *reţea poliedrală sferică* duce la o rază a sferei de circa 1,9 pînă la 2,8 m. Pentru a realiza cupole de deschideri mari (plecînd de la cele 5 poliedre regulate şi cele 13 poliedre semiregulate), trebuie să se aibă în vedere ca, prin multiplicarea muchiilor, feţelor şi vîrfurilor, să se obţină:

— cît mai multe muchii egale, respectiv cît mai puţine tipuri de bare;

— cît mai multe unghiuri solide identice, respectiv cît mai puţine tipuri de noduri.

Trebuie să se plece în special de la poliedrele regulate şi semiregulate indeformabile sau cu cît mai multe feţe triunghiulare.

MODALITĂŢI DE APROXIMARE A SFEREI (*Gheorghiu şi Dragomir*, 1968)

Există patru modalităţi de aproximare a sferei: prin dedublare, prin maclare, prin diviziune şi prin piramidare.

Aproximarea sferei prin dedublare se realizează prin proiectarea pe sfera circumscrisă poliedrului regulat, din centrul ei, a mijloacelor muchiilor poliedrului. Odată cu dublarea numărului de muchii ale poliedrului se adaugă la fiecare vîrf încă atîtea muchii cîte feţe concurau în acel vîrf. Aplicarea succesivă a acestei operaţii asupra unui poliedru duce la un şir de poliedre cvasiregulate care, odată cu numărul dedublărilor, aproximează din ce în ce mai bine sfera. Dedublările succesive ale tetraedrului, octaedrului şi icosaedrului aproximează sfera suficient de bine, atît geometric cît şi vizual, chiar de la primele dedublări. Tetraedrul, octaedrul şi icosaedrul, avînd exclusiv feţe triunghiuri echilaterale, duc la *reţele triunghiulare sferice*.

Exemplu. La prima dedublare a icosaedrului regulat se obţin două tipuri de feţe (fig. 5.6.4): triunghiuri echilaterale (**BBB**) şi triunghiuri isoscele (**ABB**). În mod asemănător se efectuează a doua dedublare (fig. 5.6.5) şi a treia dedublare (fig. 5.6.6).

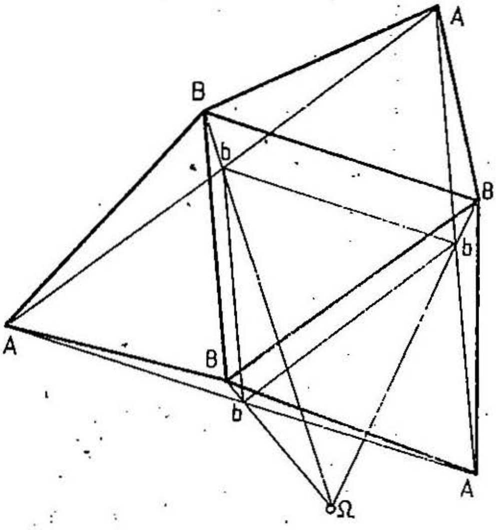


fig. 5.6.4

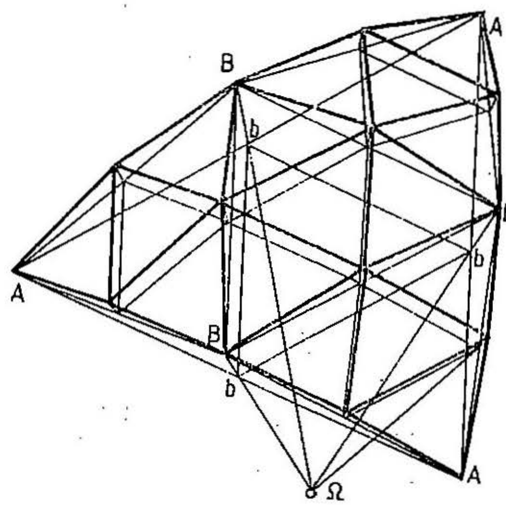


fig. 5.6.5

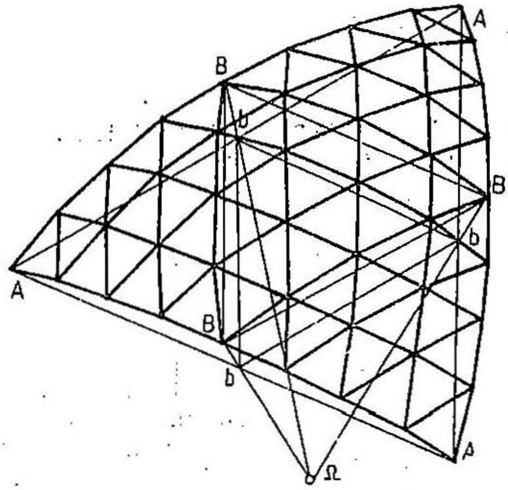


fig. 5.6.6

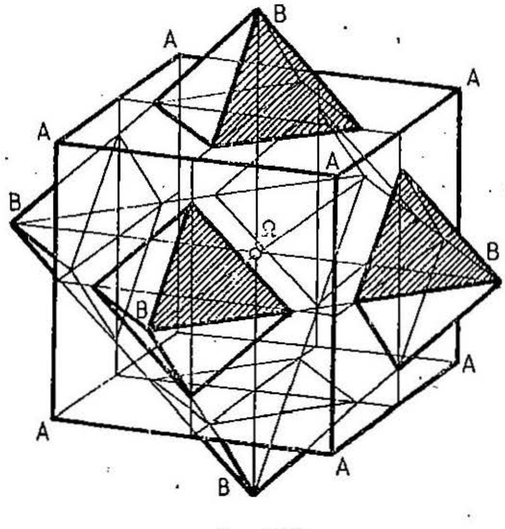


fig. 5.6.7

Aproximarea sferei prin maclare se realizează prin proiectarea pe sfera circumscrisă poliedrului regulat, din centrul ei, a centrelor fețelor poliedrului. Construcția introduce poliedrul reciproc sau dual înscris în aceeași sferă, rezultînd o penetrație a celor două poliedre (fig. 5.6.7).
Aplicată la cub, construcția introduce un octaedru înscris în aceeași sferă. Unind vîrfurile celor două poliedre maclate, se obțin două poliedre cvasiregulate:
— un cub piramidat convex, prin reținerea muchiilor cubului (fig. 5.6.8);
— un octaedru piramidat concav, prin reținerea muchiilor octaedrului (fig. 5.6.9).

Aproximarea sferei prin diviziune se realizează prin împărțirea în părți egale a arcelor de cerc mare ale sferei circumscrise subîntinse de muchiile poliedrelor. Împărțirea în două părți egale a acestor arce coincide cu o dedublare.

Aproximarea sferei prin piramidare se realizează prin piramidarea fețelor netriunghiulare ale poliedrelor; se aplică în special poliedrelor semiregulate.

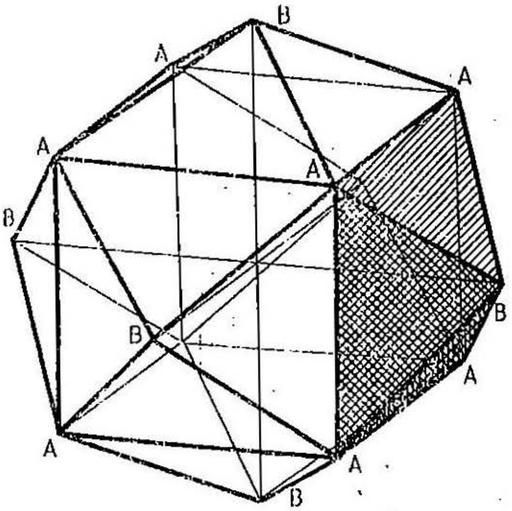


fig. 5.6.8

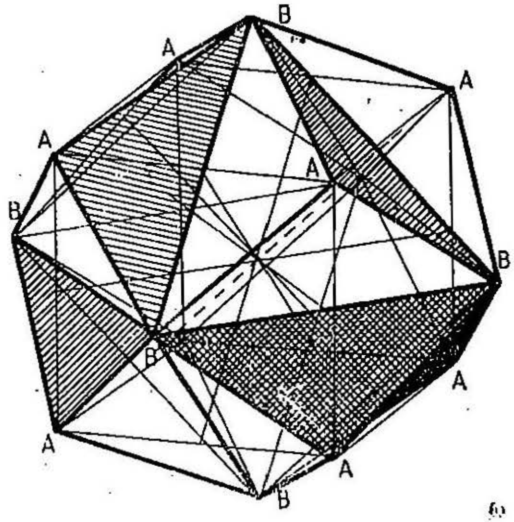


fig. 5.6.9

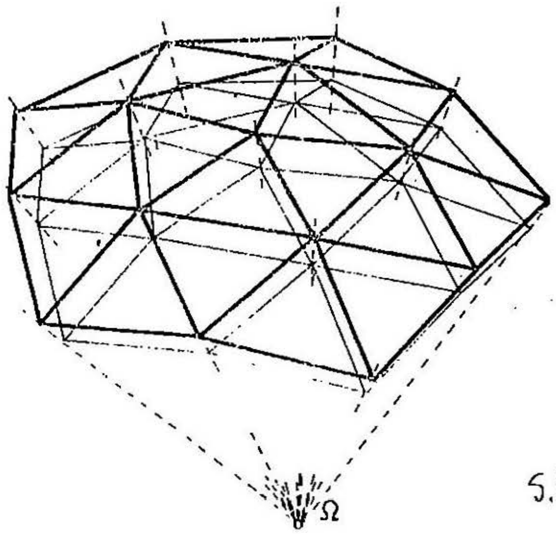


fig. 5.6.10

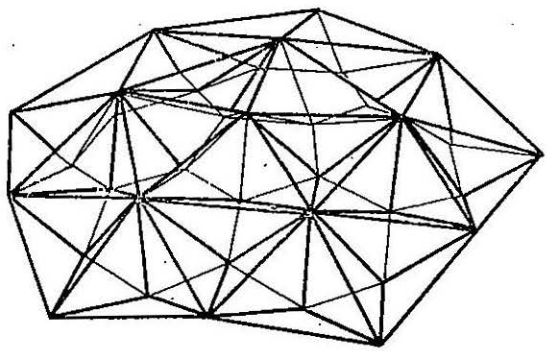


fig. 5.6.11

Piramidarea aplicată la cub și la dodecaedrul regulat duce de fapt la o maclare. Prin piramidare, poliedrele semiregulate devin poliedre nedeformabile. Trebuie menționat faptul că, pentru o mai bună aproximare a sferei, procedeele descrise se aplică și combinate între ele; numai dedublarea și piramidarea pot fi aplicate succesiv.

CUPOLE GEODEZICE ÎN DUBLU STRAT

Odată studiate rețelele triunghiulare sferice într-un singur strat, ele se pot combina cîte două sau cîte trei pe două sau trei sfere concentrice, legîndu-se între ele prin montanți sau diagonale; astfel se obțin rețelele spațiale multidirecționale sferice. În general, cele două rețele sferice concentrice nu pot fi asemenea (adică de același tip). Asemănarea ar duce la montanți radiali, dar în același timp și la noduri cu foarte multe bare concentrice (fig. 5.6.10).
Să luăm două rețele triunghiulare pe două sfere concentrice. Pe raza sferei ce trece prin centrul feței rețelei interioare se ia vîrful rețelei reciproce, care se unește cu vîrfurile rețelei exterioare. Rezultă *cupola geodezică în dublu strat* (fig. 5.6.11).

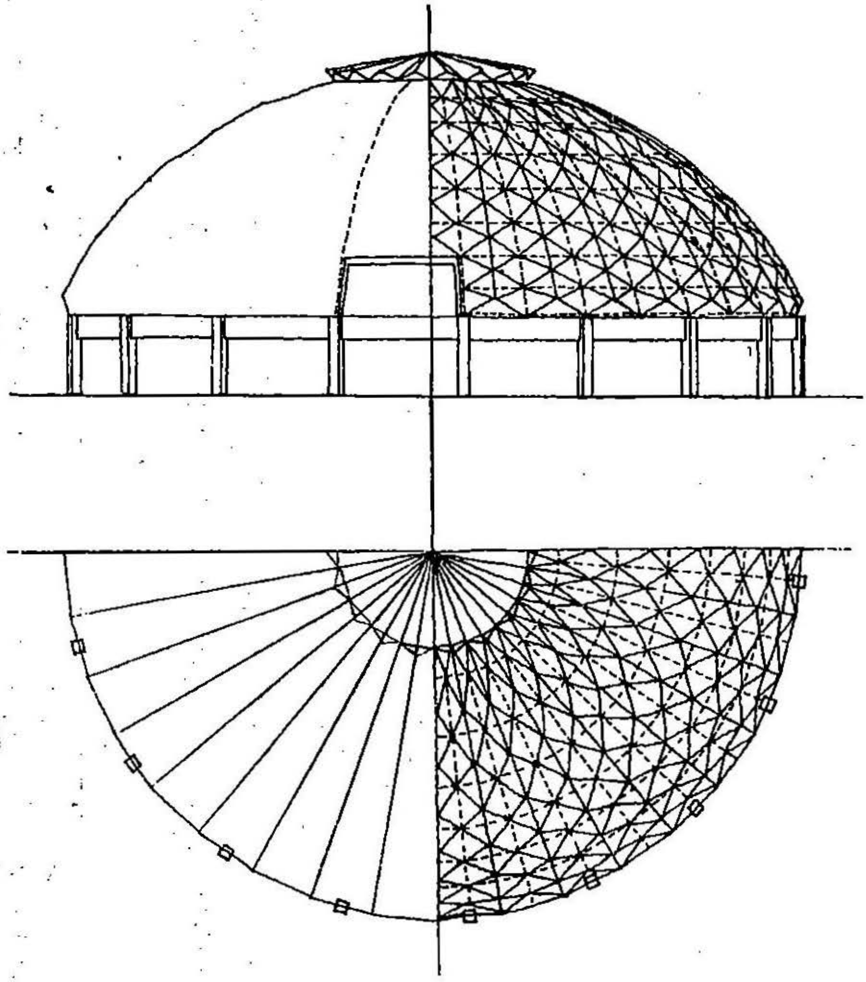


fig. 5.6.12

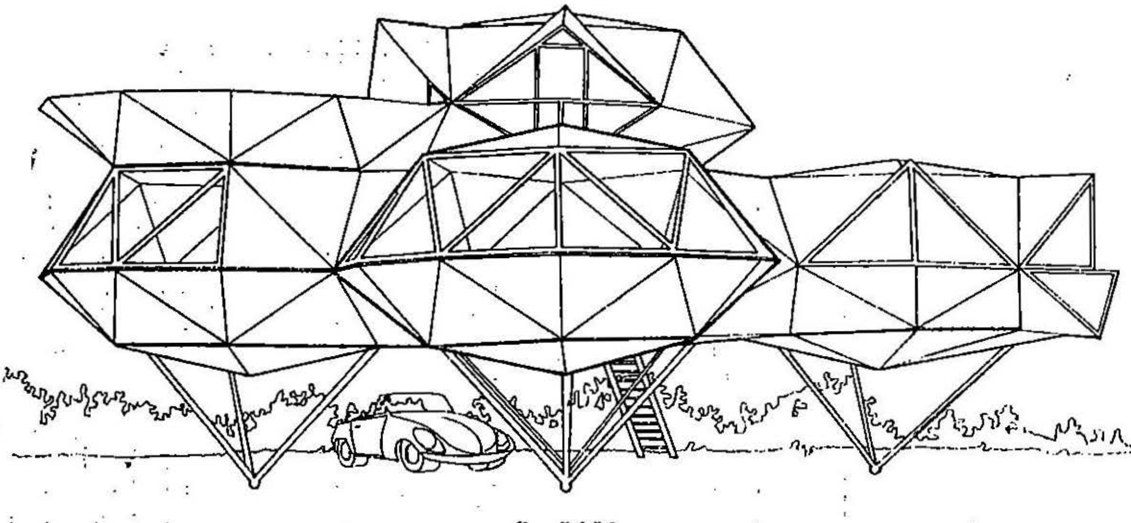


fig. 5.6.14

În principiu, acest tip de cupolă rezultă din asamblarea exclusiv a unor tetraedri. În figura 5.6.12 este reprezentată o cupolă geodezică în dublă proiecție ortogonală. Încărcarea cupolei este preluată la bază de grinzi de beton armat plasate pe contur care transmit eforturile unui număr de 20 stîlpi fretați. Cupola este destinată unui acvariu din Tokyo (Japonia). Figura 5.6.13 reprezintă proiectul unei locuințe realizate în Franța. Suprafețele punctate reprezintă suprafețe vitrate. Locuința din figura 5.6.14 este o tratare mai liberă a spațiului, prin compunerea unor volume poliedrale realizate din fețe triunghiulare. Se numește casa „diamant" și proiectul aparține arhitectului *Paul Maymont.*

STRUCTURI SPAȚIALE PLANE

Greutatea proprie mare a elementelor monolite cît și economia de material au dus la apariția și dezvoltarea treptată a structurilor formate din bare, numite *structuri cu zăbrele.* La început s-a dezvoltat grinda cu zăbrele plană, înlocuind pentru anumite deschideri și încărcări pe cea cu inimă plină. Cu timpul, sistemele constructive formate din grinzi cu zăbrele plane rigidizate cu contravîntuiri s-au transformat în structuri cu zăbrele spațiale.

Planșeele cu zăbrele sînt structurile cu zăbrele spațiale alcătuite din bare dispuse după două rețele plane paralele, legate între ele cu diagonale și alcătuind un sistem indeformabil în spațiu. Spre deosebire de structurile curbe (care se pot realiza pînă la o anumită deschidere și într-un singur strat datorită curburii care contribuie la stabilitate), structurile plane nu pot fi alcătuite decît cel puțin în dublu strat. Atît barele, cît și nodurile rețelei trebuie să rezulte într-un număr cît mai redus de tipuri. Pentru aceasta, cele două rețele plane paralele ale planșeului trebuie împărțite în poligoane regulate de același fel. După tipul poligoanelor regulate, rețelele rezultă și ele de mai multe feluri (*Gheorghiu* și *Dragomir*, 1968):

Rețeaua spațială planar-pătrată. Această rețea este planșeul cu zăbrele format din două rețele plane orizontale subîmpărțite în pătrate egale și legate între ele prin bare diagonale (fig. 5.6.15). Vîrfurile pătratelor unei rețele dintr-un plan corespund pe verticală cu centrele pătratelor celeilalte rețele din planul paralel. Cele două rețele pot fi considerate duale sau rezultate una din cealaltă printr-o translație după o anumită direcție. Barele de legătură între cele două straturi sînt oblice și egale între ele.

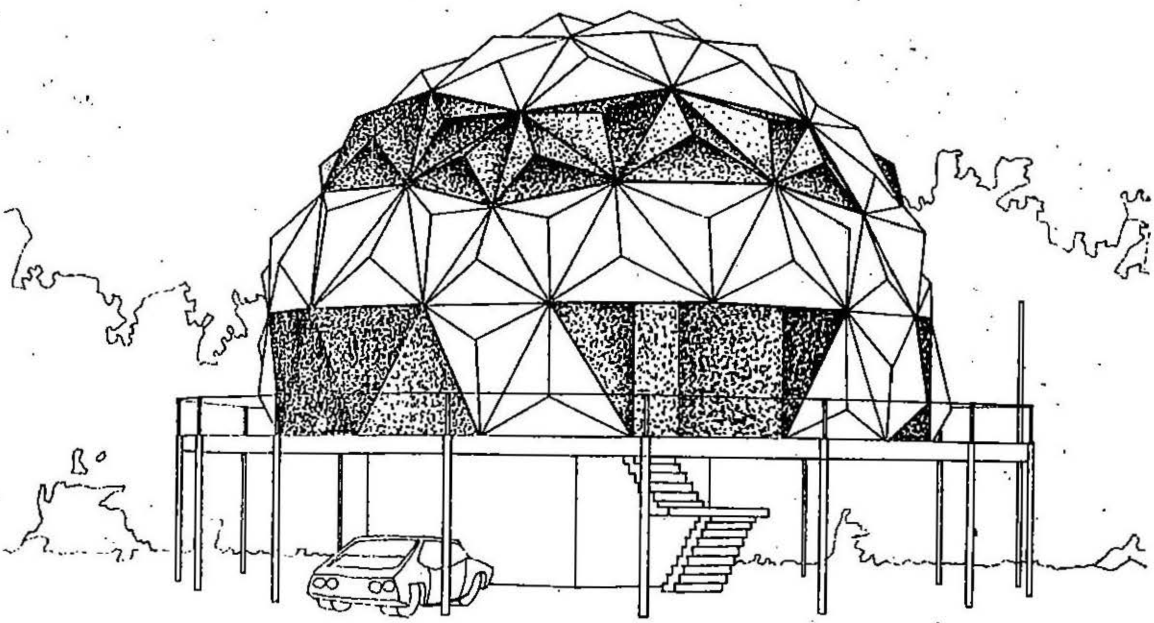


fig. 5.6.13

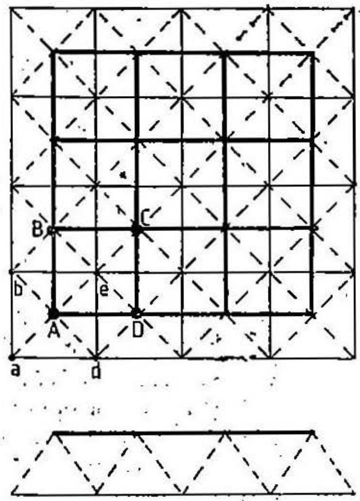


fig. 5.6.15

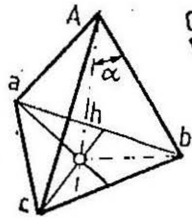


fig. 5.6.18

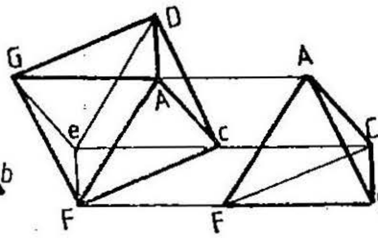


fig. 5.6.19

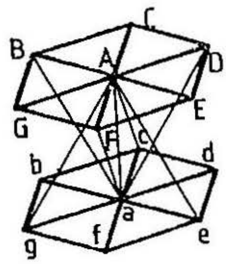


fig. 5.6.20

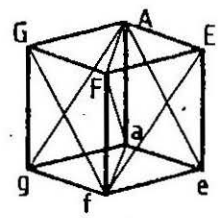


fig. 5.6.21

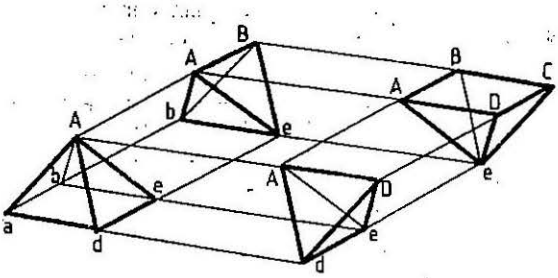


fig. 5.6.16

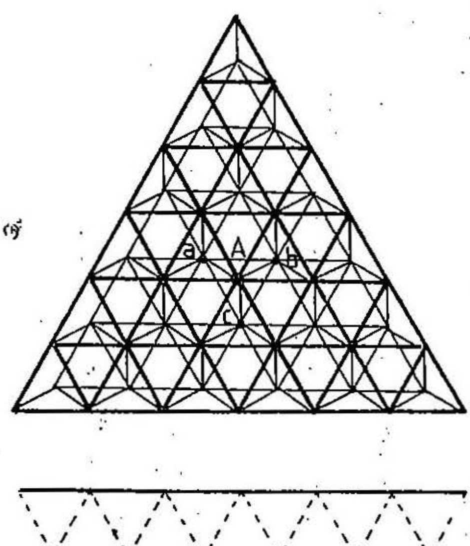


fig. 5.6.17

Caracteristicile rețelei spațiale planar-pătrate sînt următoarele:

— rețeaua prezintă două tipuri de bare (cele din rețelele plane și diagonalele de legătură) care, pentru o anumită înălțime de planșeu, pot fi egale;

— toate nodurile sînt de același tip (într-un nod se întîlnesc 4 bare orizontale și 4 diagonale dispuse simetric).

Planșeul în rețea pătrată poate fi descompus în *piramide regulate cu baze pătrate* ce alternează cu *tetraedri regulați* (fig. 5.6.16). Tetraedrul fiind nedeformabil rigidizează piramidele pătrate, care sînt deformabile.

Rețeaua spațială planar-triunghiulară. Această rețea se obține într-o primă variantă (fig. 5.6.17) printr-o translație oblică, astfel încît triunghiurile echilaterale ale unei rețele plane să aibă vîrfurile pe verticalele ce se ridică din centrele triunghiurilor echilaterale ale celeilalte rețele plane (fig. 5.6.18).

Caracteristicile rețelei spațiale planar-triunghiulare sînt:

— rețeaua prezintă două tipuri de bare (barele din cele două rețele plane și diagonalele de legătură), care pot fi egale pentru o anumită înălțime de planșeu;

— toate nodurile sînt de același tip.

Se observă că planșeul este format din două tipuri de poliedre regulate nedeformabile: tetraedri regulați și octaedri regulați (fig. 5.6.19). Neajunsul

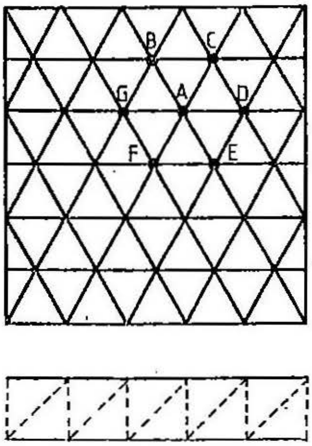


fig. 5.6.22

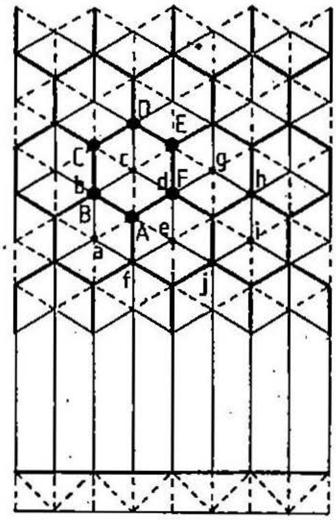


fig. 5.6.23

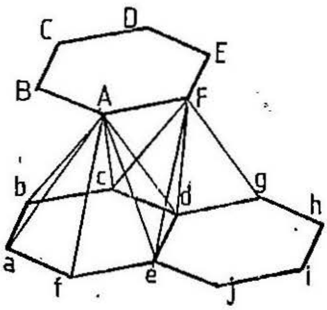


fig. 5.6.24

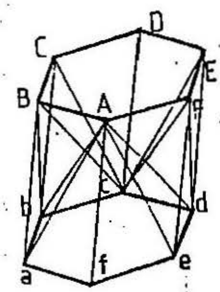


fig. 5.6.25

acestui tip de rețea este că ea nu poate acoperi decît arii triunghiuri echilaterale sau hexagoane regulate. Din acest punct de vedere, apare mai avantajoasă o a doua variantă a rețelei spațiale planar-triunghiulare, în care cele două rețele plane se obțin una din alta printr-o translație verticală (fig. 5.6.20).

În cel mai bun caz rezultă două lungimi de bară (fig. 5.6.21):

— montanții verticali egali cu barele rețelei plane;
— diagonalele de legătură.

Rețeaua se poate adapta și pentru acoperirea unei arii pătrate sau dreptunghiulare, necesitînd atunci tipuri de bare suplimentare pe contur (fig. 5.6.22).

Rețeaua spațială planar-hexagonală. Această rețea rezultă din două rețele plane hexagonale translatate oblic una față de cealaltă (fig. 5.6.23). Centrul fiecărui hexagon din prima rețea corespunde pe verticală unui vîrf de hexagon din cea de a doua rețea. Barele de legătură între cele două rețele plane sînt de două tipuri — montanți verticali și diagonale.

Caracteristicile rețelei spațiale planar-hexagonale sînt:

— rețeaua prezintă două tipuri de bare, dacă montanții verticali sînt egali cu laturile hexagoanelor;
— prezintă două tipuri de noduri curente;
— are inconvenientul că necesită tipuri de bare și de noduri suplimentare pe contur.

Acest tip de planșeu este alcătuit din piramide hexagonale și tetraedri care nu sînt regulați (fig. 5.6.24). Se poate observa acest lucru separînd din planșeu volumul elementar care este o prismă oblică cu bazele hexagoane regulate (fig. 5.6.25). Volumul este format din două piramide hexagonale și patru tetraedri identici (**EFcd**, **AFed**, **ABab** și **BCbc**).

Figura 5.6.26 reprezintă o hală industrială a cărei structură de rezistență este realizată dintr-o rețea spațială cu elemente metalice.

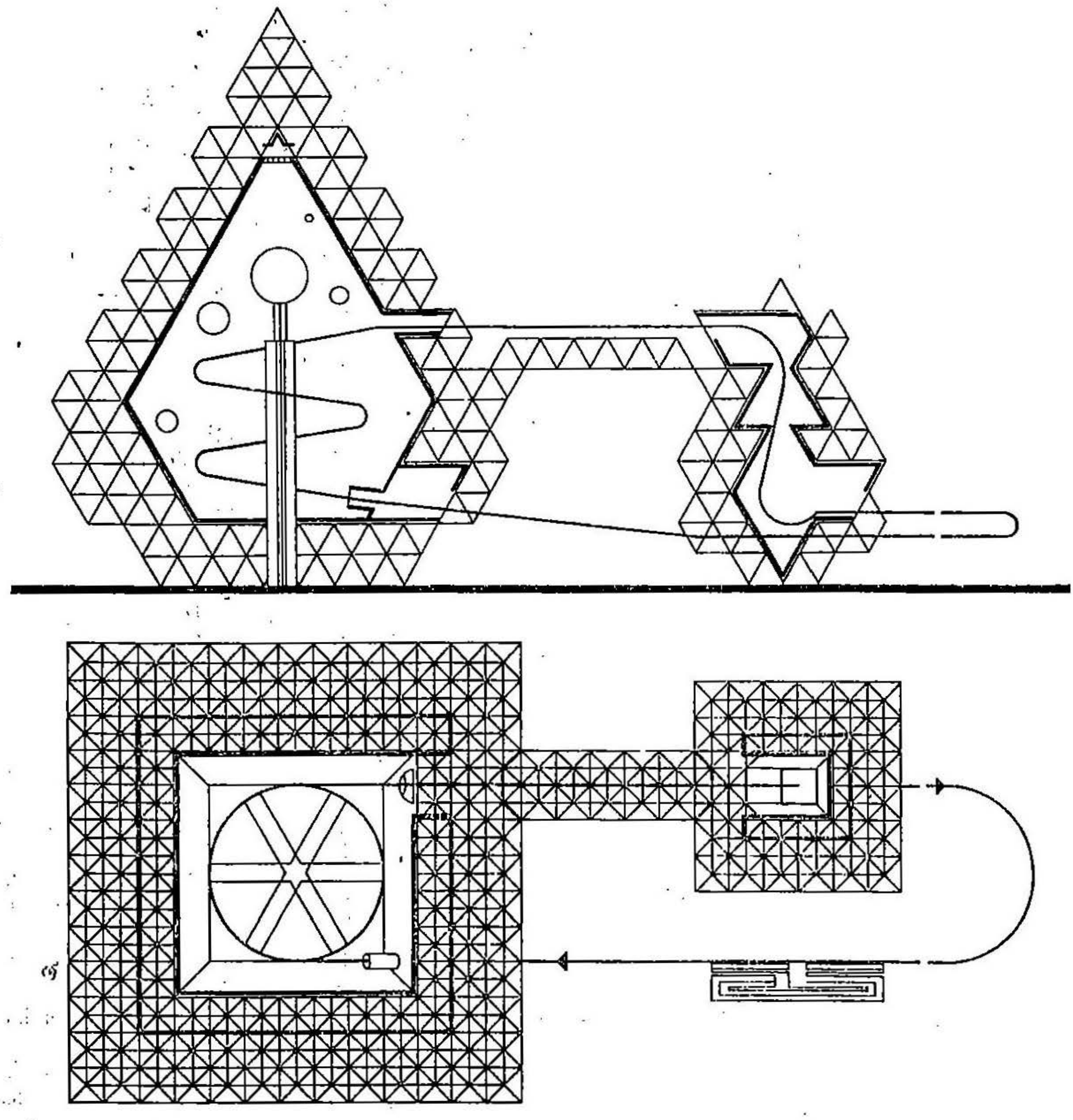


fig. 5.6.26

5.16

5.7. SUPRAFEȚE CUTATE

Suprafețele cutate au avantaje tehnico-economice și estetice deosebite și sînt des folosite în arhitectură ca suprafețe autoportante de acoperire și de închidere a spațiului.
Suprafețele cutate sînt suprafețe poliedrale. Dacă la structurile spațiale s-au făcut referiri în alcătuirea lor la muchii (bare) și vîrfuri (noduri), la suprafețele poliedrale se fac referiri la fețe. Cea mai simplă suprafață cutată se obține prin cutarea unui plan (*Gheorghiu* și *Dragomir*, 1968). Intuitiv, o foaie de hîrtie simplu rezemată se încovoaie sub propria ei greutate (fig. 5.7.1): dacă este pliată (cutată), ea devine autoportantă (fig. 5.7.2), avînd chiar capacitate portantă (fig. 5.7.3). La o supraîncărcare, cutele se deschid (fig. 5.7.4).

Timpanele frontale rigidizează cutele și măresc capacitate portantă (fig.5.7.5). Așezată vertical, foaia de hîrtie nu are stabilitate, dar dacă este cutată, ea capătă stabilitate și este autoportantă (fig. 5.7.6).
Din cutarea planului de-a lungul unor drepte ale lui, paralele, concurente sau tangente la o curbă, se obțin suprafețe cutate: plane, cilindrice, conice etc. Figura 5.7.7 ilustrează o suprafață cutată cilindrică. Suprafețele cutate conice cu păstrarea unor generatoare orizontale sînt reprezentate în figurile 5.7.8 și 5.7.9. Figura 5.7.10 ilustrează o suprafață cutată conică generală, iar figura 5.7.11 reprezintă o suprafață cutată conică cu cutele tangente la o altă suprafață.
Suprafețe cutate planare se mai obțin și prin diverse piramidări între două plane paralele (orizontal sau vertical), ca în figura 5.7.12. Cutele sub formă de trunchi de piramidă, dispuse în cele două sensuri

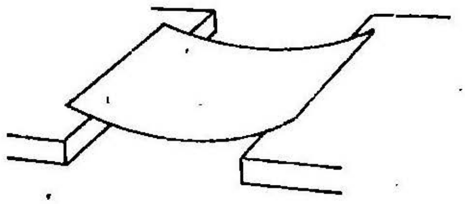


fig. 5.7.1

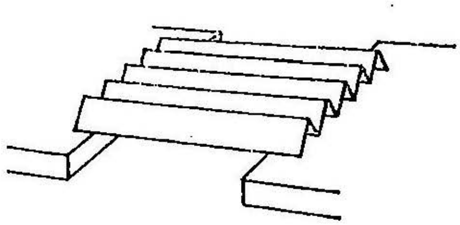


fig. 5.7.2

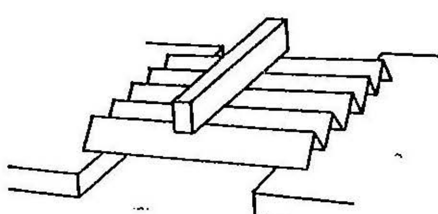


fig. 5.73

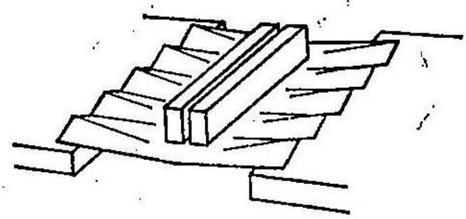


fig. 5.7.4

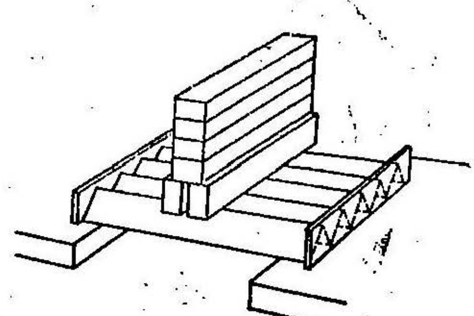


fig. 5.7.5

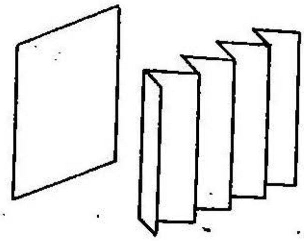


fig. 5.7.6

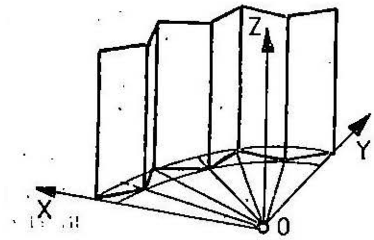


fig. 5.7.7

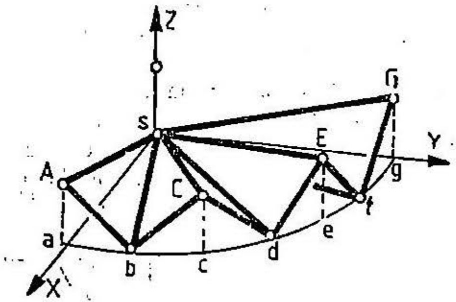


fig. 5.7.8

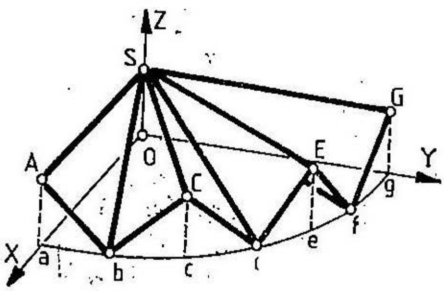


fig. 5.7.9

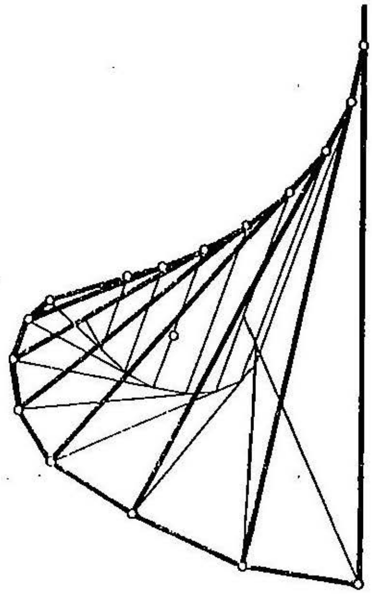


fig. 5.7.11

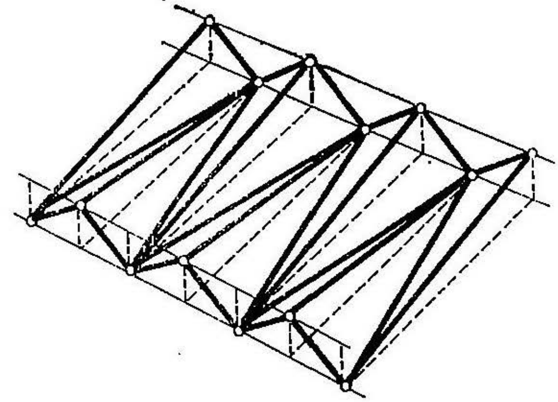


fig. 5.7.12

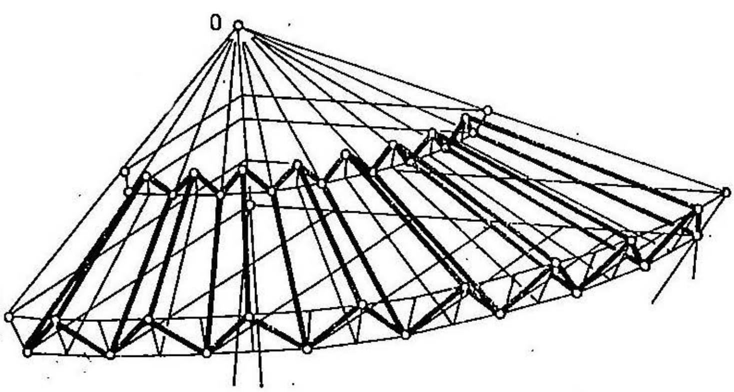


fig. 5.7.10

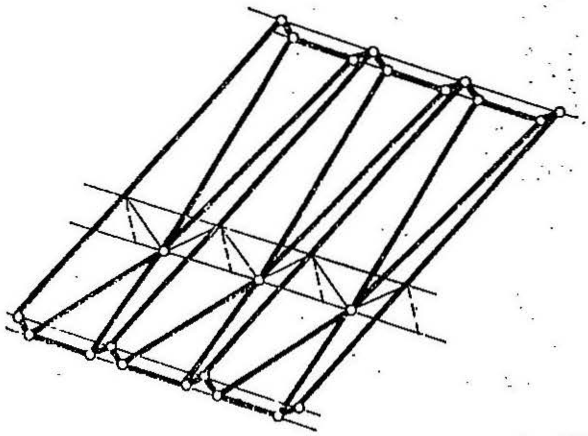


fig. 5.7.13

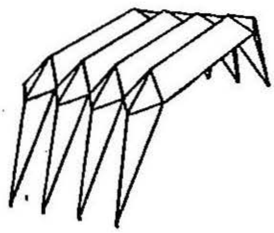


fig. 5.7.14

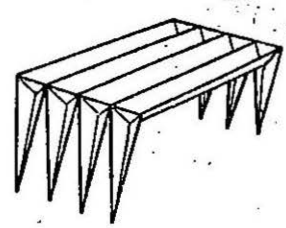


fig. 5.7.15

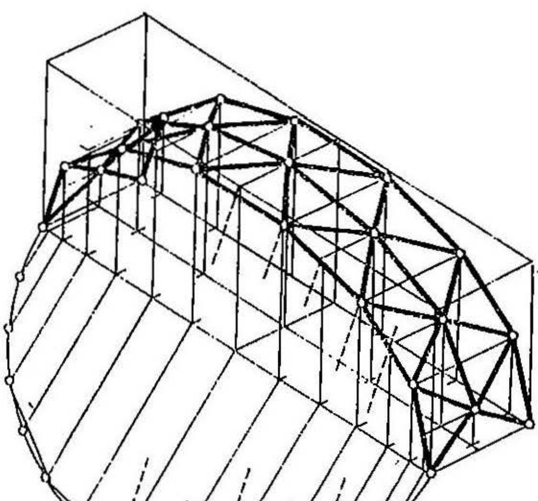


fig. 5.7.16

perpendicular pe reazemul-timpan, au rolul unor grinzi cu console (fig. 5.7.13). Dacă se cutează un plan vertical, cutele capătă rolul unor stîlpi, contraforți sau picioare de cadru (fig. 5.7.14 și 5.7.15).

O suprafață de rotație poate fi cutată și de-a lungul meridianelor. De exemplu, cutînd un cilindru de rotație în lungul cercurilor paralele echidistante, rezultă o rețea spațială de triunghiuri (fig. 5.7.16). În acest caz, cutarea ia aspectul unei *fațetări* (fig. 5.7.17). Dacă se unesc vîrfurile de aceeași cotă ale poligoanelor rezultate, din două în două (deci de-a lungul generatoarelor cilindrului), suprafața acestui cilindru apare structurată din tetraedri egali (fig. 5.7.18 și 5.7.19).

Din numeroasele exemple de suprafețe cutate aplicate în arhitectură s-a ales pentru ilustrare piața acoperită din Caracas (Venezuela), ilustrată în figura 5.7.20.

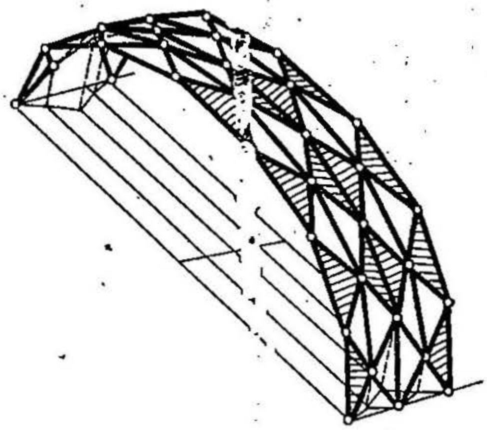


fig. 5.7.17

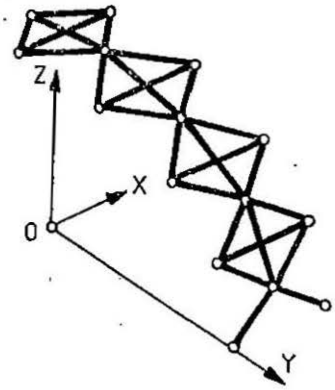


fig. 5.7.18

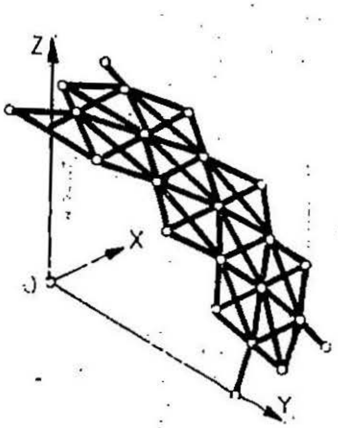


fig. 5.7.19

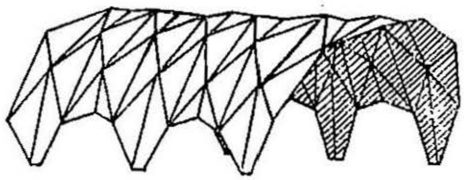


fig. 5.7.20

6.

SUPRAFEȚE RIGLATE

6.1. DEFINIȚII. CLASIFICĂRI

Suprafața riglată este suprafața generată de o dreaptă (D) (*generatoarea* suprafeței riglate) care se sprijină pe trei curbe oarecare din spațiu (Γ_1), (Γ_2), (Γ_3), numite *directoare*.

Dacă una din directoare, de exemplu curba (Γ_3) este înlocuită printr-o suprafață S, la care să fie tangentă suprafața riglată, această suprafață S se numește *suprafață-sîmbure* sau *nucleu*. Dacă una din directoare este o dreaptă aruncată la infinit, atunci generatoarele suprafeței riglate sînt paralele cu un plan fix, numit *plan director*. Dacă printr-un punct fix oarecare se duc paralelele la toate generatoarele suprafeței riglate, se obține *conul director* al acelei suprafețe. Conul director poate degenera într-un plan director.

Suprafețele riglate se pot împărți în două categorii: desfășurabile și nedesfășurabile.

Suprafețele riglate desfășurabile sînt suprafețele riglate care se pot desfășura pe un plan, fără ca părți din pînza lor să se suprapună sau să se rupă.

Aceste suprafețe sînt *conul* și *cilindrul*. Un plan tangent într-un punct la suprafața riglată desfășurabilă conține generatoarea acelei suprafețe.

Suprafețele riglate nedesfășurabile sînt suprafețe care nu se pot desfășura pe un plan. Ele se caracterizează prin variația planului tangent la suprafața riglată odată cu modificarea punctului de tangență pe generatoare; deci, la fiecare poziție a punctului de tangență pe generatoare corespunde un nou plan tangent la suprafață. Suprafețele riglate nedesfășurabile sînt generate de o dreaptă care se sprijină pe:

1) trei directoare curbe (fig. 6.1.1);
2) două directoare și o suprafață-sîmbure;
3) două directoare **și este paralelă cu generatoarele** unui con director;
4) două curbe și o dreaptă directoare — **cilindroid** (fig. 6.1.2); dreapta directoare la distanță **finită** — cilindroidul general și dreaptă directoare **la infinit** — cilindroidul cu plan director;
5) o directoare curbă și două drepte directoare — conoid (fig. 6.1.3); cele două drepte la distanță finită — conoidul general; una din drepte la infinit — conoidul cu plan director; cele două drepte la infinit — cilindrul;
6) trei drepte directoare toate la distanță finită — hiperboloidul general (fig. 6.1.4); o dreaptă directoare la infinit — paraboloidul hiperbolic (fig. 6.1.5).

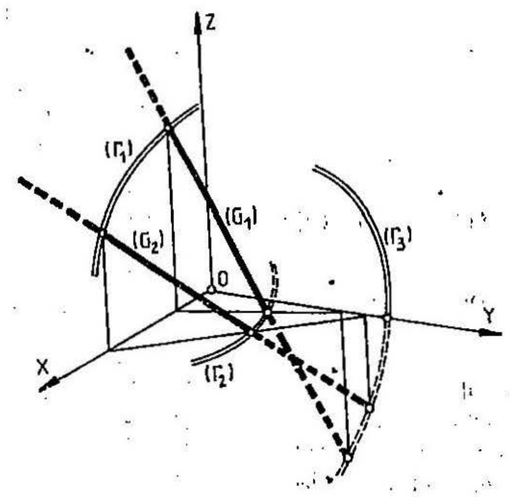


fig. 6.1.1

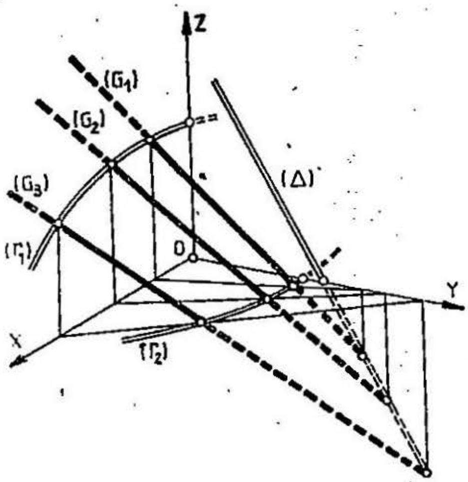


fig. 6.1.2

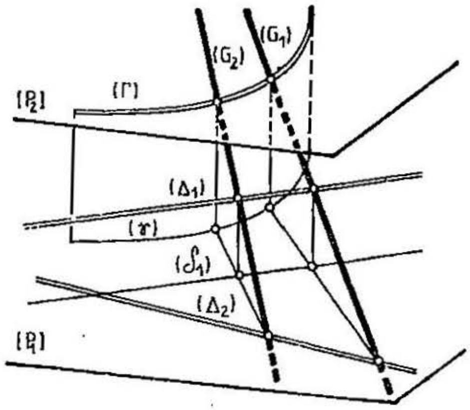


fig. 6.1.3

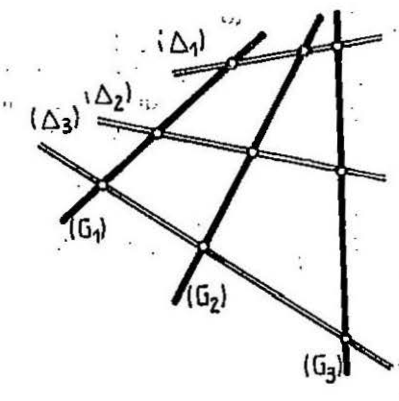


fig. 6.1.4.

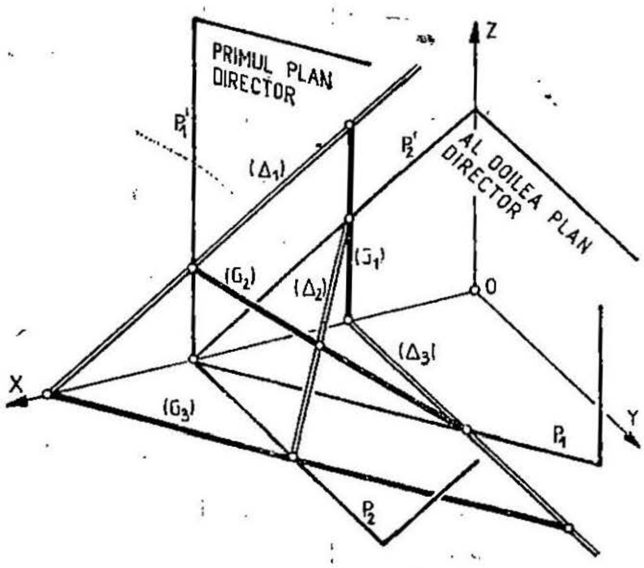


fig. 6.1.5

6.2. SUPRAFEȚE CONICE ȘI CILINDRICE

CILINDRUL

Cilindrul de rotație rezultă din rotația unei drepte în jurul unei alte drepte paralele cu ea, care devine axa cilindrului (fig. 6.2.1). Secțiunile plane prin cilindru care nu trec prin generatoarele lui sînt elipse. Secțiunile plane perpendiculare pe axa și generatoarele cilindrului sînt cercuri. Secțiunile plane ce trec prin axa cilindrului sau sînt paralele cu ea se obțin după generatoarele cilindrului. Curbele geodezice ale cilindrului, în afara generatoarelor, sînt *elice*, iar la cilindrul de rotație sînt *elice circulare*.

Cilindrul parabolic este generat de o dreaptă ce se sprijină pe o parabolă și rămîne perpendiculară pe planul acestei parabole (fig. 6.2.2).

Cilindrul sinusoidal este generat de o dreaptă ce se sprijină pe o sinusoidă și rămîne totdeauna perpendiculară pe planul ei (fig. 6.2.3).

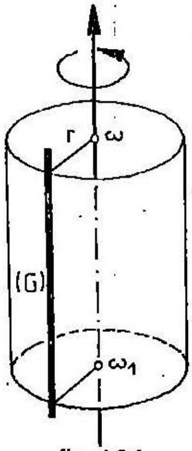


fig. 6.2.1

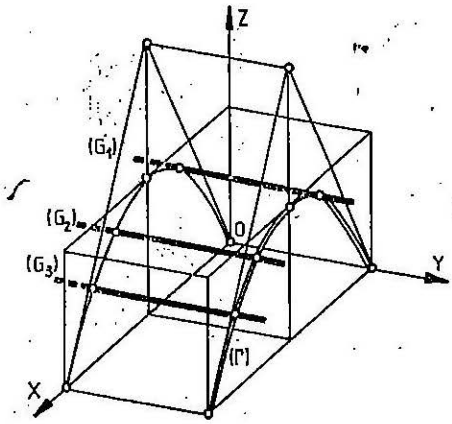


fig. 6.2.2

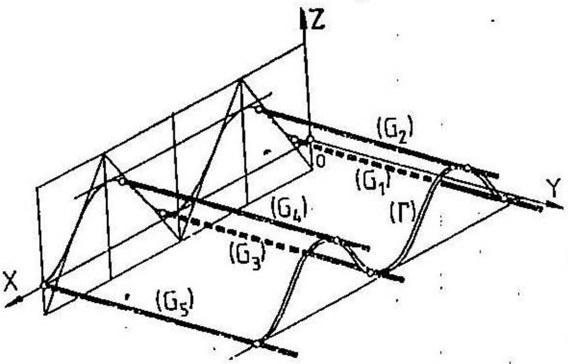


fig. 6.2.3

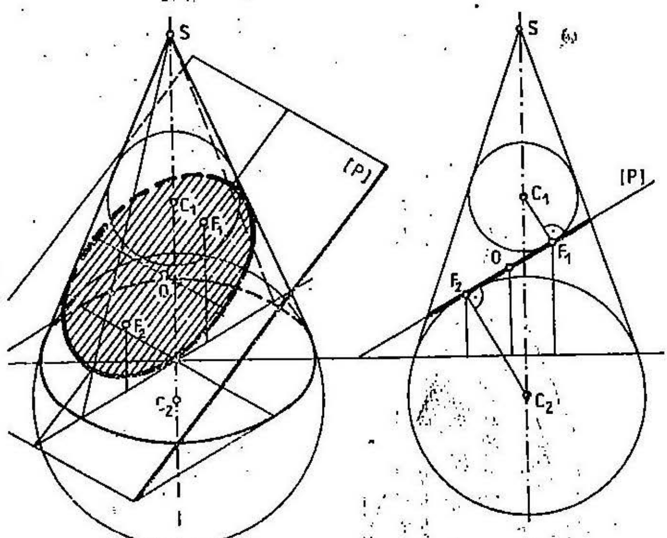


fig. 6.2.6

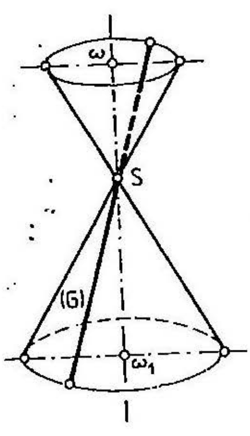


fig. 6.2.4

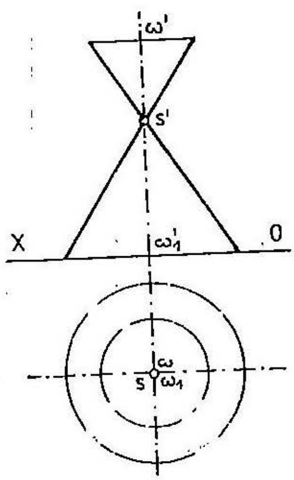


fig. 6.2.5

CONUL

Suprafața conică este generată de o dreaptă care trece printr-un punct oarecare din spațiu (numit vîrf) și are ca directoare o conică; se dezvoltă astfel o suprafață cu două pînze.

Pentru o suprafață de ordinul 2 se poate alege întotdeauna ca directoare un cerc. Rezultă *conul de rotație* (fig. 6.2.4). Proiecțiile vîrfului și ale curbei directoare sînt suficiente pentru reprezentarea descriptivă a unui con de ordinul 2 (fig. 6.2.5). Conturul aparent al conului este determinat de drepte și curbe în interiorul cărora se proiectează toate punctele suprafeței pe planele de proiecție și este diferit în funcție de planele de proiecție.

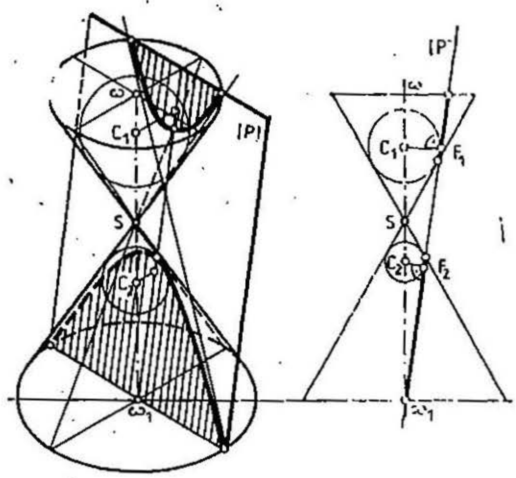


fig. 6.2.7

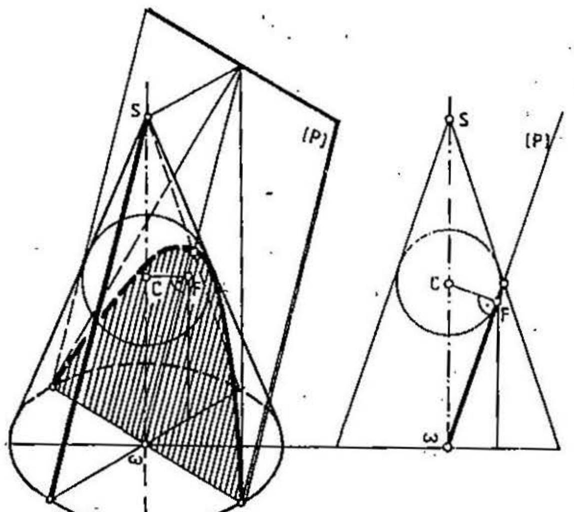


fig. 6.2.8

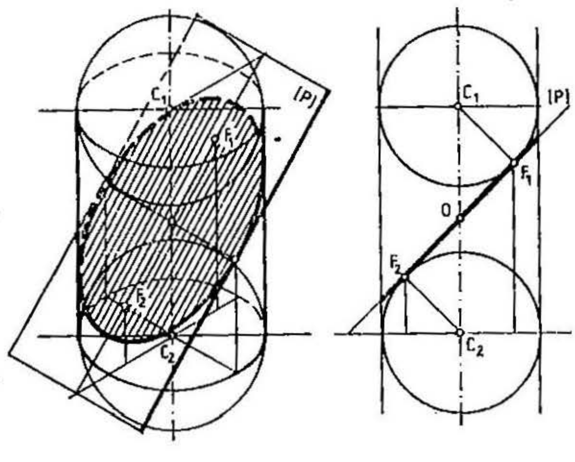


fig. 6.2.9

Toate aceste elemente rămîn valabile și pentru reprezentarea suprafeței cilindrice, considerînd vîrful conului aruncat la infinit.

Teorema lui Dandelin. Secțiunea efectuată cu un plan într-un con este elipsă (fig. 6.2.6), hiperbolă (fig. 6.2.7) sau parabolă (fig. 6.2.8), după cum planul de secțiune taie o singură pînză a conului, ambele pînze ale conului sau este paralel cu un plan tangent la con.

Secțiunea eliptică în con și cilindru. Se înscriu în con două sfere tangente, respectiv în F_1 și F_2 de o parte și de alta a planului de secțiune. Punctele F_1 și F_2 sînt chiar focarele elipsei. Același lucru este valabil și în cazul secțiunii eliptice într-un cilindru (fig. 6.2.9). Secțiunea eliptică într-un con făcută cu un plan de capăt este ilustrată în figura 6.2.10. Axa mare a elipsei apare în adevărată mărime în proiecția verticală ($\beta'\alpha'$), iar în proiecția orizontală este dreapta frontală care trece prin proiecția vîrfului conului ($\beta\alpha$). Axa mică a elipsei de secțiune apare în proiecție verticală un punct m', la mijlocul lui $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$; ea se găsește pe cercul de nivel la cota punctului m'. În proiecția orizontală tangenta la elipsa de secțiune și tangenta la cercul de bază

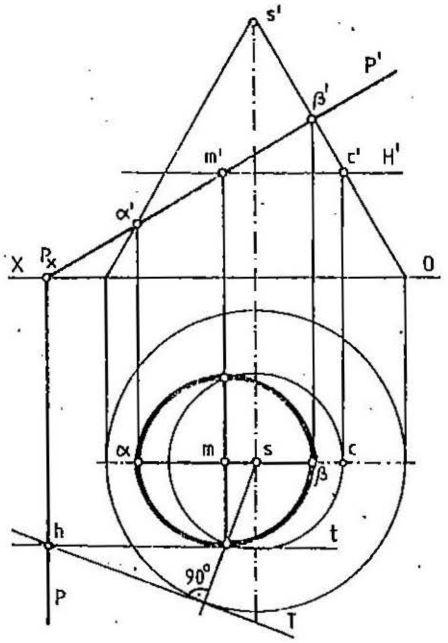


fig. 6.2.10

al conului sînt concurente într-un punct situat pe urma orizontală a planului de secţiune.
În figura 6.2.11, se duce o secţiune eliptică în con cu un plan oarecare. Se duce prin vîrful conului un

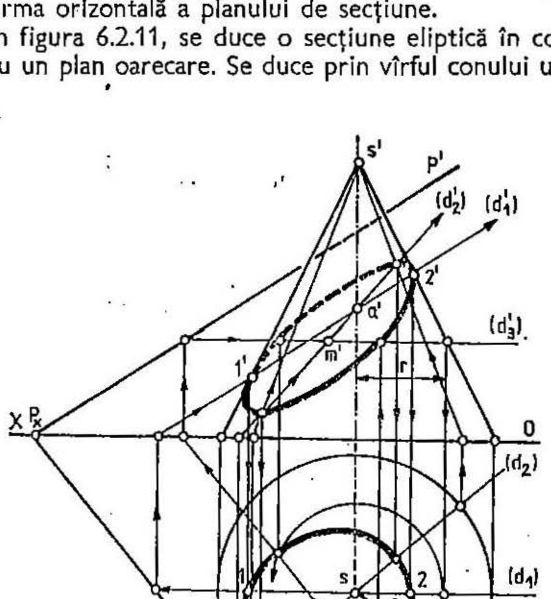


fig. 6.2.11

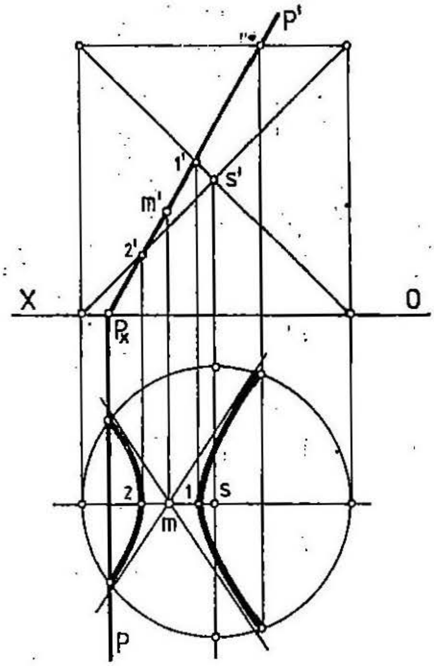


fig. 6.2.12

plan frontal ce intersectează planul oarecare de secţiune după o dreaptă frontală $D_1(d_1, d'_1)$. Această dreaptă frontală intersectează axa conului în acelaşi punct (a, a') prin care trece şi axa mare a elipsei de secţiune. În proiecţie orizontală axa mare a elipsei este perpendiculară pe urma planului de secţiune şi trece prin proiecţia vîrfului conului. Axa mare este şi dreapta de cea mai mare pantă a planului de secţiune. Dacă se secţionează conul cu un plan vertical ce trece prin axa mare a elipsei, rezultă două generatoare de secţiune în proiecţie verticală. Intersectînd proiecţia verticală a dreptei de cea mai mare pantă (a planului de secţiune) cu cele două generatoare se determină proiecţia verticală a axei mari a elipsei. Axa mică a elipsei este o dreaptă de nivel ce trece prin mijlocul axei mari. Ducînd planul de nivel prin ea, se determină cercul de nivel cu ajutorul căruia se află proiecţia orizontală a axei mici. În punctele **1'** şi **2'** se schimbă vizibilitatea elipsei de secţiune. Elipsa este tangentă la generatoarele de contur aparent al conului în aceste puncte **1'** şi **2'**.

Secţiunea hiperbolică (fig. 6.2.12). Se secţionează un con circular drept cu un plan de capăt [P], astfel ca acest plan să taie ambele pînze ale conului. Vîrfurile (1, 1') şi (2, 2') ale secţiunii hiperbolice rezultă din intersecţia generatoarelor de front ale conului cu planul de secţiune. Pentru determinarea asimptotelor hiperbolei de secţiune, se duce prin

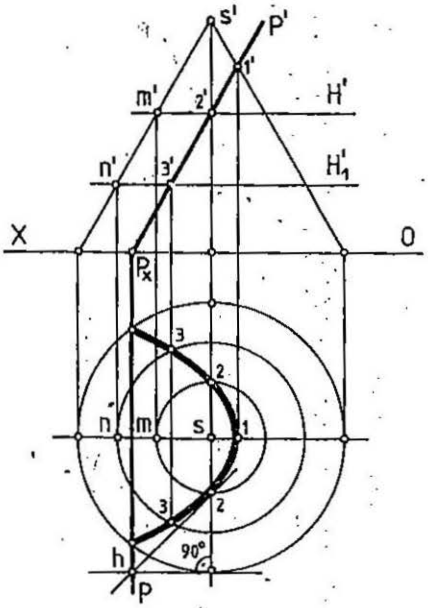


fig. 6.2.13

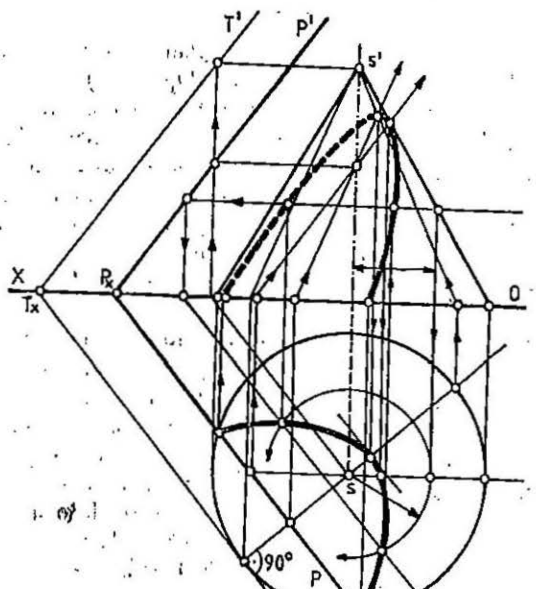


fig. 6.2.14

vîrful S (s, s') al conului un plan paralel cu planul [P]. Asimptotele hiperbolei de secţiune se intersectează în punctul M(m, m'), care este centrul secţiunii (aflat la mijlocul segmentului AB).

Secţiunea parabolică. Se secţionează conul cu un plan de capăt paralel cu o generatoare frontală (fig. 6.2.13). Punctele parabolei de secţiune se obţin secţionînd conul cu plane de nivel (planele [H] şi [H_1]). În figura 6.2.14 se obţine o secţiune parabolică, secţionînd conul cu un plan oarecare paralel cu o generatoare; deci, planul de secţiune este paralel cu un plan tangent la con. Axa parabolei este dreapta de cea mai mare pantă a planului de secţiune şi trece prin axa conului.

DESFĂŞURATELE SUPRAFEŢELOR CONICE ŞI CILINDRICE

Cilindrul circular drept are ca desfăşurată un dreptunghi care are ca laturi înălţimea cilindrului şi lungimea cercului de bază (fig. 6.2.15).

Desfăşurata conului circular drept este un sector de cerc care are lungimea arcului egală cu lungimea cercului de bază al conului şi ca rază lungimea generatoarelor conului (fig. 6.2.16). Numărul gradelor acestui sector de cerc este dat de formula $n° = \frac{360° \times r}{G}$, unde r este raza cercului de bază şi G, generatoarea conului.

$$l_{arc} = \frac{\pi \times R \times n°}{180°}, \text{ de unde } 2\pi r = \frac{\pi \times G \times n°}{180°}.$$

Dacă se secţionează conul circular drept cu un plan [P], *desfăşurata trunchiului de con* care rezultă se obţine construind desfăşurata curbei de secţiune prin puncte aflate pe generatoarele conului (fig. 6.2.17).

Desfăşurata trunchiului de cilindru, ce rezultă prin secţionarea cu un plan [P] a unui cilindru circular drept, se obţine în mod asemănător, construind desfăşurata curbei de secţiune prin puncte aflate pe generatoarele cilindrului (fig. 6.2.18). Această desfăşurată a curbei de secţiune este o sinusoidă.

Desfăşurata cilindrului oblic frontal este arătată în figura 6.2.19. Se desfăşoară un cilindru a cărui curbă directoare este un cerc situat în planul orizontal de proiecţie şi are generatoarele frontale. Se secţionează acest cilindru cu un plan de capăt perpendicular pe generatoarele lui. Rezultă un trunchi de cilindru a cărui desfăşurată se obţine ca în exemplul precedent. În proiecţia verticală se găsesc adevăratele mărimi ale generatoarelor cilindrului.

Pentru desfăşurarea unui cilindru oarecare, acesta trebuie adus într-o poziţie particulară (vertical sau frontal), printr-o schimbare de plan de proiecţie.

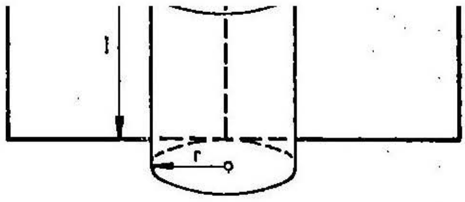


fig. 6.2.15

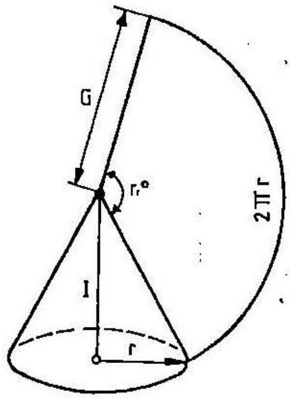


fig. 6.2.16

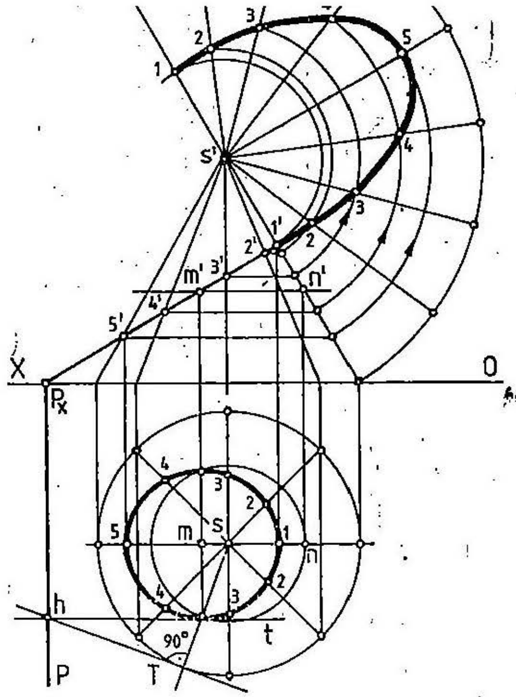


fig. 6.2.17

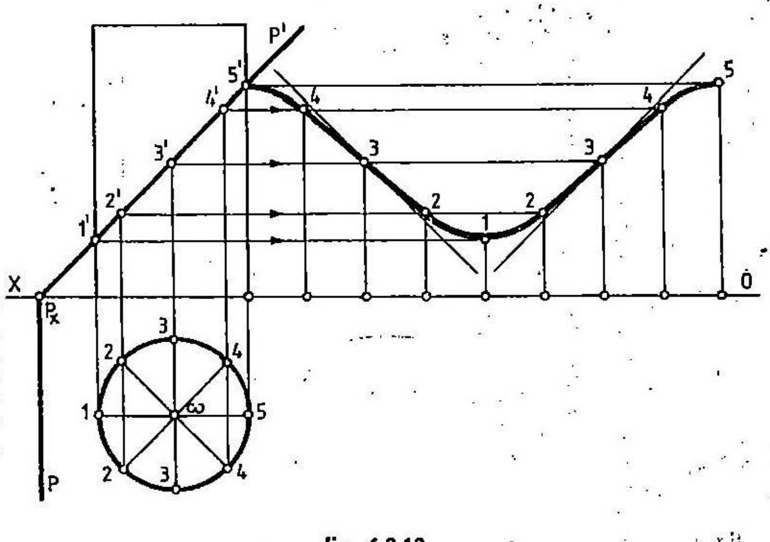


fig. 6.2.18

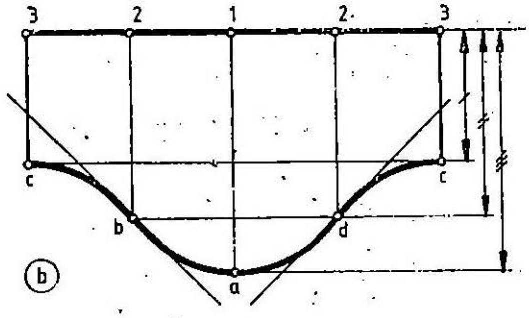


fig. 6.2.19, b

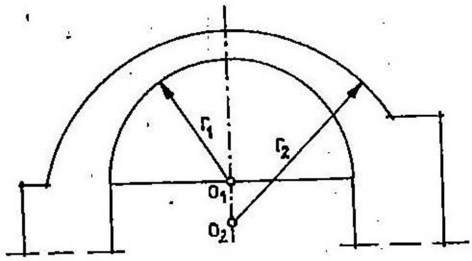


fig. 6.3.1

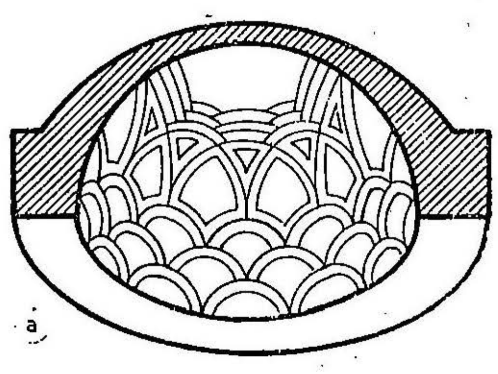


fig. 6.3.2, a

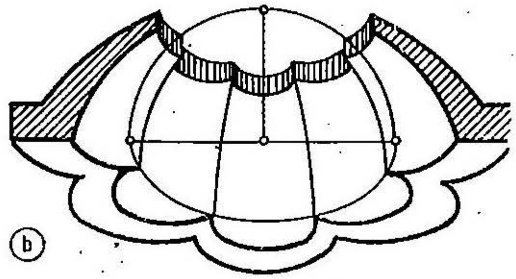


fig. 6.3.2, b

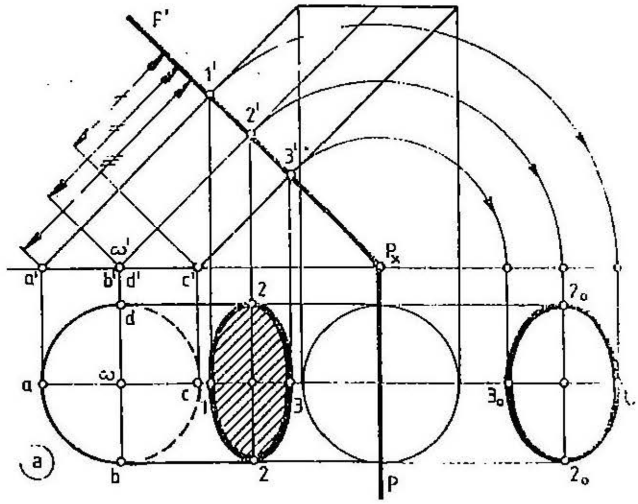


fig. 6.2.19, a

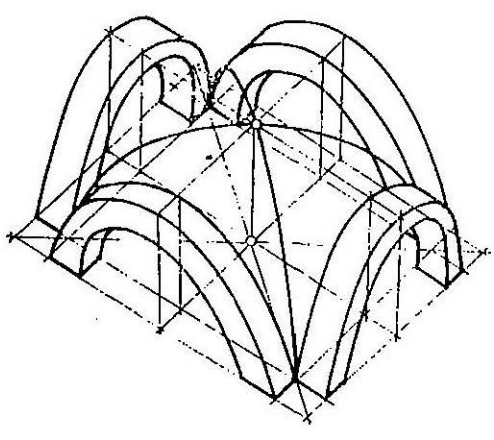


fig. 6.3.3

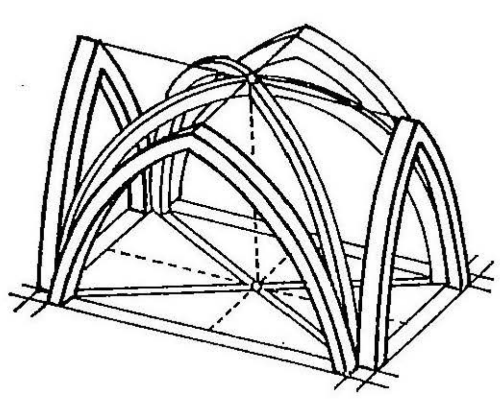


fig. 6.3.4

6.3. GEOMETRIA BOLŢILOR

Istoric. Vechile bolţi — asiro-caldeană, romană şi bizantină — erau construite din mase de zidărie din cărămidă sau piatră, ce erau limitate între două suprafeţe (fig. 6.3.1):

— vizibilă din interiorul spaţiului acoperit — *intradosul*;

— vizibilă din exterior — *extradosul*.

Datorită grosimii variabile a bolţii de la cheie către reazem, intradosul şi extradosul diferă între ele. Bolţile de deschideri mici (cilindrice şi sferice) aveau o structură uniformă formată din elemente de acelaşi ordin de mărime — cărămizi sau bolţari de piatră. Deschiderile mai mari au fost acoperite cu bolţi structurate nervurat.

În arhitectura bizantină se întîlneşte bolta sferică de mici deschideri, structurată din arce întretăiate, păstrînd suprafaţa sferei sau formînd muchii de-a lungul meridianelor, ce aveau rol de nervuri (fig. 6.3.2). Arhitectura romanică alungeşte spaţiul de acoperit, acoperind şi spaţii dreptunghiulare. Se introduce pe lîngă bolţile cilindrice şi sferice, *bolta cu muchii ieşite* (spre interior), toate din bolţari de piatră pe arce dublouri şi nervuri de-a lungul muchiilor ieşite, formînd structuri spaţiale (fig. 6.3.3).

Arhitectura gotică acoperă travei dreptunghiulare sau pătrate cu laturi de 12...16 m, cu bolţi alcătuite din *structuri nervurate* (fig. 6.3.4). Apar arcele întretăiate din piatră care, asigurînd echilibrul static, preiau şi împingerile unei umpluturi, de asemenea, din piatră (arce diagonale în plin centru).

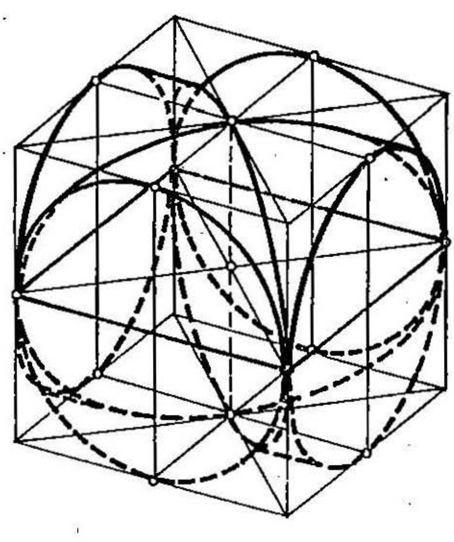


fig. 6.3.5

Bolţile de bitangenţă. Un plan pătrat se poate acoperi prin intersecţia a doi cilindri de aceeaşi rază, rezultînd o penetraţie bitangenţială în punctul T (fig. 6.3.5). Rezultă două curbe de intersecţie (elipse) care se proiectează pe planul orizontal (planul de naştere al bolţii), după diagonalele pătratului. Din această intersecţie rezultă două tipuri de bolţi:

— *bolta cu muchii intrate* (fig. 6.3.6); dacă se reţine solidul comun se obţine bolta cu muchii intrate (privind din interior); ea este rezemată pe cele patru laturi;

— *bolta cu muchii ieşite* (fig. 6.3.7); dacă se reţine solidul rest, se obţine bolta cu muchii ieşite (în interior), rezemînd în patru puncte.

Luneta cilindrică este bolta ce rezultă din intersecţia a doi semicilindri cu axele în planul de naştere (planul orizontal) şi de raze inegale care acoperă un dreptunghi; există două tipuri de lunete cilindrice:

— cu muchii ieşite (fig. 6.3.8), la care s-a reţinut solidul rest;

— cu muchii intrate (fig. 6.3.9), la care s-a reţinut solidul comun.

O arie octogonală poate fi acoperită intersectînd patru cilindri (fig. 6.3.10). Arhitectura bolţii rezultă păstrînd solidul comun sau solidul rest.

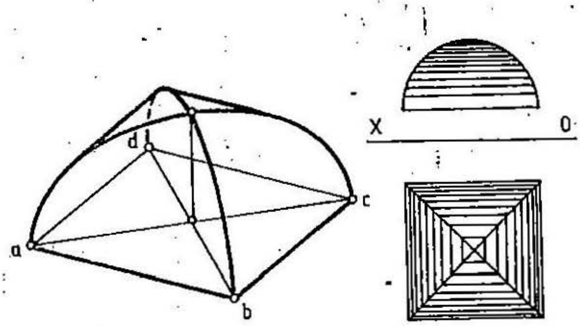


fig. 6.3.6

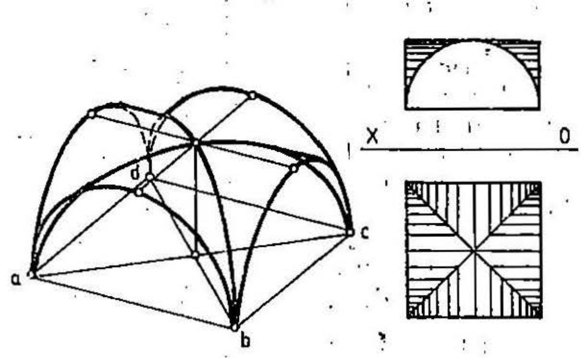


fig. 6.3.7

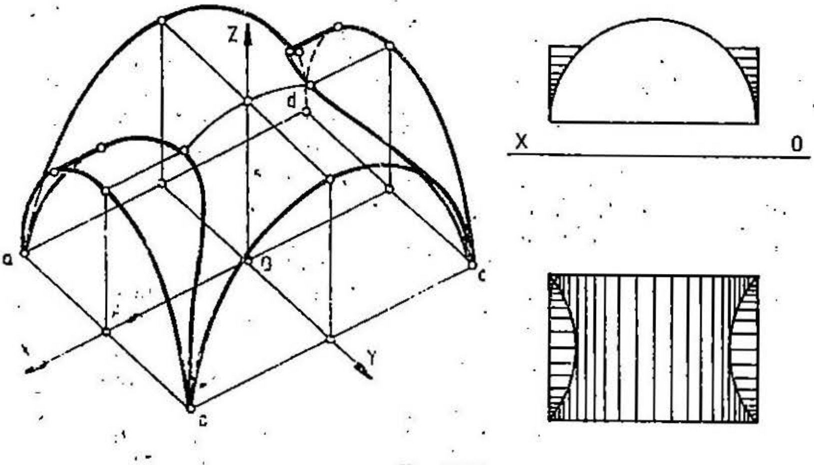


fig. 6.3.8

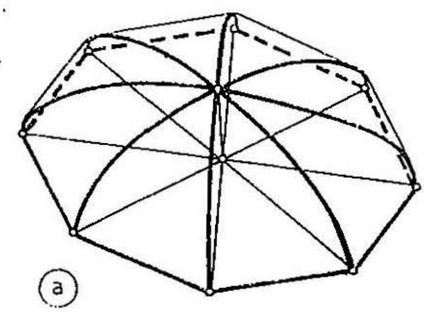


fig. 6.3.10, a

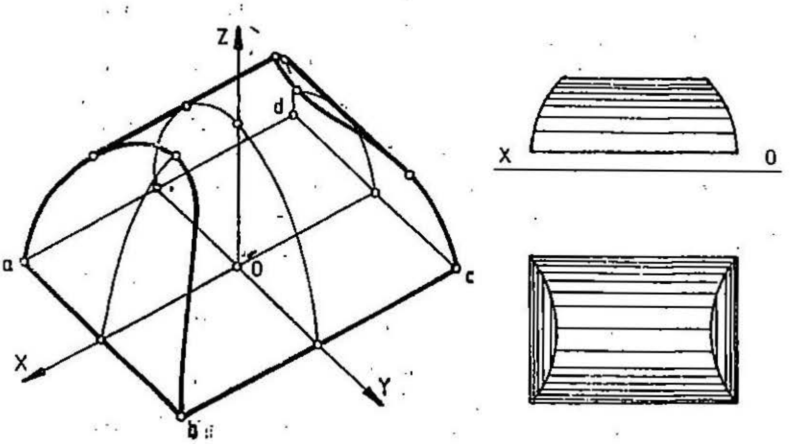


fig. 6.3.9

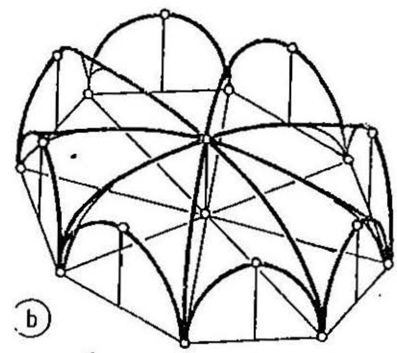


fig. 6.3.10, b

5.21 *Bolta semisferică cu pandantivi.* Acest tip de boltă este rezultatul secționării unei semisfere, avînd ecuatorul circumscris unui pătrat, cu planele verticale de-a lungul laturilor acestuia. Rezultă niște triunghiuri sferice numite *pandantivi* (fig. 6.3.11). De remarcat că bolta semisferică cu pandantivi reține din semisferă o calotă cu o deschidere corespunzătoare unui unghi de 45° față de axă, deci mai mic decît unghiul admis de 51°49′, care limitează calota de zona cu tensiuni inelare.

5.22 *Bolta moldovenească.* Arhitectura veche moldovenească a folosit o construcție prin care se trece de la un plan circular la unul pătrat și apoi din nou la un plan circular de rază mai mică. Cu ajutorul a patru „*arce piezișe*" și al pandantivilor dintre acestea se micșorează succesiv spațiul de acoperit. Arcele piezișe sînt porțiunile din cilindrul ce rezultă din intersecția a doi semicilindri orizontali bitangenți cu o calotă sferică și cu un cilindru vertical circumscris pătratului ce trebuie acoperit (fig. 6.3.12).

Rotind construcția cu 45° rezultă o penetrație de 8 arce piezișe cu apariția a 8 pandantivi, făcîndu-se astfel trecerea de la cerc la un octogon regulat și apoi iar la cerc. Se îndepărtează din arcele piezișe porțiunile de deasupra pandantivilor (fig. 6.3.13, a și 6.3.13, b).

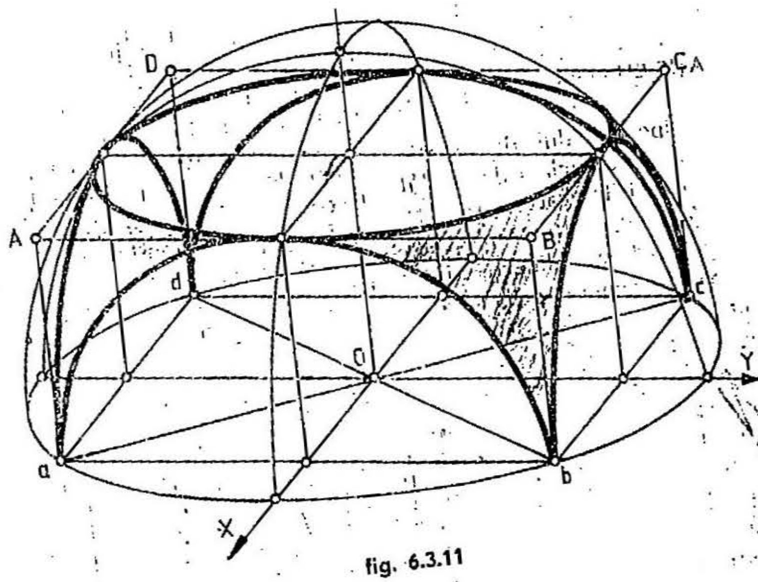


fig. 6.3.11

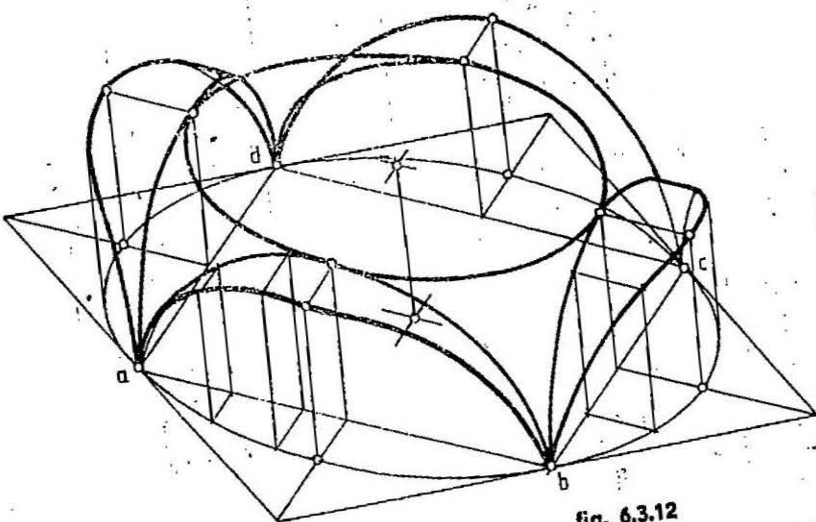


fig. 6.3.12

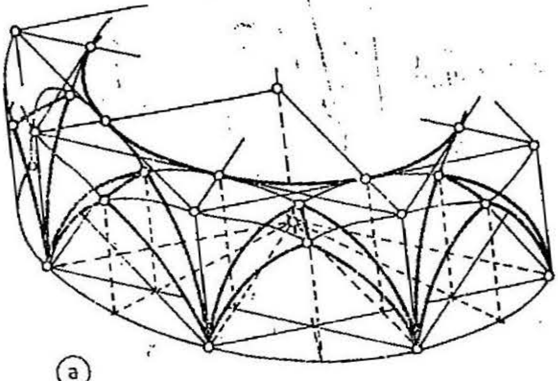


fig. 6.3.13, a

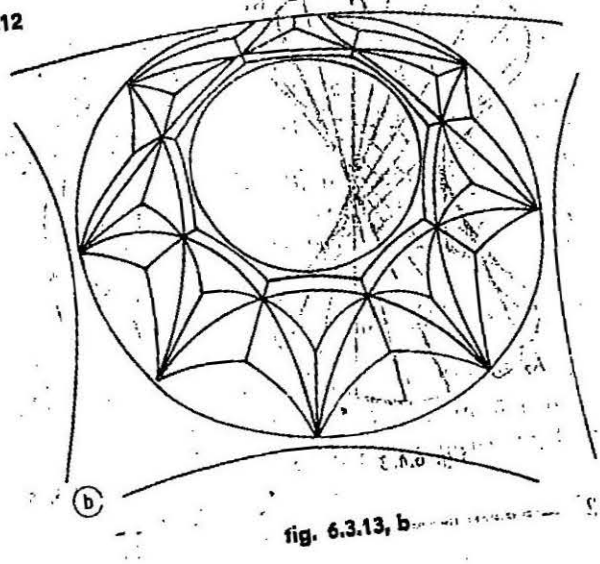


fig. 6.3.13, b

6.4. HIPERBOLOIZI

HIPERBOLOIDUL DE ROTAȚIE CU O PÎNZĂ

Definiție. Caracteristici. Hiperboloidul de rotație cu o pînză este o suprafață dublu riglată de gradul al doilea, generată de o dreaptă (D), care se rotește în jurul altei drepte (W) (ca axă), nesituată în același plan cu dreapta (D) (fig. 6.4.1, a). Hiperboloidul de rotație cu o pînză poate fi generat prin rotația unei hiperbole în jurul axei sale netransversale (fig. 6.4.1, b). Fiecare punct al generatoarei descrie prin rotație un cerc paralel al suprafeței. Paralelul de rază minimă se numește *cerc colier*. Cercul colier constituie conturul aparent orizontal al hiperboloidului de rotație cu o pînză (fig. 6.4.2).
Deoarece există două drepte care pot genera aceeași suprafață, hiperboloidul de rotație cu o pînză este o *suprafață dublu riglată*. Cele două drepte fac parte din două sisteme de generatoare (fig. 6.4.3). Generatoarele frontale se numesc *genera-*

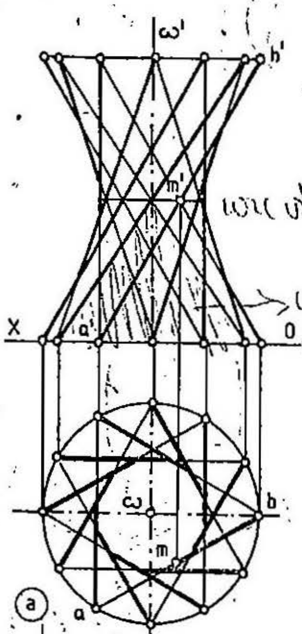


fig. 6.4.1, a

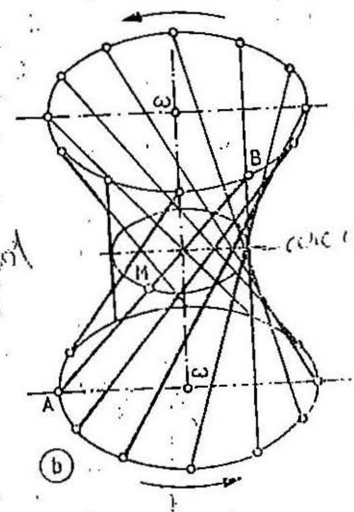


fig. 6.4.1, b

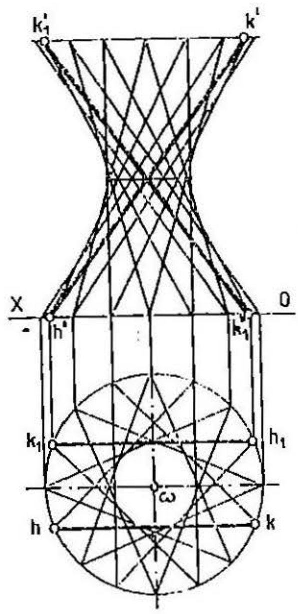


fig. 6.4.2

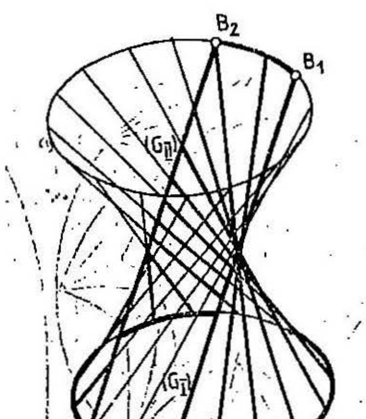


fig. 6.4.3

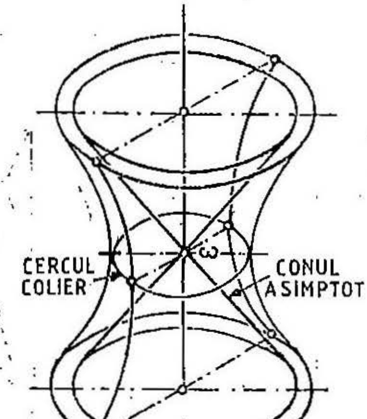


fig. 6.4.4

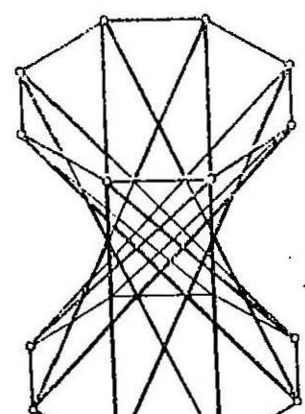


fig. 6.4.5

toare principale. Proiecțiile verticale ale acestor generatoare principale sînt confundate două cîte două și alcătuesc conturul aparent al *conului asimptotal al suprafeței*. Conul asimptot al suprafeței (fig. 6.4.4) este conul cu vîrful în centrul colierului și generatoarele lui se obțin ducînd din centrul colierului toate paralelele la generatoarele hiperboloidului. La orice generatoare de hiperboloid corespunde o generatoare paralelă pe conul asimptot și fiecărei generatoare de pe conul asimptot îi corespund două generatoare paralele, de sistem diferit, pe suprafața hiperboloidului.

Secțiuni în hiperboloidul de rotație. Secționînd cu un plan hiperboloidul de rotație se obțin următoarele secțiuni:

— *secțiune eliptică*, dacă planul de secțiune taie o singură pînză a conului asimptot, deci secționează o singură dată hiperboloidul de rotație;

— *secțiune hiperbolică*, dacă planul de secțiune taie ambele pînze ale conului asimptot, deci taie de două ori pînza hiperboloidului;

— *secțiune parabolică*, dacă planul de secțiune este paralel cu o generatoare a conului asimptot, deci taie o singură dată pînza hiperboloidului.

Hiperboloidul de rotație fațetat. Dacă se duc și generatoarele celui de-al doilea sistem, se vede că ele formează, împreună cu generatoarele primului sistem, poligoane strîmbe întretăindu-se pe ele însele. Se obțin întretăieri de laturi formate de

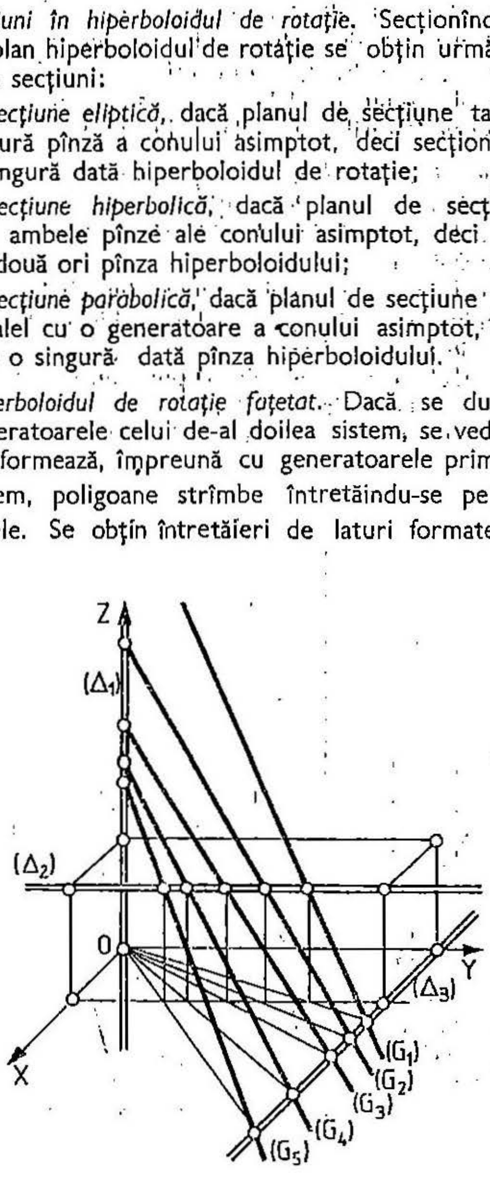


fig. 6.4.6

generatoare din sisteme diferite. Aceasta duce la realizarea unui poliedru înscris și circumscris aceluiași hiperboloid de rotație, numit hiperboloidul de rotație fațetat (fig. 6.4.5).

HIPERBOLOIDUL GENERAL

Hiperboloidul general este suprafața riglată generată de o dreaptă care se sprijină tot timpul pe trei drepte directoare neparalele cu același plan (deci necoplanare). Hiperboloidul general este o suprafață de gradul al doilea analoagă hiperboloidului de rotație cu o singură pînză (fig. 6.4.6). Dacă două din cele trei directoare sînt coplanare, suprafața se reduce la un sistem de două plane. Dacă cele trei directoare drepte sînt paralele cu același plan, suprafața devine paraboloid hiperbolic. Dacă cele trei drepte directoare sînt concurente într-un punct, suprafața este nedeterminată.

6.5. PARABOLOIZI HIPERBOLIC

Paraboloidul hiperbolic este suprafața riglată de gradul al doilea generată de o dreaptă care se sprijină pe două directoare drepte și rămîne tot timpul paralelă cu un plan director. El se construiește generatoare cu generatoare, particularizînd construcția hiperboloidului general. Cea de-a treia directoare dreaptă este aruncată la infinit și este înlocuită în acest caz de un plan director, la care rămîn paralele generatoarele suprafeței.

Paraboloidul hiperbolic este o *suprafață strîmbă dublu riglată*. Există două familii de generatoare care pot genera același paraboloid hiperbolic. Prima familie de generatoare este alcătuită din generatoare paralele cu primul plan director (fig. 6.5.1). Cealaltă familie de generatoare este alcătuită din generatoare paralele cu al doilea plan director. Al doilea plan director este paralel cu cele două directoare drepte (Γ_1) și (Γ_2) pe care se sprijină generatoarele din prima familie (fig. 6.5.2). Astfel, generatoarele din prima familie pot deveni directoare pentru cele din a doua familie și invers. Paraboloidul hiperbolic este singura suprafață riglată cu două plane directoare.

Dacă cele două plane directoare sînt perpendiculare, atunci paraboloidul hiperbolic este *echilater*, iar generatoarele din cele două familii se taie toate sub același unghi (fig. 6.5.3). Două generatoare din aceeași familie nu sînt concurente, fiind

situate în plane paralele. Două generatoare din familii diferite sînt totdeauna concurente într-un punct pe suprafața paraboloidului hiperbolic, determinînd planul tangent la paraboloidul hiperbolic în acel punct. Generatoarele paraboloidului hiperbolic paralele cu planul director determină pe dreptele directoare rapoarte egale.

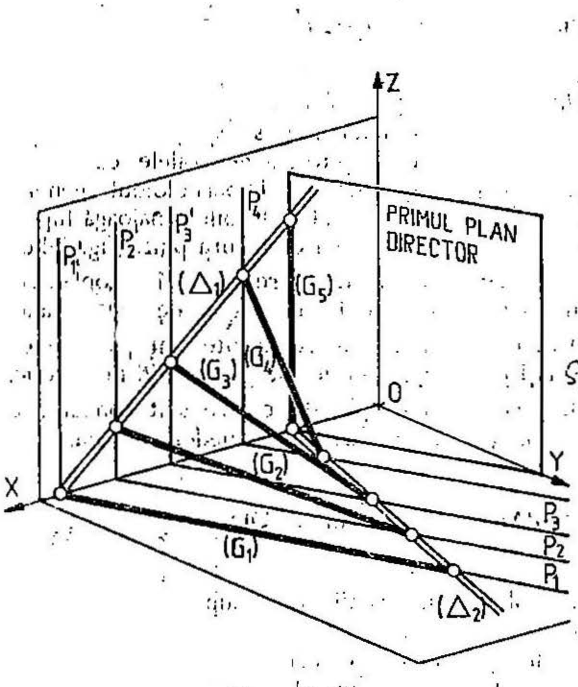
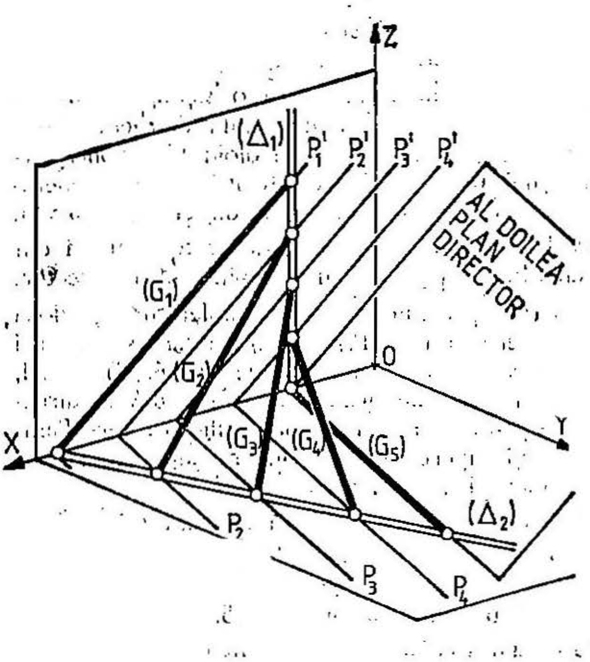


fig. 6.5.1

Un paraboloid hiperbolic poate fi definit și cu ajutorul unui *patrulater strîmb* ABCD (fig. 6.5.3).

Un patrulater strîmb determină un paraboloid hiperbolic și numai unul. Axa paraboloidului hiperbolic este dreapta paralelă cu dreapta de intersecție a celor două plane directoare; ea se află unind mijloacele diagonalelor patrulaterului strîmb ABCD. *Vîrful* paraboloidului hiperbolic este punctul de pe suprafața lui în care planul tangent în acel punct este perpendicular pe axa paraboloidului hiperbolic. Cele două generatoare care trec prin vîrful paraboloidului hiperbolic se numesc *generatoare principale*. Generatoarele principale sînt diagonalele unui paralelogram ce se obține unind mijloacele laturilor patrulaterului strîmb AbCd.

Secțiuni plane în paraboloidul hiperbolic. Tipul curbei de secțiune este dat de poziția planului de secțiune față de axa paraboloidului hiperbolic (fig. 6.5.4);
— *parabolă*, dacă planul de secțiune este paralel sau conține axa paraboloidului hiperbolic (de exemplu, secțiuni în paraboloidul hiperbolic cu plane de profil și frontale);
— *hiperbolă*, dacă planul de secțiune nu este paralel cu axa paraboloidului hiperbolic (de exemplu, secțiuni în paraboloidul hiperbolic cu plane orizontale).



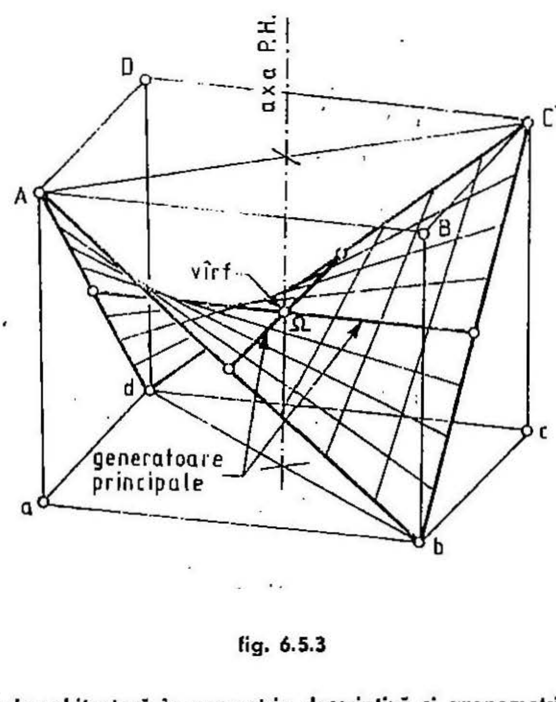


fig. 6.5.3

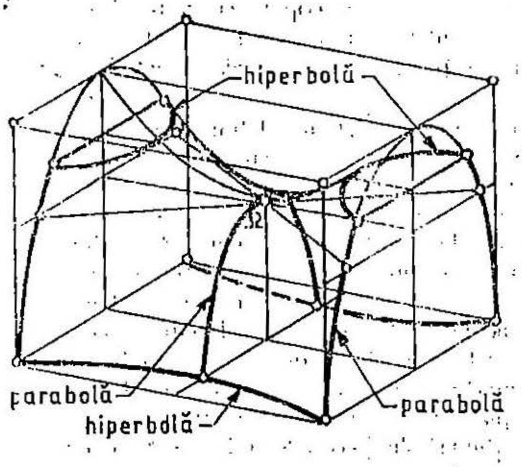


fig. 6.5.4

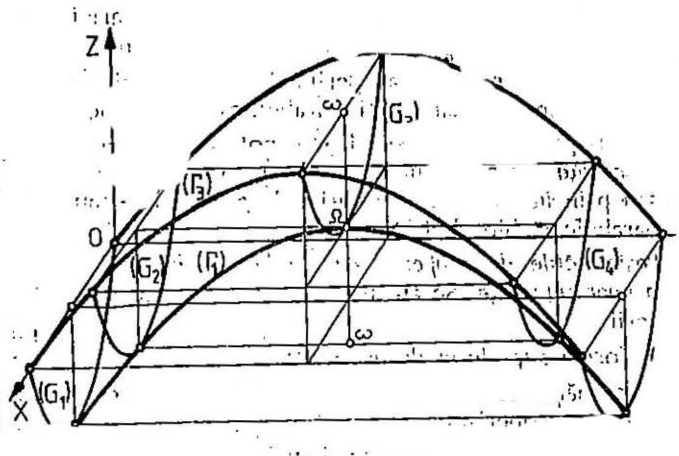


fig. 6.5.5

PARABOLOIDUL HIPERBOLIC CA SUPRAFAȚĂ DE TRANSLAȚIE

Paraboloidul hiperbolic poate fi generat și de o parabolă care se deplasează paralel cu ea însăși, sprijinindu-se într-un anume punct al ei, de-a lungul altei parabole, ce au axele paralele și îndreptate în sensuri contrarii. Acest lucru reiese și din punerea în evidență a secțiunilor parabolice în paraboloidul hiperbolic (fig. 6.5.5).

PARABOLOIDUL HIPERBOLIC CA SISTEM DE ACOPERIRE

Paraboloidul hiperbolic are multe aplicații în construcții și arhitectură, la construirea diferitelor tipuri de *pînze subțiri* folosite ca sisteme de acoperire a spațiului. Sistemul de acoperire ce are la bază paraboloidul hiperbolic poate fi rezemat continuu (în lungul unei generatoare) sau în puncte

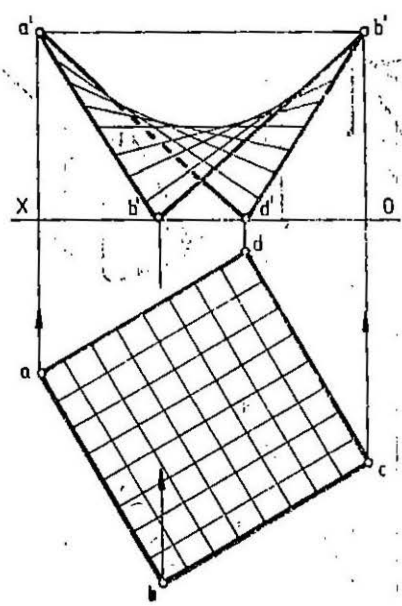


fig. 6.5.6

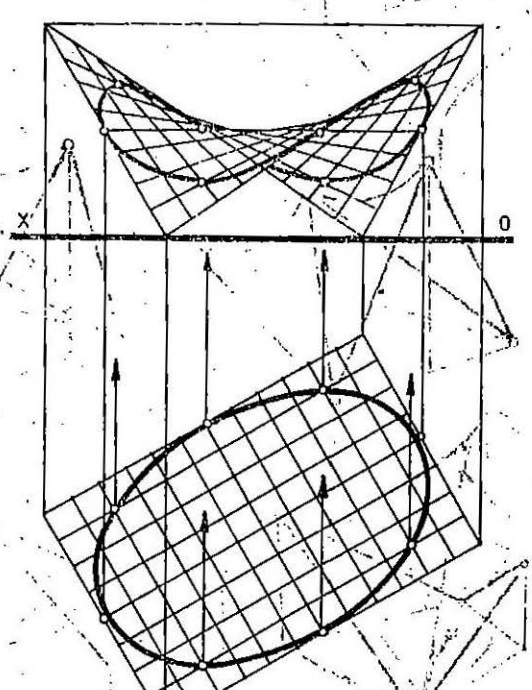


fig. 6.5.7

(la intersecţia a două generatoare) pe conturul ariei de acoperit, care poate fi poligonal, curb sau mixt.

Această arie poate fi acoperită de unul sau de o combinaţie de mai mulţi paraboloizi hiperbolici. Aceşti paraboloizi hiperbolici se pot combina prin *adiacenţă* (de-a lungul unor generatoare comune) sau prin *intersecţii* (după curbe de gradul 4, 3 sau parabole şi hiperbole).

Posibilităţile de acoperire cu paraboloizi hiperbolici a unor suprafeţe. Se au în vedere următoarele criterii:

— forma suprafeţei de acoperit;

— numărul de paraboloizi hiperbolici din care este compus acoperişul;

— modul de rezemare (pe laturi sau în puncte).

— Un plan pătrat se acoperă cu un paraboloid hiperbolic echilater. În figura 6.5.6 este reprezentată dubla proiecţie ortogonală a acestei suprafeţe.

Un paraboloid hiperbolic definit de patrulaterul strîmb **ABCD** intersectat cu un cilindru eliptic poate acoperi un *plan de formă eliptică* (fig. 6.5.7).

— Un plan triunghiular poate fi acoperit cu un singur paraboloid hiperbolic avînd două din laturile patrulaterului strîmb din spaţiu într-un plan vertical, deci proiectate după o latură a triunghiului de acoperit (fig. 6.5.8). Acelaşi plan triunghiular poate fi acoperit de doi sau mai mulţi paraboloizi hiperbolici prin adiacenţă (fig. 6.5.9).

— Un plan patrulater se acoperă cu un singur paraboloid hiperbolic considerînd acest patrulate-

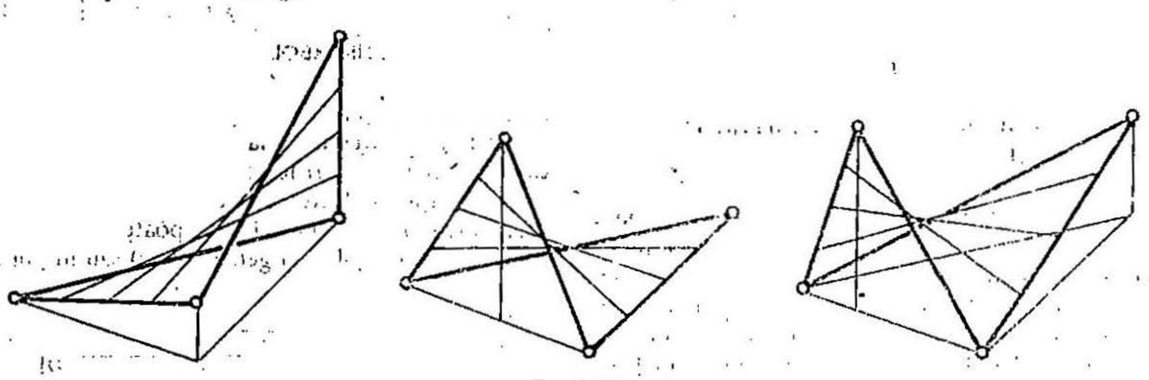


fig. 6.5.8

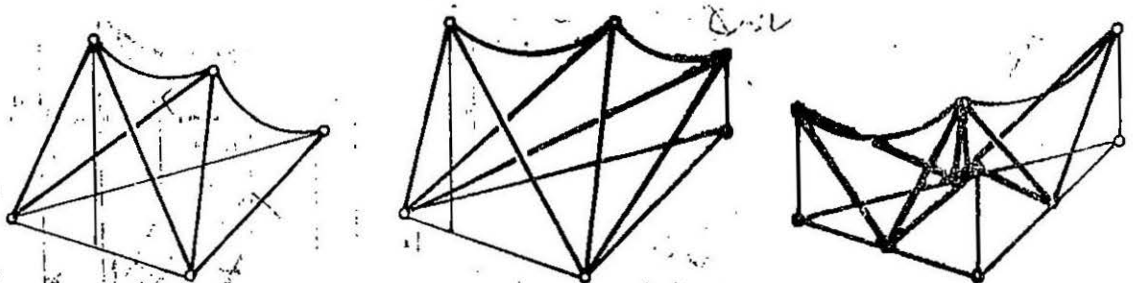


fig. 6.5.9

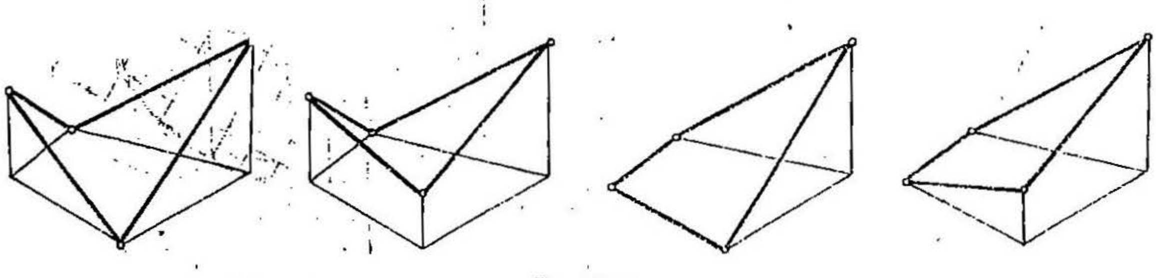


fig. 6.5.10

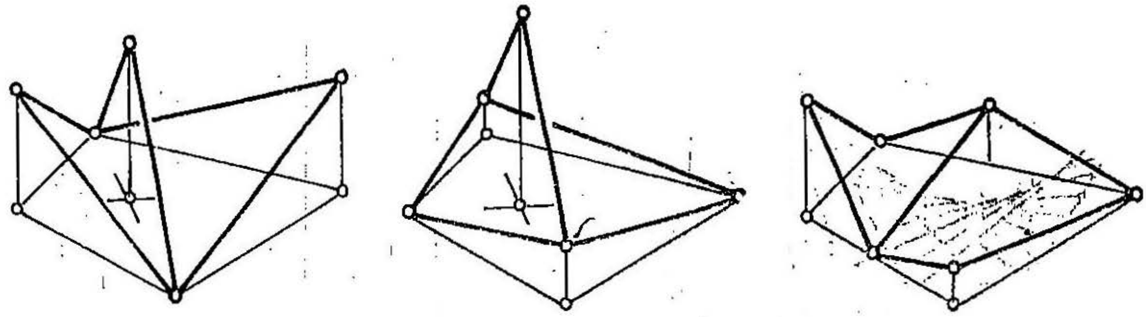


fig. 6.5.11

drept proiecția orizontală a patrulaterului strîmb din spațiu **ABCD** (fig. 6.5.10). Același patrulater poate fi acoperit cu doi sau mai mulți paraboloizi hiperbolici — prin intersecție (fig. 6.5.11) sau prin adiacență (fig. 6.5.12).

Dacă se intersectează doi paraboloizi hiperbolici definiți de două patrulatere strîmbe orientate la 90° unul față de celălalt (fig. 6.5.13), rezultă *bolți formate din paraboloizi hiperbolici intersectați*:

— bolți cu muchii intrate (fig. 6.5.14);

— bolți cu muchii ieșite (fig. 6.5.15).

— Un plan pătrat poate fi acoperit cu un paraboloid hiperbolic echilater înscris în cubul ce are ca bază pătratul dat (fig. 6.5.16). Centrul cubului Ω este vîrful paraboloidului hiperbolic. Axa verticală a cubului este axa paraboloidului hiperbolic, iar dreptele ce unesc centrele fețelor opuse sînt generatoarele principale ale paraboloidului hiperbolic. Prelungind generatoarele pînă la planul orizontal, se obține hiperbola ce trece prin punctul **b**. Dacă se unesc succesiv, dar în sens contrar, aceleași diviziuni de pe diagonalele fețelor **Ad**

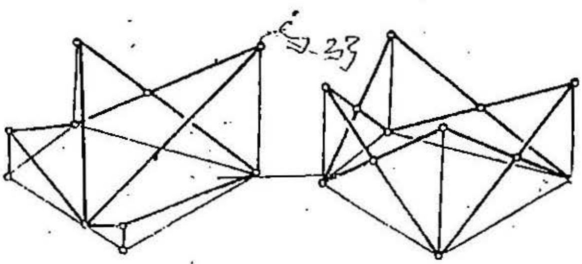


fig. 6.5.12

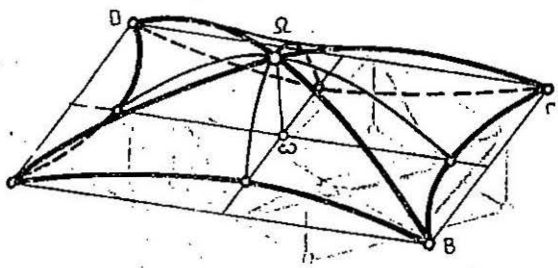


fig. 6.5.14

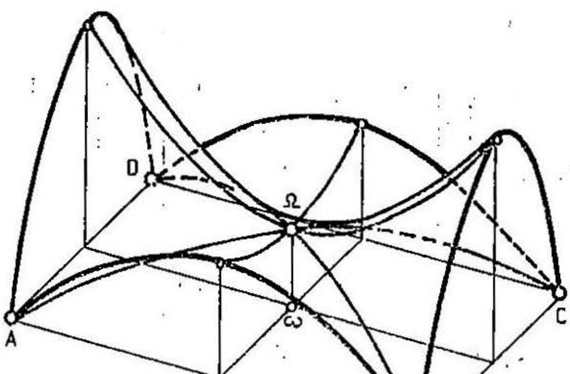


fig. 6.5.13

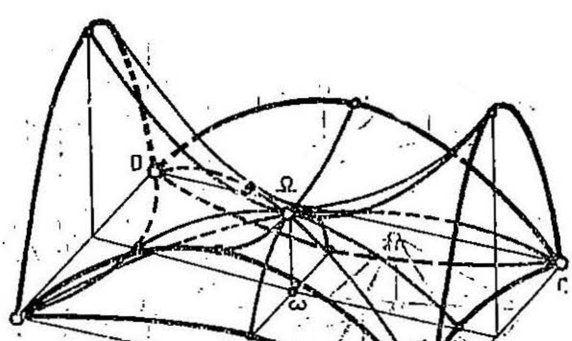


fig. 6.5.15

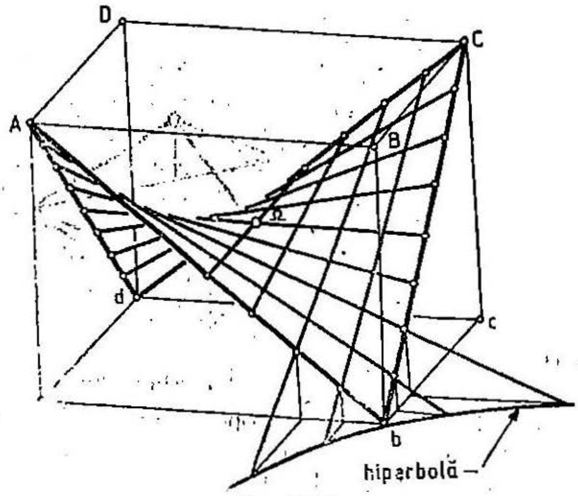


fig. 6.5.16

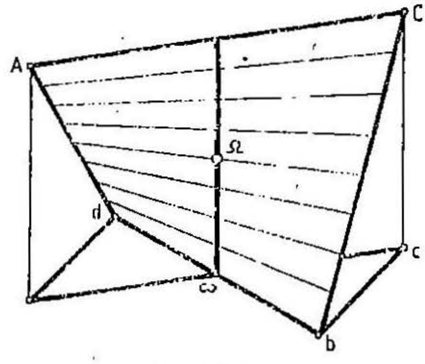
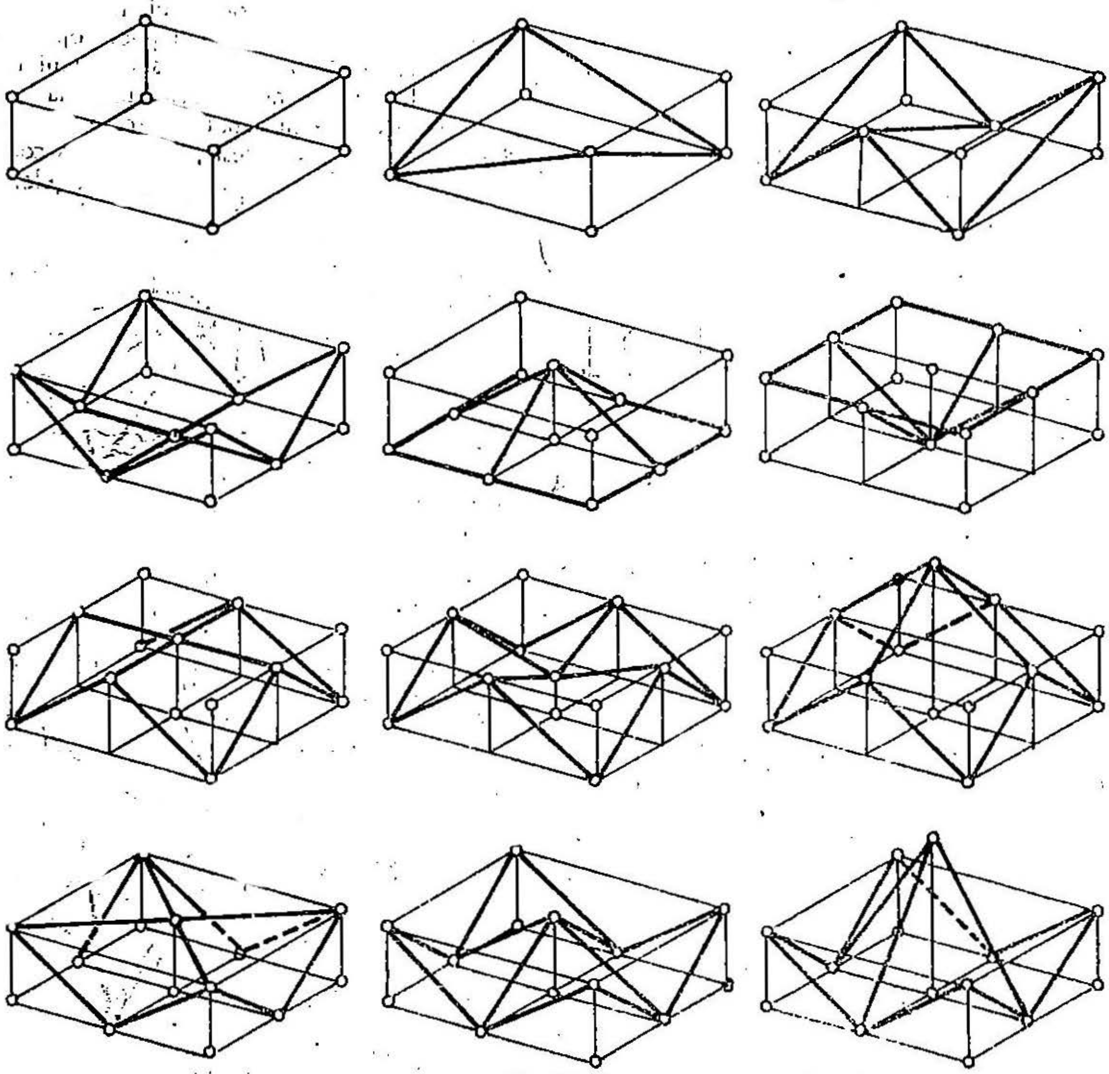


fig. 6.5.17


fig. 6.5.18

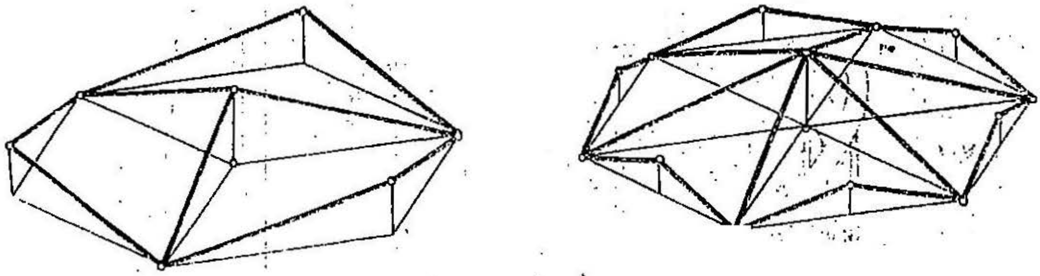


fig. 6.5.19

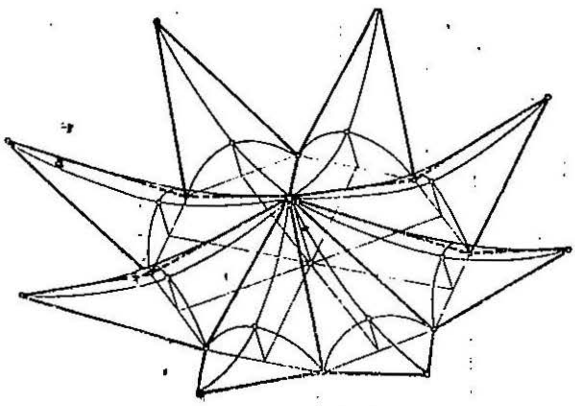


fig. 6.5.20

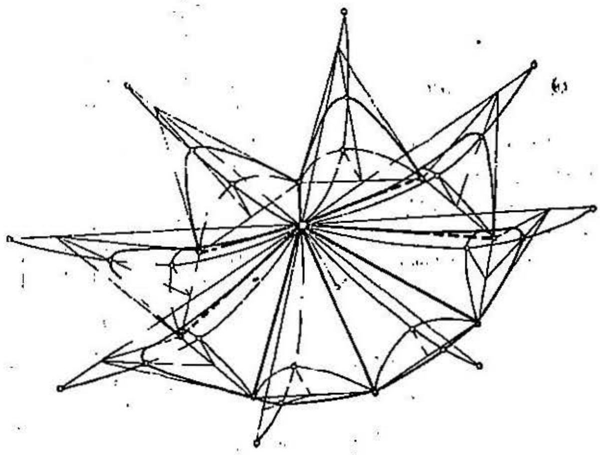


fig. 6.5.21

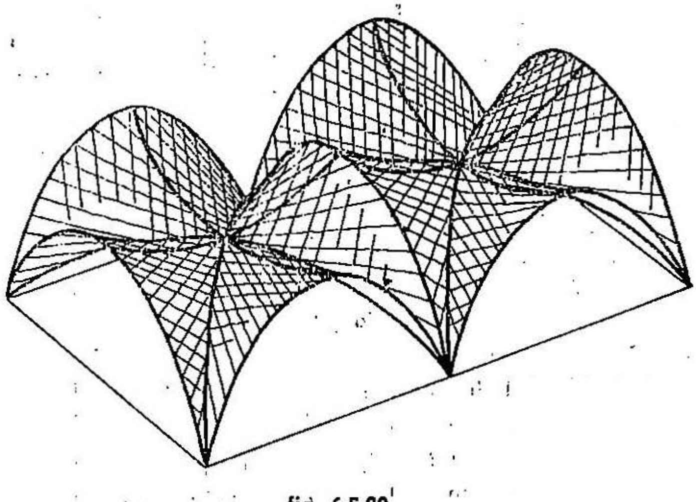


fig. 6.5.22

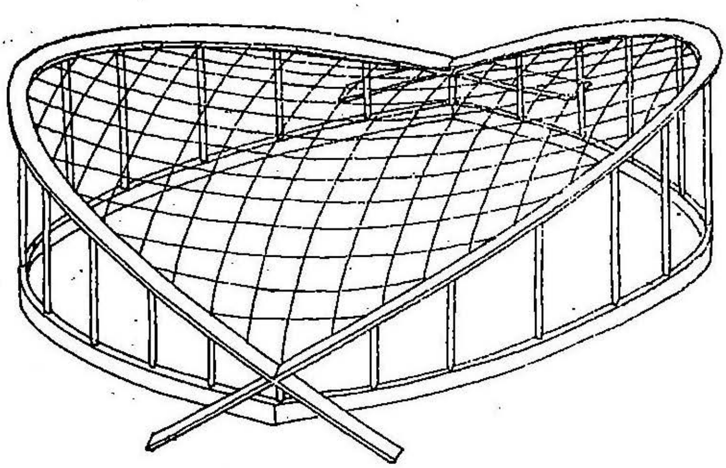


fig. 6.5.23

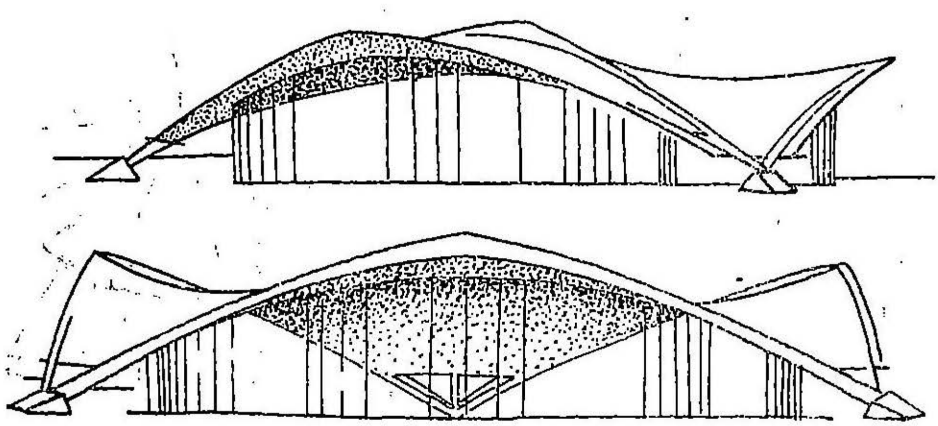


fig. 6.5.24

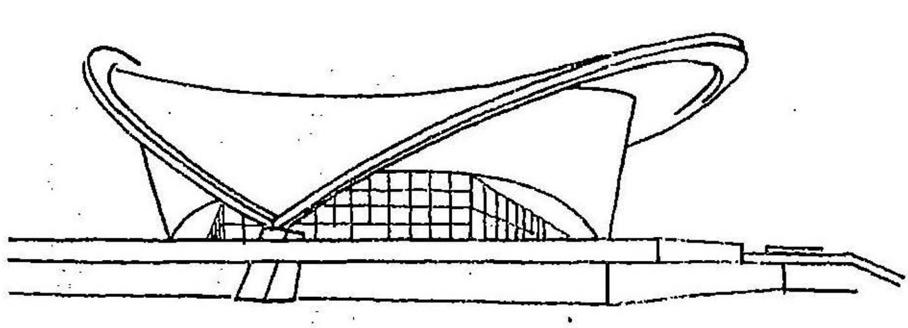


fig. 6.5.25

și bC, se obține un paraboloid hiperbolic care acoperă triunghiurile **cobc** și **coda** (fig. 6.5.17). Figura 6.5.18 ilustrează alte posibilități de acoperire cu paraboloizi hiperbolici a aceluiași plan pătrat.

— Un plan hexagonal se poate acoperi cu trei și, respectiv, șase paraboloizi hiperbolici prin adiacență (fig. 6.5.19).

— Tot prin adiacență se poate acoperi un plan octogonal cu opt paraboloizi hiperbolici (fig. 6.5.20).

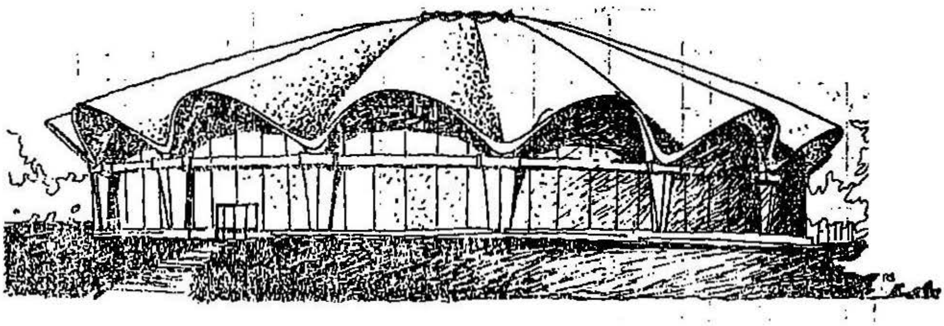


fig. 6.5.26

Din motive constructive vîrfurile paraboloizilor hiperbolici se pot secționa cu cîte un plan (fig. 6.5.21). În figura 6.5.22, este ilustrat un sistem de acoperire format din paraboloizi hiperbolici intersectați la 90°.
Exemple de aplicare a paraboloizilor hiperbolici în arhitectură sînt: Arena Raleigh din Carolina de Nord, S.U.A. (fig. 6.5.23), la care suprafața de acoperire a rezultat din intersecția unui paraboloid hiperbolic cu doi semicilindri verticali; restaurantul Long Beach, S.U.A. (fig. 6.5.24), la care un spațiu hexagonal a fost acoperit cu trei paraboloizi hiperbolici; Sala Congreselor din Berlinul de vest (fig. 6.5.25); Circul de Stat din București (fig. 6.5.26), care are o cupolă formată din 16 elemente parabolice continuate prin cadre.

6.6. SUPRAFEȚE ELICOIDALE

ELICEA CILINDRICĂ

Elicea cilindrică este curba trasată pe suprafața unui cilindru, care face un unghi constant cu generatoarele cilindrului. Distanța între două puncte consecutive este *pasul elicei*. *Unghiul elicei* este unghiul pe care îl face tangenta la elice cu planul perpendicular pe generatoarele cilindrului. Axa cilindrului este de fapt *axa elicei*. *Desfășurata elicei cilindrice* este o linie dreaptă, deoarece ea face același unghi cu toate generatoarele, care sînt paralele (fig. 6.6.1). Proiecția verticală a elicei este o sinusoidă, iar proiecția sa orizontală este cercul secțiunii perpendicular pe generatoarele cilindrului.

Elicea conică. Un tip de elice conică este curba trasată pe suprafața unui con circular drept (fig. 6.6.2), astfel încît această curbă să reprezinte distanța minimă între două puncte de pe con, care nu sînt situate pe aceeași generatoare. Dacă se desfășoară conul, desfășurata acestei elice este o linie dreaptă. La fel elicea se poate trasa și pe suprafața sferei, rezultînd *elicea sferică*.

SUPRAFEȚE ELICOIDALE. CLASIFICARE

Suprafețele elicoidale sînt de două tipuri, și anume:
— elicoizi cu cilindru-sîmbure — elicoidul cu plan director, elicoidul strîmb, elicoidul desfășurabil;
— elicoizi fără cilindru-sîmbure, elicoidul strîmb;
— elicoidul drept.

Elicoizii cu cilindru-sîmbure sînt generați de o dreaptă tangentă la un cilindru, punctele de tangență descriind o elice pe cilindru. Cînd generatoarele sînt paralele cu un plan (acest plan nu poate fi decît perpendicular pe axa cilindrului-sîmbure), rezultă un elicoid cu *plan director*. Acesta este folosit la construcția scărilor cu trepte individuale. Cînd generatoarele elicoidului fac un unghi constînd cu generatoarele cilindrului-sîmbure, rezultă *elicoidul strîmb*, iar dacă generatoarele elicoidului sînt tangente la elicea directoare, se obține *elicoidul desfășurabil*. Deci, elicoidul cu plan director și elicoidul desfășurabil sînt cazuri particulare ale elicoidului strîmb cu cilindru-sîmbure. Reducînd cilindrul-sîmbure la axa lui, se obține o altă familie de elicoizi — *elicoizii fără cilindri-sîmbure* (elicoizii cu axă-directoare). Aceștia sînt generați de o dreaptă

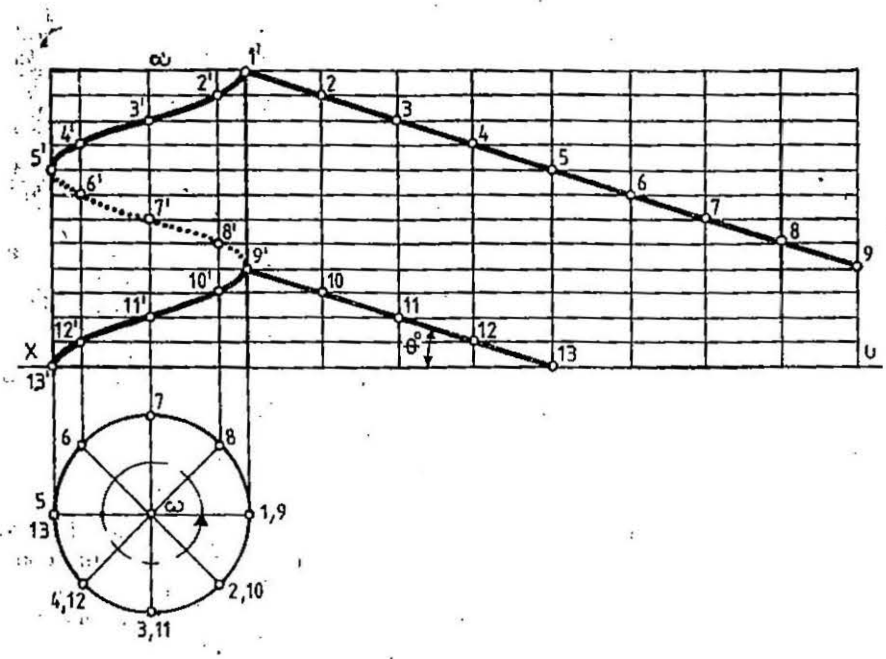


fig. 6.6.1

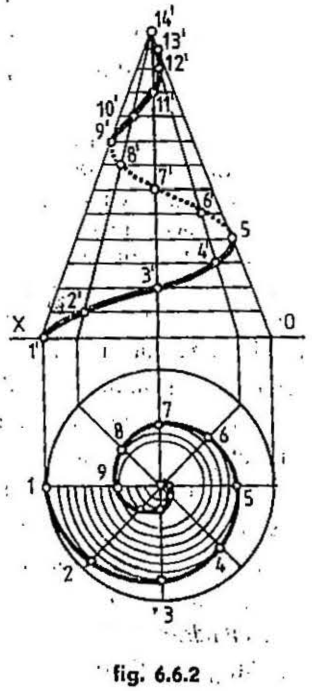


fig. 6.6.2

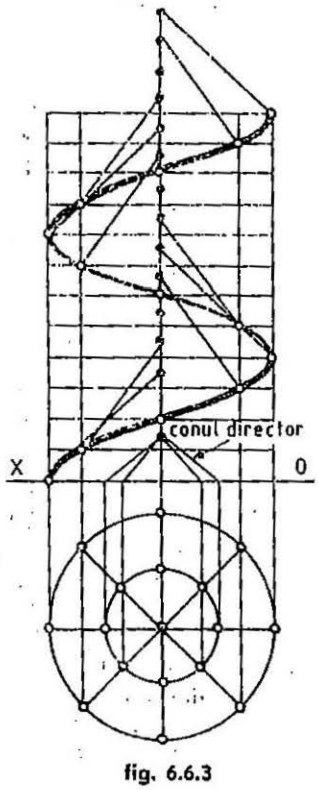


fig. 6.6.3

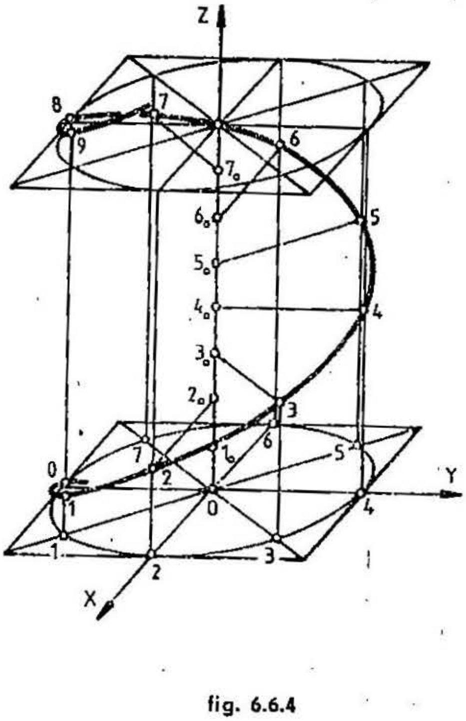


fig. 6.6.4

care se sprijină pe o elice și care face același unghi cu axa directoare. Se mai numesc și *elicoizi strîmbi*. Cînd unghiul generatoarei cu axa directoare este de 90°, rezultă cazul particular al elicoizilor fără cilindru-sîmbure cu un plan director. Aceștia se numesc *elicoizi drepți*. Ducînd într-un punct pe ax paralele la generatoarele elicoidului strîmb, se obține conul lui director (fig. 6.6.3). Acest con director avînd două pînze, rezultă că elicoidul strîmb are și el două pînze. Intersectînd cele două pînze ale elicoidului strîmb, se obține *șurubul triunghiular*. În cazul elicoidului drept, conul director se reduce la planul director. Elicoidul drept are aplicații în tehnică (șurubul pătrat) și în arhitectură (scările elicoidale).

ELICOIDUL DREPT CU PLAN DIRECTOR

Elicoidul drept cu plan director este generat de o dreaptă care se deplasează sprijinindu-se pe o elice cilindrică și pe axa cilindrului, rămînînd perpendiculară pe această axă (fig. 6.6.4). Planul director este deci planul bazei cilindrului de rotație.

Elicoidul drept cu plan director este deci un conoid cu plan director. Dacă se înlocuiește dreapta directoare (axa cilindrului) cu un cilindru director, la care generatoarele elicoidului sînt tangente și descriu pe el o elipsă, rezultă *elicoidul cu cilindru-sîmbure cu plan director.*

SCĂRI ELICOIDALE

Scările elicoidale sînt aplicații în construcții și arhitectură ale suprafețelor elicoidale cu plan director perpendicular pe axa elicei directoare. Panta scării este dată de unghiul elicei directoare pe linia pasului. Muchiile treptelor sînt secțiuni în suprafața elicoidală duse după plane perpendiculare pe axă. Această suprafață elicoidală cu plan director orizontal este secționată cu un cilindru care are aceeași axă ca și elicea directoare. Cercul de bază al acestui cilindru poate constitui proiecția orizontală a scării elicoidale.

Scări elicoidale cilindrice cu o axă directoare sînt scările pe care planele contratreptelor se intersectează pe axa cilindrică. Pentru a mări lungimea treptei în apropierea axei, se secționează scara cu un cilindru concentric care îndepărtează linia pasului de axa scării. Acest cilindru poate fi materializat sau nu, rezultînd:

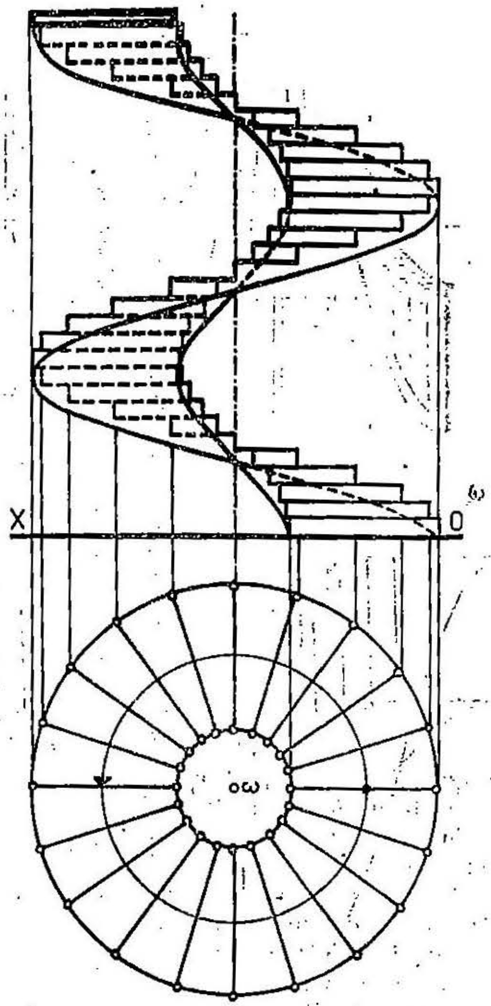


fig. 6.6.5

— scară elicoidală cu rampă liberă (fig. 6.6.5);
— scară elicoidală cu rampă încastrată într-un cilindru central (fig. 6.6.6).

Scara elicoidală se construiește astfel: se împarte proiecția orizontală a scării într-un număr de trepte, astfel ca să se respecte formula de construcție a scării pe linia pasului (la 60 cm de cercul exterior). Se obține numărul de trepte la o rotație completă a scării. Se verifică totodată dacă este respectată înălțimea liberă admisă (h = 2 m) la o rotație completă a scării. Apoi se împarte diferența de nivel la înălțimea unei contratrepte și se află numărul de trepte necesare, deci și numărul de rotații. Odată stabilit numărul de trepte în plan, se proiectează fiecare treaptă din plan în vedere, luîndu-se în considerație și grosimile constructive necesare.

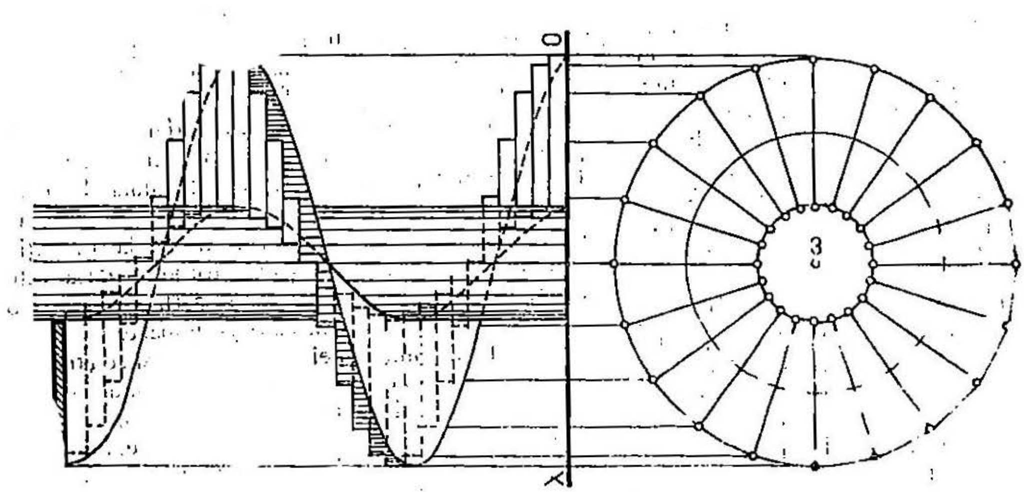


fig. 6.6.6

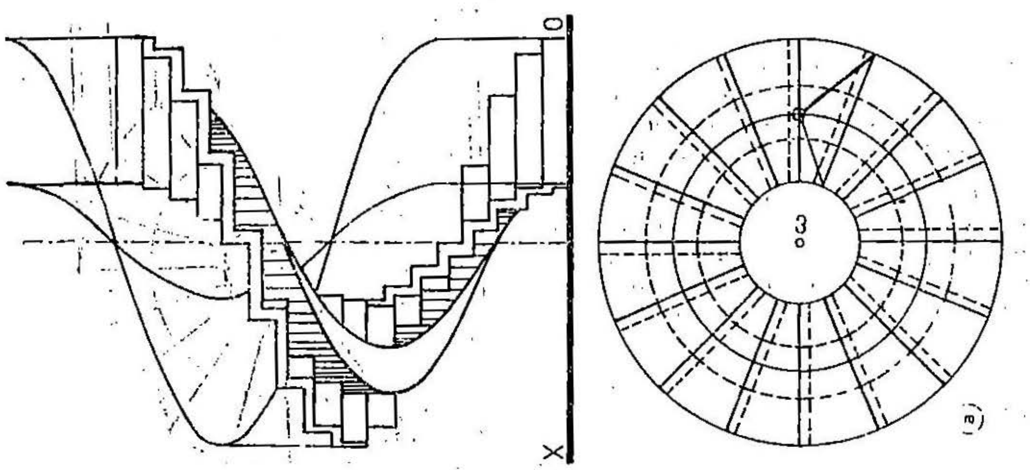


fig. 6.6.7, a

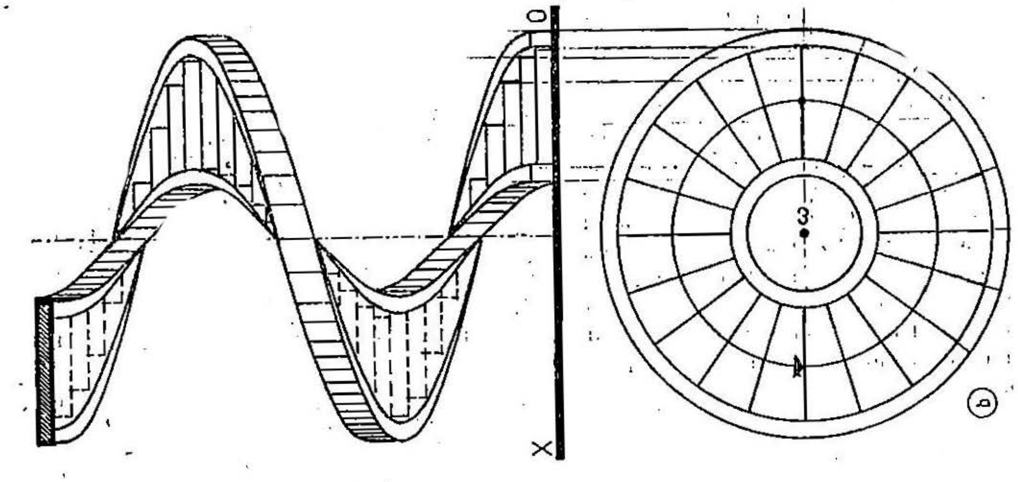


fig. 6.6.7, b

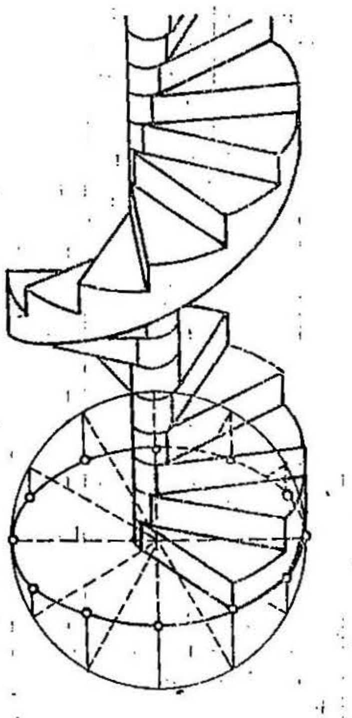


fig. 6.6.8

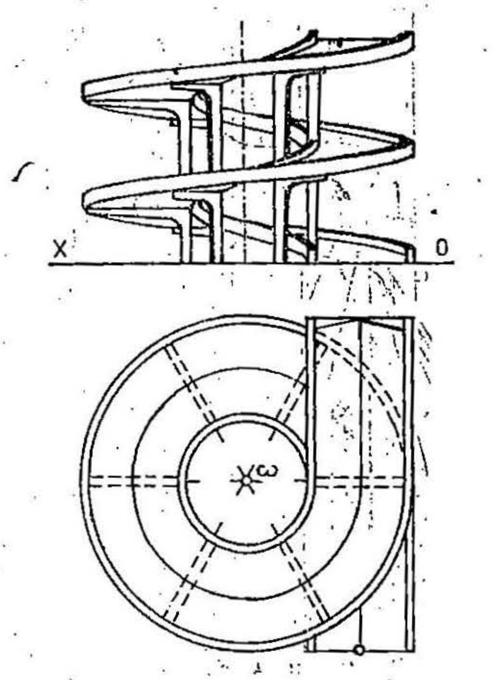


fig. 6.6.9

Figura 6.6.7,a reprezintă o scară elicoidală cu vang central şi intradosul rampei cutat după forma treptelor, iar figura 6.6.7,b ilustrează o scară elicoidală cu vanguri laterale.

Scară elicoidală cu cilindru sîmbure-director. Suprafaţa elicoidală cu cilindru-sîmbure este folosită la scările alcătuite din trepte prefabricate, care includ şi porţiunea de cilindru aferentă fiecărei trepte. Prin suprapunerea treptelor prefabricate rezultă o scară elicoidală cu trepte încastrate în acest cilindru-sîmbure (fig. 6.6.8).

Rampele elicoidale sînt folosite la garaje etajate sau la urcarea unor diferenţe de nivel ce nu permit dezvoltarea în plan a unor rampe liniare (fig. 6.6.9).

6.7. CONOIZI ŞI CILINDROIZI

CONOIDUL

Conoidul general este suprafaţa riglată cu o curbă directoare şi două drepte directoare, ambele la distanţă finită (fig. 6.7.1). Dacă una din dreptele directoare este aruncată la infinit se obţine *conoidul cu plan director*; acesta poate fi drept sau oblic. *Conoidul drept* cu plan director are directoarea dreaptă perpendiculară pe planul director. În caz contrar, suprafaţa este un *conoid oblic*.

Să studiem cazul particular al unui conoid drept cu plan director care are drept curbă directoare un cerc, ca dreaptă directoare o dreaptă paralelă cu planul cercului iar ca plan director un plan perpeundicular pe dreapta directoare (fig. 6.7.2). În figura 6.7.3 este reprezentată dubla proiecţie ortogonală a unui conoid drept. Cele două pînze ale conoidului se intersectează după directoarea dreaptă care se numeşte linie de stricţiune a suprafeţei.

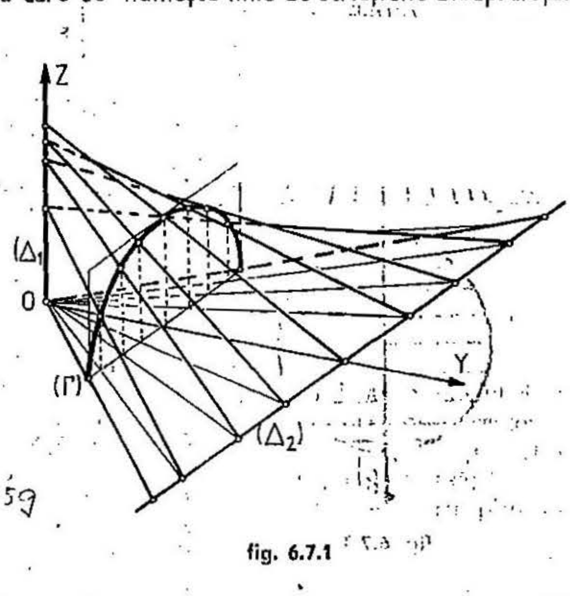


fig. 6.7.1

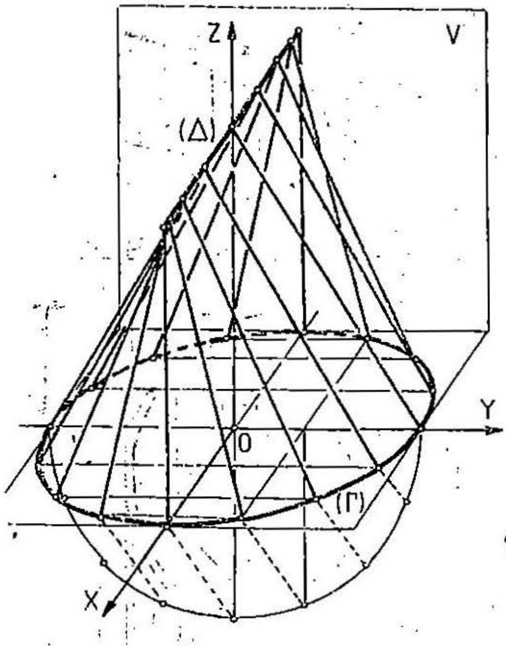


fig. 6.7.2

Această dreaptă dă cea mai scurtă distanţă dintre două generatoare ale suprafeţei.

Secţiuni plane în conoizi. Majoritatea secţiunilor plane făcute într-un conoid sînt curbe de gradul 4, această suprafaţă fiind ea însăşi de gradul 4, dar orice plan paralel cu cercul director secţionează conoidul după o elipsă, iar orice plan paralel cu planul director secţionează conoidul după două drepte (generatoarele conoidului).

Conoidul lui Plücker este un conoid drept generat astfel (fig. 6.7.4 şi 6.7.5):

— planul director este planul orizontal de proiecţie;

— directoarea dreaptă este verticală şi este una din generatoarele unui cilindru circular vertical;

— directoarea curbă este elipsa sa de secţiune, făcută în acest cilindru cu un plan de capăt dus prin piciorul dreptei directoare.

Conoidul lui Küper este conoidul oblic care poate fi generat astfel (fig. 6.7.6):

— directoarea curbă este un cerc în planul orizontal, tangent la planul vertical de proiecţie în h;

— directoarea dreaptă este verticala (D) aflată în planul vertical de proiecţie, ridicată în punctul de tangenţă h;

— planul director este un plan care face acelaşi unghi şi cu planul orizontal şi cu planul vertical de proiecţie (unghi de 45°).

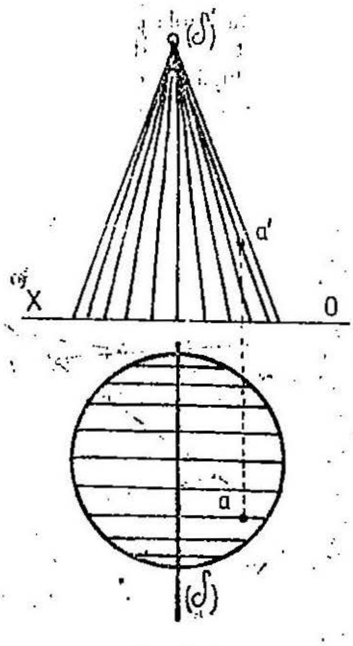


fig. 6.7.3

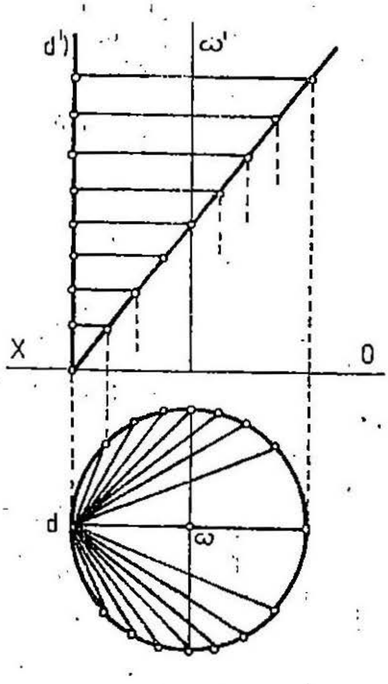


fig. 6.7.4

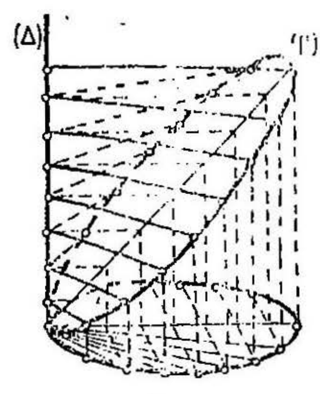


fig. 6.7.5

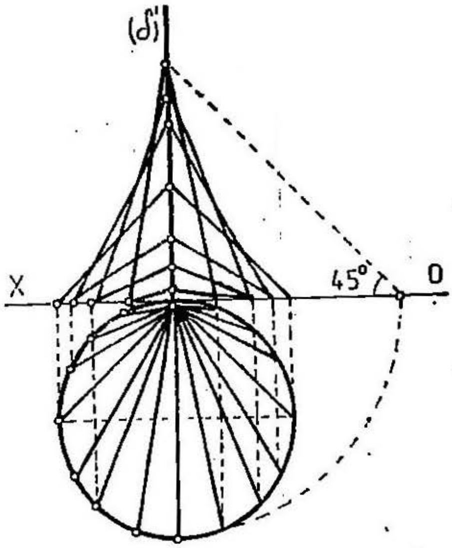


fig. 6.7.6

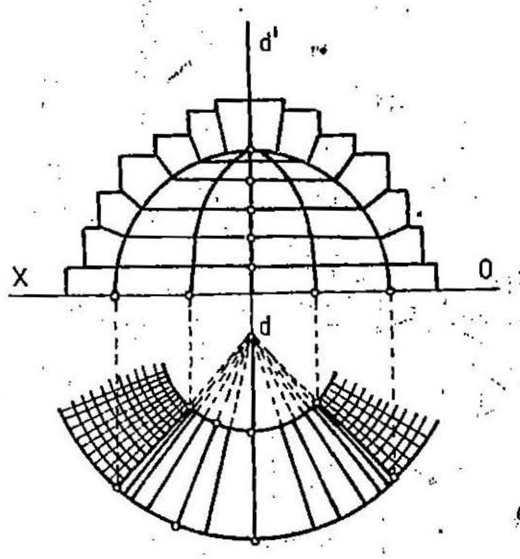


fig. 6.7.8

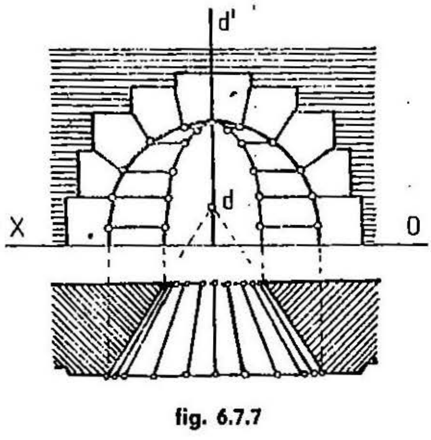


fig. 6.7.7

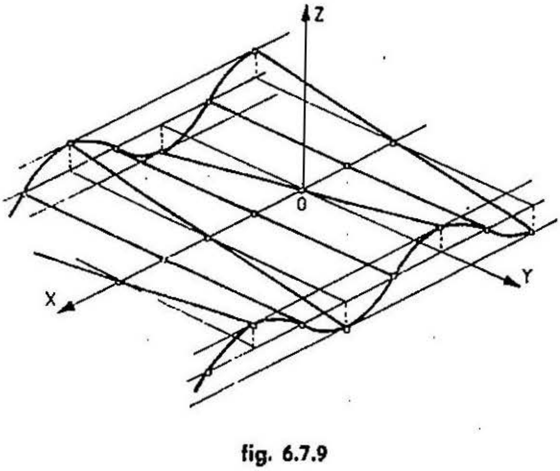


fig. 6.7.9

— Aplicațiile în construcții și arhitectură ale conoidului sînt: bolta conoidală, pînza subțire de acoperire și ședurile.

1) *Bolta conoidală într-un zid drept* are directoarea dreaptă verticală, directoarea curbă în formă de semicerc frontal, iar planul director este planul orizontal de proiecție; asizele cărămizilor sînt orizontale și urmăresc direcția generatoarelor conoidului (fig. 6.7.7). În cazul *bolții conoidale într-un zid curb*, generatoarele orizontale se sprijină pe două curbe de secțiune cu dublă curbură, rezultate din intersecția conoidului drept cu cei doi cilindri verticali dați de fețele zidăriei (fig. 6.7.8).

2) *Pînza subțire de acoperire* este un conoid cu o sinusoidă directoare (fig. 6.7.9). În proiecție verticală, punctul de minim al unei sinusoide corespunde cu punctul de maxim al celeilalte sinusoide.

3) *Ședurile.* La construcția ședurilor se folosesc conoizi dispuși în succesiune care permit iluminarea prin plafon (de exemplu a halelor industriale — fig. 6.7.10, 6.7.11).

CILINDROIDUL

Cilindroidul este suprafața riglată de gradul 4 cu două curbe directoare și o dreaptă directoare. Dreapta directoare poate fi (fig. 6.7.12 și 6.7.13):
— la distanță finită — cilindroidul cu axă;
— la distanță infinită — cilindroidul cu plan director.

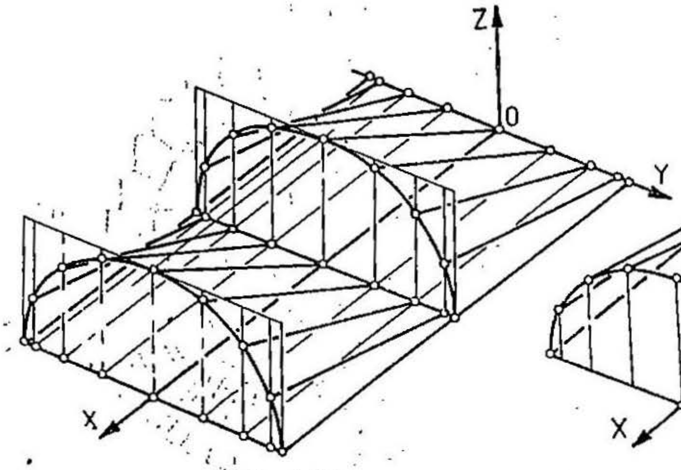


fig. 6.7.10

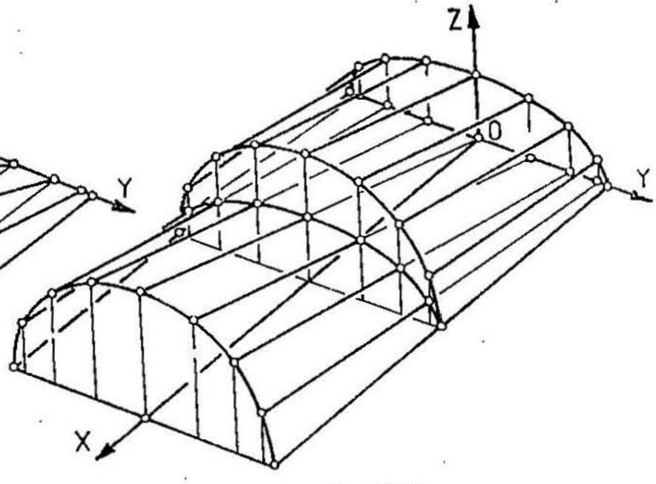


fig. 6.7.11

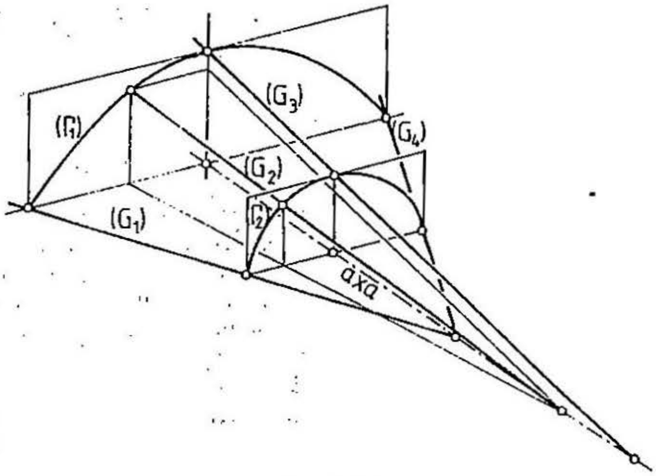


fig. 6.7.12

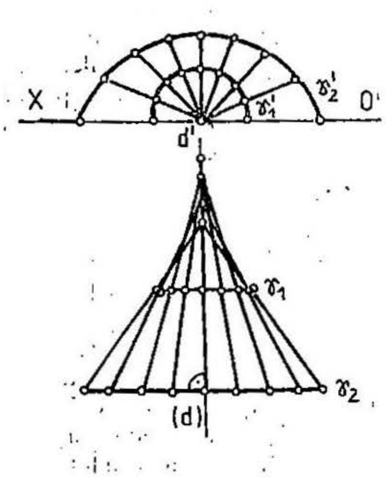


fig. 6.7.13

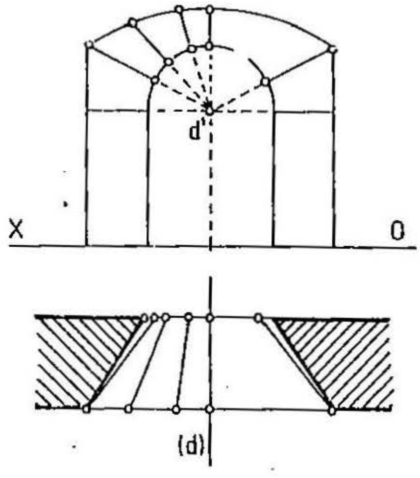


fig. 6.7.14

7.

REZOLVAREA PROBLEMELOR DE GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ ȘI AXONOMETRIE

Problemele de compunere, secționare și intersecție de volume în spațiu se pot înțelege uneori mai direct și mai repede prin studiul pe machete, însă o rezolvare riguroasă necesită reprezentarea lor în proiecții ortogonale și în axonometrie. Prin *rezolvare riguroasă* se înțelege determinarea foarte precisă a punctelor de tangență, unghiurilor, dreptelor sau curbelor de secțiune etc. Toate aceste elemente se obțin prin *trecerea datelor din spațiu în plan*, respectiv din tridimensional în bidimensional. De exemplu, problemele de tangență dintre sfere și plane oarecare se reduc la probleme de tangență între cercuri și drepte. În această situație, problemele se rezolvă prin metodele geometriei plane și prin construcții geometrice cu rigla și compasul, caracteristice geometriei descriptive.

7.1. TRECEREA DATELOR DIN TRIDIMENSIONAL ÎN BIDIMENSIONAL

Înainte de a explora esența construcțiilor geometrice, trebuie precizat că trecerea datelor din spațiu în plan reprezintă o simplificare substanțială și, în mod inevitabil, implică o *pierdere de informație* asupra obiectului studiat. De altfel, reprezentarea volumelor din spațiu într-o singură proiecție plană este nedeterminată și sînt necesare cel puțin două proiecții, pentru a determina riguros volumele din spațiu.

Din această cauză, *reprezentările axonometrice* au un grad mai scăzut de determinare. Pentru determinarea riguroasă a unor volume reprezentate în axonometrie (respectiv toate relațiile de poziție și metrice), sînt necesare două condiții:

— definirea clară a tipului de axonometrie utilizat;

— existența unei a doua proiecții (pe planul orizontal de proiecție, pe planul vertical de proiecție sau pe orice alt plan) pentru fiecare element (punct sau dreaptă) al volumului reprezentat.

Cea de a doua condiție este satisfăcută nu prin existența unei a doua proiecții, ci prin precizări care permit, dacă se dovedește necesară, construcția unei a doua proiecții. Exemple de asemenea precizări sînt: „baza piramidei se află într-un plan de nivel" sau „axele celor două piramide coincid" sau chiar indicații metrice, de exemplu: „diferența de cotă dintre bazele celor două piramide este de 2 cm" ș.a.m.d. Volumele reprezentate axonometric în figura 7.1.1 pot fi interpretate oricum dacă nu se precizează că este vorba de o axonometrie izometrică. Într-adevăr, într-o axonometrie ortogonală oarecare, bazele piramidelor pot fi paralelograme de orice fel (singura condiție care se păstrează este paralelismul laturilor), iar dacă se acceptă și posibilitatea unei axonometrii oblice, gradul de nedeterminare este mult mai mare.

Practic, piramidele pot avea orice formă și înclinare, cu singura condiție ca laturile bazelor să fie paralele. Dacă se precizează că este o axonometrie izometrică și că bazele celor două piramide se află situate în plane de nivel, se poate verifica faptul că bazele sînt pătrate și orientate la 45° una față de cealaltă. Pozițiile vîrfurilor celor două piramide sînt însă în continuare nedeterminate. Dacă se afirmă că piramidele sînt drepte, ele sînt perfect determinate ca volume individuale, dar nu și în relația dintre ele. Într-adevăr, ele pot fi complet desprinse una de cealaltă, ca în figurile 7.1.2 și 7.1.3, sau pot să aibă o infinitate de poziții de intersecție, exemplificate prin cele trei situații din figurile 7.1.4...7.1.6. Poziția din figura 7.1.5 poate

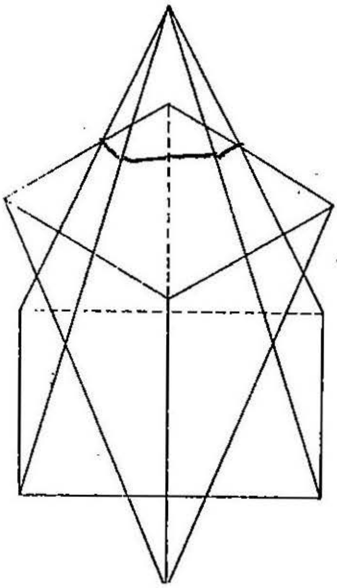


fig. 7.1.1

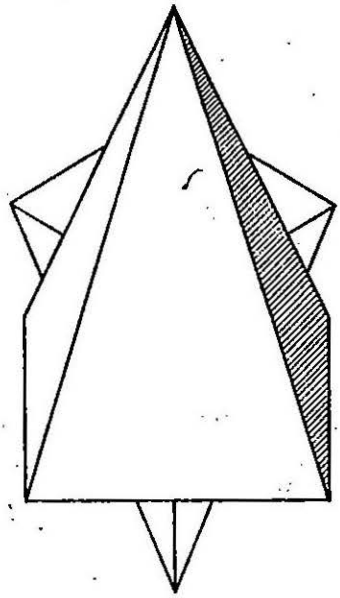


fig. 7.1.2

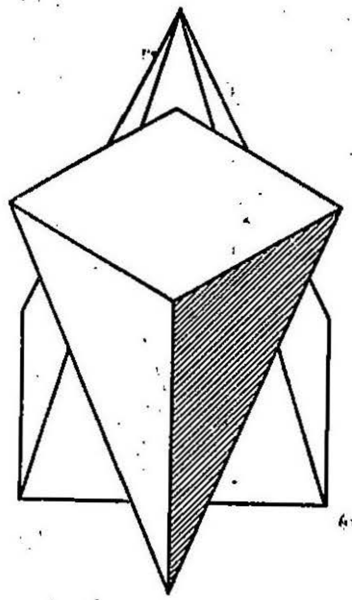


fig. 7.1.3

i precizată printr-o indicaţie suplimentară, aceea ă axele celor două piramide drepte coincid.

)upă cum se vede, *pierderea de informaţie* complică nult problemele de axonometrie şi determinarea iguroasă a volumelor reprezentate nu se poate ace fără *informaţie suplimentară*. Informaţia suplinentară se referă fie la *relaţii de poziţie*, fie la *relaţii metrice*, fie la ambele. În exemplele descrise s-au dat precizări suplimentare de natură poziţională. În mod asemănător se determină riguros poziţia piramidelor din figura 7.1.7 prin indicarea punctului în care axa uneia din cele două piramide drepte pătrate înţeapă baza celeilalte piramide. Fiecare din cele trei variante (punctele A, B şi C) va avea o altă soluţie.

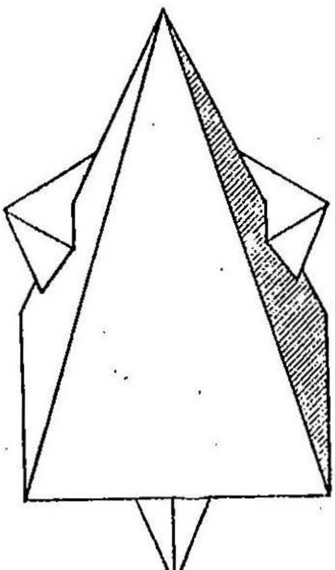


fig. 7.1.4

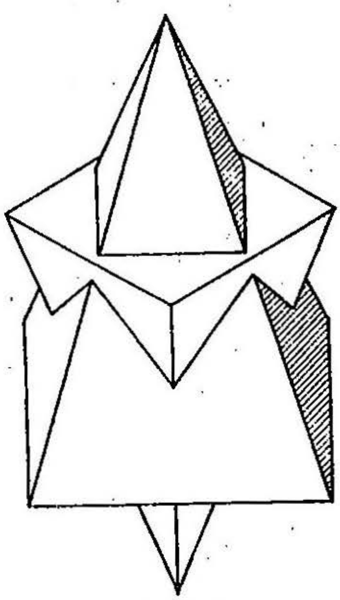


fig. 7.1.5

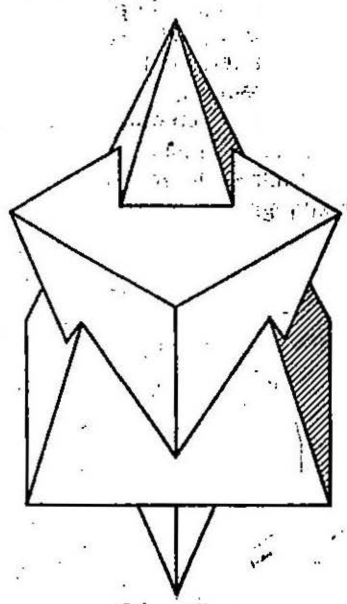


fig. 7.1.6

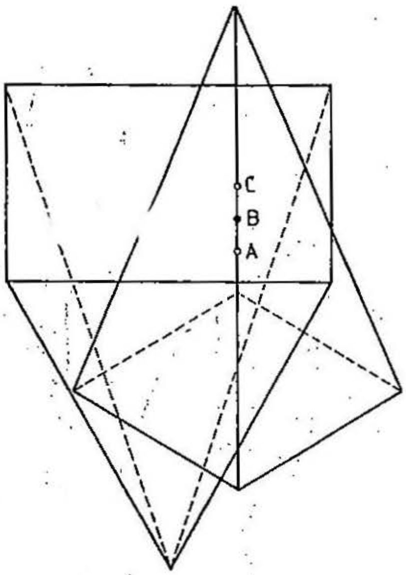


fig. 7.1.7

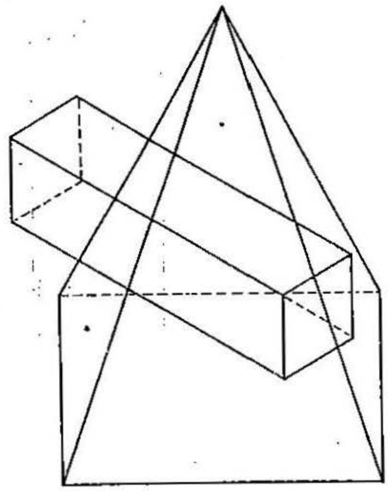


fig. 7.1.8

În figura 7.1.8, în schimb, informația suplimentară conține și *relații metrice*. Astfel, se precizează diferența de cotă dintre baza piramidei și fața inferioară a prismei (ambele situate în plane de nivel). În funcție de valoarea diferenței de cotă se obțin diverse poziții ale celor două volume și diverse soluții ale intersecției lor.
În *geometria descriptivă Monge*, prin prezența a două proiecții ortogonale, volumele sînt riguros determinate, dar există încă pierdere de informație, în particular în planele de profil. În capitolul 1, s-a arătat că, pentru rezolvarea unor intersecții în planele de profil, se face apel la construcții suplimentare sau, pur și simplu, la un nou plan de proiecție, planul lateral [W]. De altfel, volumele arhitecturale complexe sînt reprezentate printr-o multitudine de proiecții: planuri, fațade, secțiuni, detalii etc.

Aplicație. Pentru a ilustra pierderea de informație în dublu ortogonal, se consideră un caz extrem de simplu și direct: să presupunem că se cere *să se găsească proiecția orizontală a celor două sfere reprezentate în proiecție verticală* în figura 7.1.9, despre care se știe că sînt tangente. Se pot determina imediat proiecțiile verticale ale centrelor celor două sfere. Se cunosc, de asemenea, valorile celor două raze. Proiecțiile orizontale ale centrelor se află pe liniile de ordine respective. Dar unde? Se observă sărăcia de informație pe care o oferă două proiecții plane ale volumelor tridimensionale. O *sferă* apare pur și simplu ca două cercuri care nu sînt altceva decît *contururile aparente* ale sferei în cele două proiecții. Oricare alt punct al sferei trebuie determinat (cu mai multă sau mai puțin trudă). Se observă că în figura 7.1.9 nu se poat determina imediat nici proiecția punctului de tan-

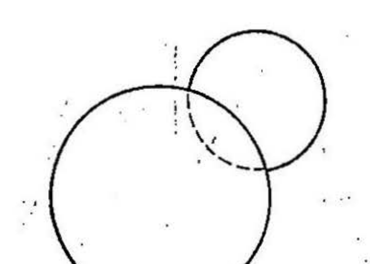


fig. 7.1.9

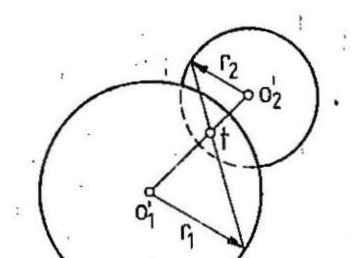


fig. 7.1.10

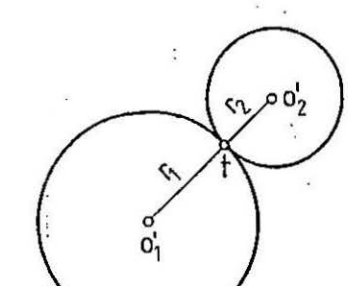


fig. 7.1.11

gență a celor două sfere. Dacă cele două sfere sînt tangente, punctul lor de tangență se va afla pe segmentul de dreaptă care unește cele două centre (fig. 7.1.10). Segmentul $\overline{O_1O_2}$, fiind înclinat față de planul vertical de proiecție, apare mai mic decît în realitate. Punctul de tangență T se poate determina, întrucît împarte segmentul $\overline{O_1O_2}$ în raportul $R_1:R_2$ (deoarece în orice proiecție paralelă se păstrează raportul simplu). Construcția din figura 7.1.10 este numai una din construcțiile posibile. Urmărind variația poziției punctului de tangență într-o unică proiecție, se observă că el se află *întotdeauna* între O_1 și O_2, cazurile limită fiind cele din figurile 7.1.11 și 7.1.12. Cazurile limită reprezintă pozițiile limită ale segmentului $\overline{O_1O_2}$, respectiv poziția frontală (paralel cu planul vertical de proiecție) și poziția de capăt (perpendicular pe planul vertical de proiecție). În poziția frontală, segmentul $\overline{O_1O_2}$ se vede *în adevărată mărime*, respectiv $\overline{O_1O_2} = R_1 + R_2$. Este o poziție particulară foarte importantă, care permite *rezolvarea în plan a problemelor spațiale* de tangență de sfere și se poate generaliza astfel: *două sfere tangente apar într-o proiecție paralelă ca două cercuri tangente, dacă segmentul de dreaptă ce unește centrele sferelor este paralel cu planul de proiecție.*

Această proprietate permite să se rezolve și problema din figura 7.1.9. Se efectuează o schimbare de plan orizontal de proiecție, astfel încît segmentul $\overline{O_1O_2}$ să apară orizontal (fig. 7.1.13). În noua proiecție orizontală, cele două sfere apar ca două cercuri tangente. Construcția permite să se determine diferența depărtărilor celor două centre (Δ) și să se obțină soluția problemei în planul orizontal inițial.

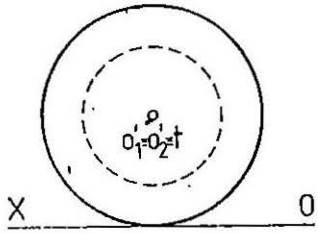


fig. 7.1.12

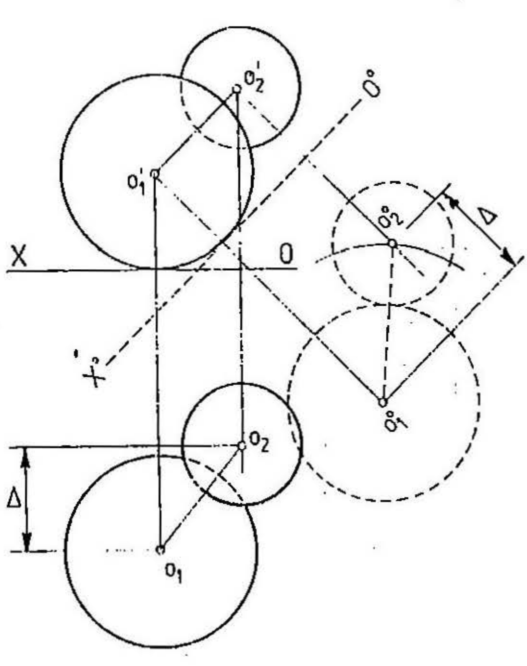


fig. 7.1.13

7.2. REZOLVAREA PROBLEMELOR ÎN AXONOMETRIE

În axonometria izometrică din figura 7.2.1, se cere *să se intersecteze piramida dreaptă pătrată cu dreapta oarecare* (Δ). Rezolvarea problemei se poate transfera din tridimensional în bidimensional prin introducerea unui plan auxiliar. Deoarece dreapta (Δ)

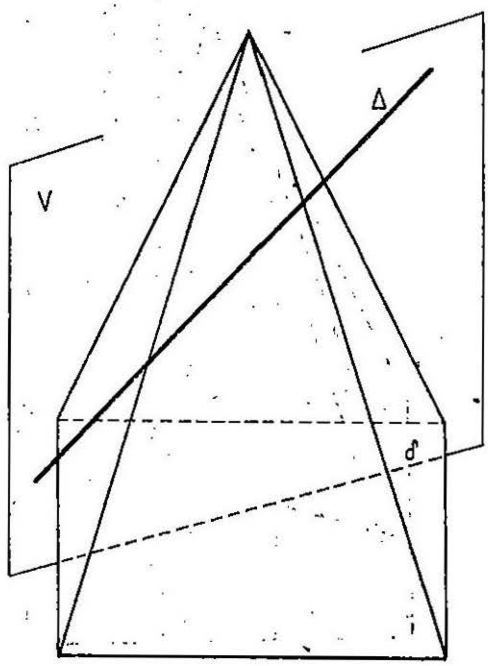


fig. 7.2.1

este riguros determinată prin proiecţia ei orizontală (δ), se va folosi ca plan auxiliar chiar planul proiectant al dreptei, respectiv planul [V]. Secţiunea prin piramidă după planul [V] va fi un poligon care, intersectat cu dreapta (Δ), va determina punctele de intersecţie căutate (dintre dreaptă şi piramidă). Pentru a găsi poligonul de secţiune a piramidei după planul [V], se construieşte secţiunea verticală prin piramidă paralelă cu planul [V] şi care conţine înălţimea piramidei. Această secţiune este un triunghi isoscel ale cărui laturi sînt paralele cu laturile poligonului de secţiune prin planul [V]. La intersecţia dreptei (Δ) cu poligonul de secţiune se obţin punctele 1 şi 2 căutate (fig. 7.2.2).

Deşi introducerea unui plan auxiliar complică aparent rezolvarea problemei, se observă că ea permite reducerea problemei spaţiale la o problemă plană. În mod similar, intersecţia unei drepte cu o sferă se reduce la intersecţia unei drepte cu un cerc, dacă se duce prin dreaptă un plan auxiliar care taie sfera după un cerc. Metoda rămîne valabilă pentru intersecţia unei drepte cu orice corp sau suprafaţă (suprafeţe cilindrice şi conice, suprafeţe riglate etc.). Acesta este motivul pentru care în geometria descriptivă se studiază mai întîi secţiunile plane şi apoi intersecţiile cu drepte (v. anexa 4).

Intersecţiile de poliedre, la rîndul lor, se transformă în intersecţii de figuri în plan. De exemplu, intersecţia dintre prisma şi piramida din figura 7.2.3 se poate obţine secţionînd ambele corpuri după planele de nivel $[H_1]$ şi $[H_2]$. La nivelul $[H_1]$ secţiunea prin piramidă este un pătrat, iar secţiunea prin prismă se confundă cu faţa ei superioară. Pătratul şi dreptunghiul se intersectează în punctele **1** şi **2**. La nivelul $[H_2]$, pătratul şi dreptunghiul se intersectează în punctele **3**, **4**, **5** şi **6**. Toate aceste puncte sînt puncte comune piramidei şi prismei, deci puncte ale intersecţiei. Punctele **7** şi **8** ale intersecţiei se pot obţine, fie ducînd paralele din **5** la **31** şi din **6** la **42**, fie secţionînd ansamblul după un plan vertical $[V_1]$, care conţine faţa laterală a prismei (fig. 7.2.4).

Cazul ales reprezintă un caz particular, întrucît feţele prismei sînt aşezate în poziţii particulare. Dacă intersecţiile de poliedre sînt mai complicate, se poate recurge la plane auxiliare duse prin unele muchii ale poliedrelor sau, în cazul cel mai general, toate punctele intersecţiei se obţin cu ajutorul unor plane auxiliare conform metodei prezentate în subcapitolul 5.1. Astfel, pentru intersecţia a două piramide se duc plane auxiliare care conţin pe rînd muchiile poliedrelor şi dreapta care uneşte vîrfurile piramidelor. Un astfel de plan conţine o muchie a unuia din poliedre şi îl secţionează pe cel de-al doilea după două generatoare. Intersecţia dintre muchie şi generatoare determină punctele de intrare şi ieşire a muchiei primului poliedru în cel de-al doilea poliedru (v. fig. 5.1.10). Şi în acest caz, problema din spaţiu se reduce la o problemă plană

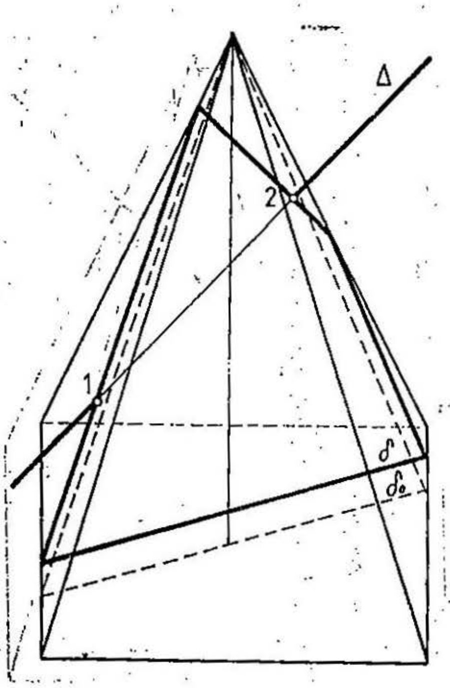


fig. 7.2.2

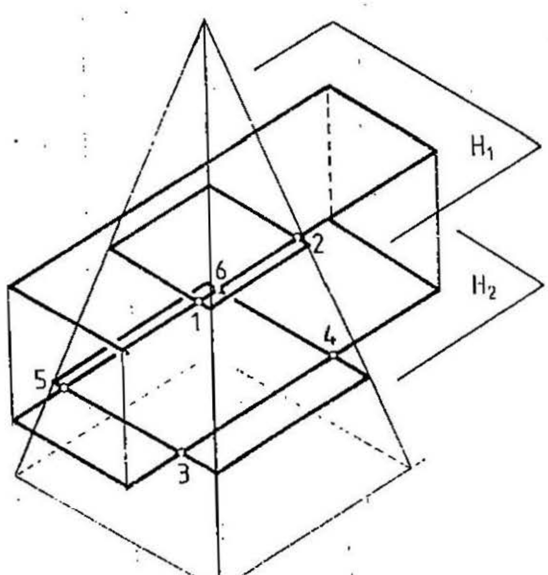


fig. 7.2.3

de intersecții de drepte. Se poate verifica acest principiu și în cazul intersecției dintre o prismă și o piramidă (v. fig. 5.1.13) și al intersecției dintre două prisme (v. fig. 5.1.15).

7.3. REZOLVAREA PROBLEMELOR ÎN GEOMETRIA DESCRIPTIVĂ

În rezolvările de geometrie descriptivă, reducerea dimensionalității problemelor apare mai clar decît în axonometrie, întrucît se răsfrînge și asupra elementelor din spațiu (drepte, plane, figuri). *Dreptele și planele particulare* din geometria descriptivă nu fac altceva decît să simplifice rezolvarea problemelor, deși pierd informație referitoare la elementele din spațiu.

Dreptele particulare (perpendiculare pe unul din planele de proiecție) își pierd în proiecția respectivă dimensiunea, reducîndu-se la un punct; de aceea, intersecția lor cu plane, suprafețe curbe sau corpuri din spațiu se obține imediat, avînd una din proiecții unic determinată. Celelalte proiecții ale punctului de intersecție se obțin prin proprietatea punctului de intersecție de a se afla pe suprafața corpului respectiv (problematică așa-numită „punct pe suprafață"). Ca exemplu, în figura 4.2.2, din capitolul 4, sînt determinate o serie de puncte așezate pe suprafața sferei, folosindu-se linii caracteristice ale acesteia. Astfel se pot obține intersecțiile cu o sferă ale unor drepte verticale sau de capăt.

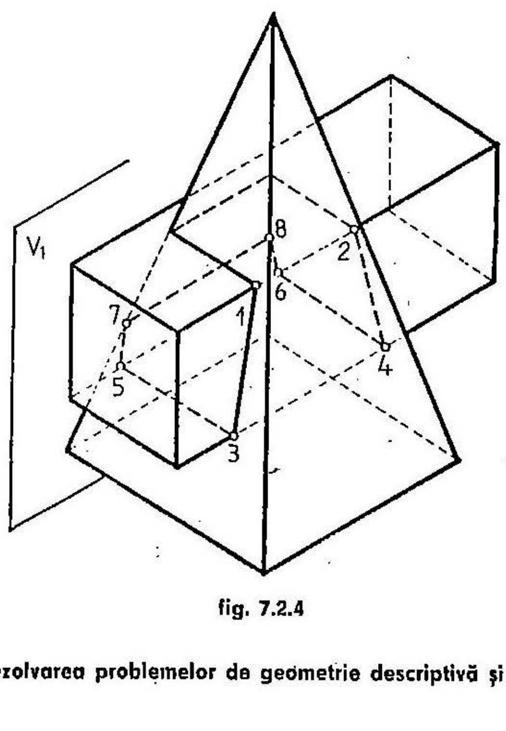


fig. 7.2.4

În mod similar, *planele particulare* (perpendiculare pe unul din planele de proiecție) își pierd o dimensiune, proiectîndu-se pe planul respectiv după o dreaptă. Acesta este motivul pentru care *secțiunile după plane proiectante* în plane, suprafețe curbe sau corpuri din spațiu se soluționează imediat. Un exemplu este secțiunea printr-un plan de capăt în sferă (v. fig. 4.2.9). Proiecția orizontală a cercului de secțiune este o elipsă. În figura 5.1.3, din capitolul 5, este ilustrată construcția secțiunii într-o piramidă după un plan de capăt. În mod asemănător se obțin secțiunile, cu plane verticale sau de capăt, în suprafețe cilindrice și conice, în suprafețe riglate etc.

Construcția unor ansambluri prin lipirea unor volume pe fețele altor volume se rezolvă, de asemenea, făcîndu-se apel la plane particulare. De exemplu, pentru a așeza pe o față a unei piramide o piramidă identică, este necesar să se aducă planul feței respective în *poziție particulară* (de exemplu, plan de capăt). Odată redus planul la o dreaptă, construcția simetricului piramidei față de un plan se reduce la problema plană de construcție a simetricului unui triunghi față de o dreaptă. Un alt exemplu îl constituie cel din figura 2.1.27 din subcapitolul 2.1. În acest caz apare clar avantajul utilizării mai multor proiecții: elementele obținute în noua proiecție verticală se transferă în proiecție orizontală, permițînd astfel construcția ansamblului în proiecție orizontală. Tot prin corespondența proiecțiilor se transferă elementele obținute și în vechea proiecție verticală, obținîndu-se astfel imaginea finală a ansamblului.

De fapt, însăși *construcția unor volume și corpuri geometrice* face apel la plane particulare. În subcapitolul 5.2 referitor la poliedrele regulate sînt folosite plane de capăt și corespondența proiecțiilor, pentru a se construi *tetraedrul regulat* (v. fig. 5.2.6 și 5.2.7), *dodecaedrul regulat* (v. fig. 5.2.20...5.2.22) și *icosaedrul regulat* (v. fig. 5.2.25...5.2.27).

Problemele de tangență se pot rezolva, de asemenea, în mare parte prin reducerea problemei în spațiu la o problemă plană; de exemplu, tangența dintre un plan și o sferă se reduce la tangența dintre o dreaptă și un cerc. De asemenea, tangența dintre o sferă și mai multe conuri egale se poate rezolva printr-o poziționare care să reducă problema la tangența dintre un cerc și o dreaptă, în anumite condiții impuse centrului cercului (v. fig. 4.2.11).

Metodele geometriei descriptive (metoda schimbării planului de proiecție, metoda rotației și metoda rabaterii) nu fac altceva decît să aducă unele drepte și plane oarecare în poziții particulare, în scopul rezolvării problemelor propuse. Metoda rabaterii permite „desfășurarea" unor plane „interesante", adică plane care conțin elemente și figuri necesare rezolvării problemei respective. Prin rabaterea planului se păstrează toate elementele și relațiile metrice din el, iar figurile conținute apar nedeformate. Operînd cu aceste figuri se obțin puncte de intersecție, de tangență etc., care se readuc în proiecțiile inițiale prin ridicarea rabaterii. Un astfel de exemplu îl constituie intersecția unei sfere cu o dreaptă oarecare, efectuată prin metoda din figura 4.2.5.

7.4. CONSTRUCȚII GEOMETRICE ȘI LOCURI GEOMETRICE PLANE

În cele ce urmează se face apel la unele elemente de geometrie analitică plană și în spațiu, pentru a introduce mai multă rigoare în gîndirea logică în spațiu. Paralela cu geometria analitică permite o definire mai precisă a problemelor și condițiilor impuse în probleme, precum și o generalizare mai ușoară a rezultatelor și concluziilor la care s-a ajuns.

Așa cum s-a constatat în secțiunile precedente ale acestui capitol, logica rezolvării problemelor de geometrie descriptivă și axonometrie o constituie simplificarea problemei. Simplificarea se obține prin reducerea dimensionalității, dar evident pierzînd o cantitate de informație. Informația pierdută nu este însă esențială în momentul rezolvării problemei și se poate oricînd reveni la ea, dacă este necesar. Reducerea problemelor din spațiu la probleme în plan presupune o rezolvare a lor prin *construcții geometrice în plan*. Practic, toate construcțiile geometrice sînt *intersecții de locuri geometrice plane*. Un loc geometric este totalitatea punctelor care se bucură de o aceeași proprietate. Modul de rezolvare a locurilor geometrice și probleme cu locuri geometrice sînt conținute în anexa 2. În cele ce urmează se va discuta numai interpretarea lor analitică și utilitatea locurilor geometrice în găsirea soluției pe calea construcțiilor grafice.

Aplicație. Pentru a demonstra că, de fapt, construcțiile geometrice sînt locuri geometrice plane, se cere să se construiască un cerc de rază $\mathbf{R_2}$ tangent la o dreaptă (Δ) și la un cerc de rază $\mathbf{R_1}$. Cercul căutat trebuie să îndeplinească *două condiții*:

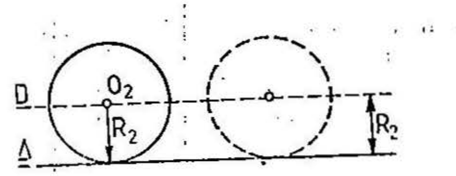


fig. 7.4.1

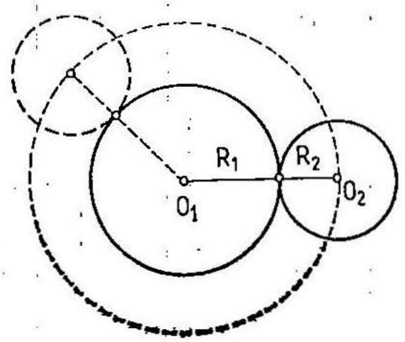


fig. 7.4.2

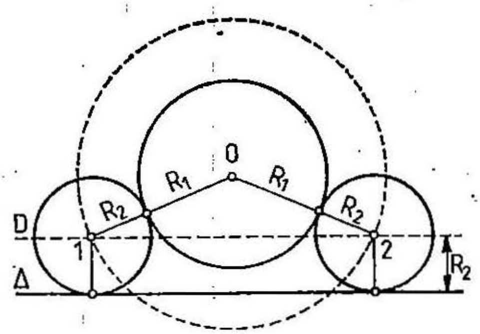


fig. 7.4.3

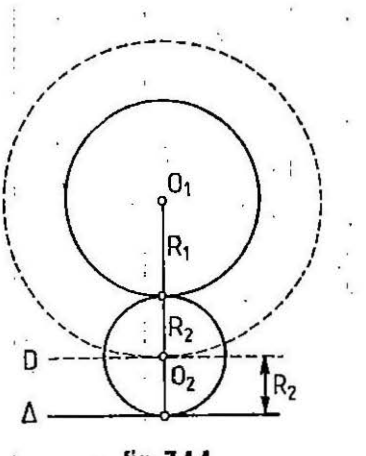


fig. 7.4.4

1) tangența la o dreaptă;
2) tangența la un cerc.
Să examinăm cele două condiții pe rînd.
1) Dacă un cerc de rază R_2 este tangent la o dreaptă (Δ), atunci centrul său se va găsi întotdeauna pe o dreaptă (D) paralelă cu dreapta (Δ) și situată la distanța R_2 de aceasta (fig. 7.4.1). Dreapta (D) este un loc geometric și este alcătuită dintr-o infinitate de puncte, ceea ce înseamnă că problema este nedeterminată dacă ne limităm la această condiție.
2) Dacă un cerc de rază R_2 este tangent la un cerc de rază R_1, atunci centrul său se va găsi întotdeauna pe un cerc de rază $R_1 + R_2$, concentric cu cercul de rază R_1 (fig. 7.4.2). Cercul de rază $R_1 + R_2$ este un loc geometric și este alcătuit dintr-o infinitate de puncte, ceea ce înseamnă că problema este nedeterminată, dacă ne limităm la această condiție.
De fapt, în problema enunțată, cercul căutat trebuie să satisfacă *simultan* cele două condiții. Centrul său va trebui deci să aparțină ambelor locuri geometrice; centrul se va afla, prin urmare, la *intersecția* celor două locuri geometrice, respectiv la intersecția dreptei (D) cu cercul de rază $R_1 + R_2$ (fig. 7.4.3). Cele două soluții ale problemei sînt cercurile cu centrele în punctele 1 și, respectiv, 2. În transcriere analitică, cele două condiții pentru centrul cercului căutat sînt următoarele:

1) $Ax + By + C = 0$;

2) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = (R_1 + R_2)^2$.

Alegînd cazul cel mai general (sistemul de coordonate este în afara dreptei (Δ) și a cercului de rază $R_1 + R_2$), se observă că prima ecuație reprezintă ecuația generală a unei drepte oarecare din plan, iar cea de-a doua ecuație reprezintă ecuația cercului de rază $R_1 + R_2$ și centrul de coordonate (a,b). Satisfacerea simultană a celor două condiții presupune *rezolvarea sistemului de ecuații*. Soluțiile reale pot fi în număr de zero, una sau două, în funcție de valorile pe care le iau constantele. Se poate verifica și grafic că există o singură soluție, atunci cînd cercul de rază R_1 se află situat la distanța $2R_2$ de dreapta (Δ), conform figurii 7.4.4, sau zero soluții atunci cînd distanța este mai mare decît $2R_2$ (fig. 7.4.5).

Aplicație. Să presupunem că avem în plan două drepte perpendiculare concurente în I și se cere să găsim locul geometric al punctelor pentru care suma distanțelor la cele două drepte este egală cu o constantă K_s, iar suma pătratelor distanțelor la cele două drepte este egală cu o altă constantă K_p.
Cele două locuri geometrice care satisfac cele două condiții impuse în problemă sînt din nou o dreaptă și un cerc. Condițiile sînt:

1) $d_1 + d_2 = K_s$;

2) $d_1^2 + d_2^2 = K_p$.

Prima ecuație definește o dreaptă care taie cele două drepte perpendiculare la distanța K_s de punctul I de intersecție, iar cea de a doua ecuație definește un cerc de rază $\sqrt{K_p}$ cu centrul în punctul I. Soluțiile pot fi și de data aceasta, în număr de zero, una sau două. Varianta cu două soluții este ilustrată în figura 7.4.6.

Aplicație. Să se găsească punctul egal depărtat de trei drepte neparalele din plan.
Se notează cele trei drepte (D_1), (D_2) și (D_3). Condiția problemei este deci: $d_1 = d_2 = d_3$.
Se poate observa că sînt de fapt trei condiții, din care două (în orice combinație) sînt suficiente:

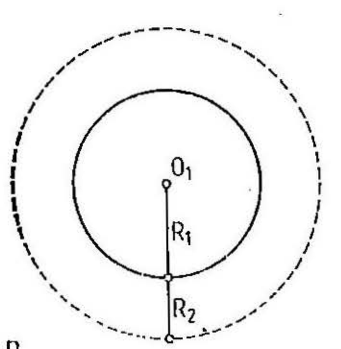


fig. 7.4.5

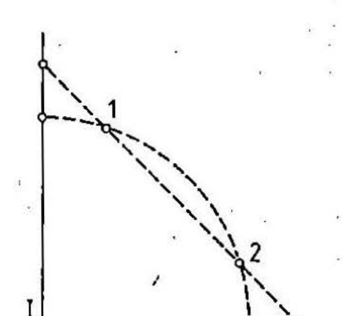


fig. 7.4.6

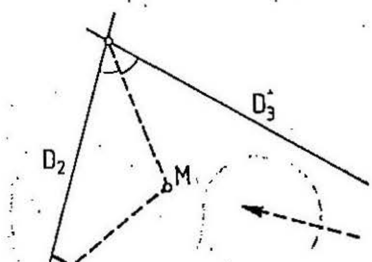


fig. 7.4.7

1) $d_1 = d_2$;

2) $d_2 = d_3$;

3) $d_1 = d_3$.

Dacă se exprimă în ecuații primele două condiții, ele vor defini bisectoarele unghiurilor formate de dreptele (D_1) și (D_2), respectiv (D_2) și (D_3). Rezolvarea sistemului de ecuații determină coordonatele x și y ale punctului M de intersecție a celor două bisectoare (fig. 7.4.7). După cum rezultă și din scrierea condițiilor problemei, cea de a treia ecuație satisface și ea sistemul de ecuații, fiind verificată de valorile coordonatelor punctului M; deci, cea de-a treia bisectoare a triunghiului format de dreptele (D_1), (D_2) și (D_3) trece și ea prin punctul M.

Aplicație. Așezați pe planul orizontal de proiecție trei sfere de raze R_1, R_2 și R_3 respectiv, tangente două cîte două între ele.

Dacă se așază sferele de raze R_1 și R_2, astfel încît centrele lor să se afle într-un plan frontal, atunci contururile aparente în proiecție verticală sînt două cercuri tangente (fig. 7.4.8). Proiecția orizontală a celor două sfere se obține imediat. O altă soluție (sfera de rază R_2 desenată cu linie întreruptă) se poate obține luînd sfera R_2 în stînga sferei R_1. Atunci cînd sfera R_2 circulă în jurul sferei R_1, centrul ei O_2 descrie ca loc geometric cercul Γ_1 situat în planul de nivel $[H_\Gamma]$. Cunoscînd locul geometric, se poate determina oricînd cu precizie orice poziție intermediară a sferei tangente.

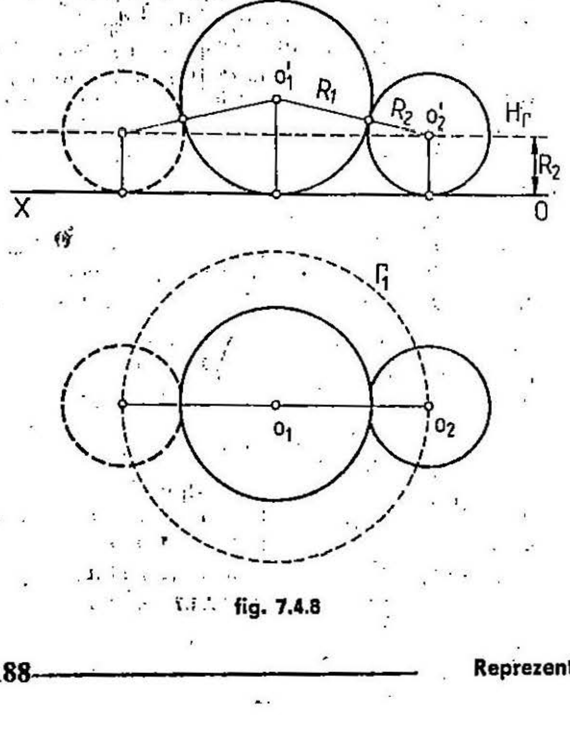


fig. 7.4.8

Folosind același procedeu, se așază sfera R_3 tangentă la sfera R_1 (fig. 7.4.9). Dacă se rotește sfera R_2 în jurul sferei R_1 pînă cînd devine tangentă la sfera R_3, se obține soluția problemei. Centrul sferei R_2 se va afla pe cercul Γ_1. Condiția de tangență a sa cu sfera R_3 nu este însă exprimată precis. De aceea, se așază sfera R_2 tangentă la sfera R_3 și se determină cercul Γ_3, care este locul geometric al centrului sferei R_2, atunci cînd acesta „circulă" în jurul sferei R_3 (fig. 7.4.10). Cele două cercuri Γ_1 și Γ_3 se află

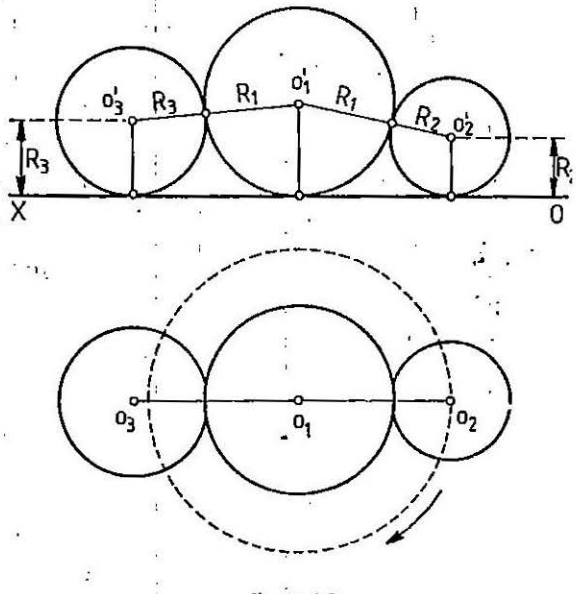


fig. 7.4.9

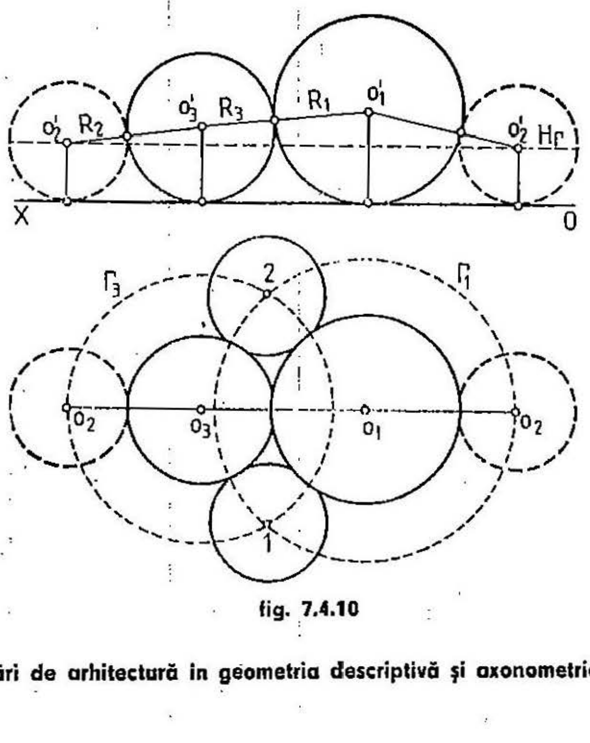


fig. 7.4.10

ituate în planul de nivel $[H_I]$. Pentru ca sfera R_2 ă fie simultan tangentă sferelor R_1 şi R_3, centrul rebuie să se afle simultan pe cele două cercuri, deci a intersecţia lor. Problema are două soluţii: puncele 1 şi 2.

7.5. LOCURI GEOMETRICE ÎN SPAŢIU

Aplicaţie. Aşezaţi peste cele trei sfere din problema precedentă o a patra sferă de rază R_4, astfel încît să fie tangentă la toate trei.
Pentru a rezolva această problemă, trebuie să se reinterpreteze problema precedentă prin prisma locurilor geometrice în spaţiu. Locul geometric al centrului unei sfere *de rază* **R** *tangente la un plan* [P] îl constituie două plane paralele cu planul [P] şi situate la o distanţă de acesta egală cu raza R (fig. 7.5.1). *Locul geometric al centrului unei sfere de rază* R_1 *tangente la o altă sferă de rază* R_2 *îl constituie o sferă de rază* $(R_1 + R_2)$ *concentrică cu sfera de rază* R_2 (fig. 7.5.2).

Condiţiile problemei precedente reformulate sînt următoarele:

1) sfera R_1, tg. la [H];

2) sfera R_2, tg. la [H];

3) sfera R_3, tg. la [H];

4) sfera R_1, tg. la sfera R_2;

5) sfera R_1, tg. la sfera R_3;

6) sfera R_2, tg. la sfera R_3.

Din acest moment, problema permite mai multe abordări. Abordarea din figurile 7.4.8...7.4.10 a fost aceea a satisfacerii mai întîi a condiţiilor de tangenţă a sferelor la planul [H]. Într-o altă rezolvare, locul geometric al centrului sferei R_2, tangentă simultan la sferele R_1 şi R_3, este intersecţia a două sfere cu razele $(R_1 + R_2)$ şi respectiv $(R_2 + R_3)$ (fig. 7.5.3). Intersecţia celor două sfere este un cerc care în rabaterea din dreapta figurii este notat cu Γ_0

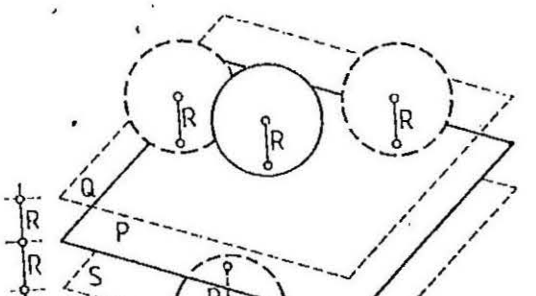


fig. 7.5.1

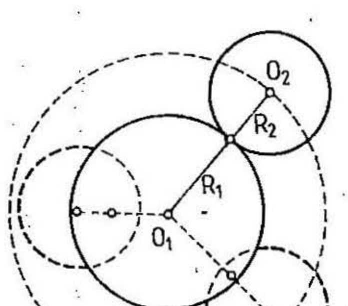


fig. 7.5.2

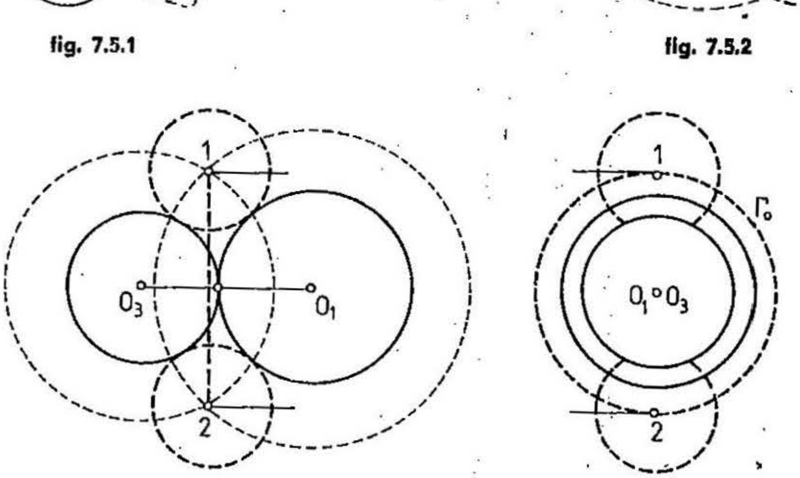


fig. 7.5.3

Pentru a satisface condiţiile de tangenţă la planul [H] a celor trei sfere se procedează astfel: se duce planul tangent la sferele R_1 şi R_3 şi se notează [H]. Soluţia problemei se află la intersecţia cercului Γ cu planul [H_1], paralel cu [H] şi aflat la distanţa R_2 de acesta (fig. 7.5.4). Pentru a obţine cele două soluţii **1** şi **2** ale centrului sferei R_2 în proiecţie orizontală, se utilizează rabaterea Γ_0 a locului geometric al centrului. Se ia distanţa d (foarte puţin mai mică decît diametrul cercului) din rabaterea Γ_0 şi se transpune în proiecţie orizontală.

Aşezarea unei a patra sfere de rază R_4 peste cele trei sfere tangente nu mai prezintă dificultăţi de concepţie, ci numai de desen, care se complică ceva mai mult. Condiţiile sînt:

1) sfera R_4, tg. la sfera R_1;

2) sfera R_4, tg. la sfera R_2;

3) sfera R_4, tg. la sfera R_3.

Fiecare din condiţii se traduce prin restricţia ca centrul sferei R_4 să se afle situat pe o sferă de rază $(R_1 + R_4)$, $(R_2 + R_4)$ şi, respectiv $(R_3 + R_4)$. Analitic, utilizînd ecuaţia prin coordonate a sferei, se va rezolva sistemul de ecuaţii:

1) $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = (R_1 + R_4)^2$

2) $(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = (R_2 + R_4)^2$

3) $(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = (R_3 + R_4)^2$

Cele trei sfere locuri geometrice se intersectează în zero, unul sau două puncte care reprezintă soluţia problemei. Dacă se introduc în expresiile analitice şi condiţiile de tangenţă reciprocă a sferelor iniţiale R_1, R_2 şi R_3, se elimină cazurile cu zero sau o soluţie şi vor exista două soluţii. Grafic, aceste două soluţii se obţin în figurile 7.5.4 şi 7.5.5. Sferele locuri geometrice de raze $(R_1 + R_4)$ şi $(R_3 + R_4)$ se intersectează după un cerc situat într-un plan de capăt. Rabaterea acestui cerc este Γ_0 (fig. 7.5.4). Sfera de rază $(R_2 + R_4)$ se construieşte în planul de rabatere, utilizînd depărtarea δ luată din proiecţia orizontală (fig. 7.5.5). Ea se intersectează cu Γ_0 în două puncte care reprezintă soluţia problemei. Cele două puncte se întorc din rabatere în **1** şi **2**, se utilizează doar punctul **1**, întrucît punctul **2** se află situat sub planul [H]. Proiecţia orizontală a sferei R_4 se obţine preluînd din rabatere depărtarea d_1 a centrului sferei şi utilizînd-o în plan.

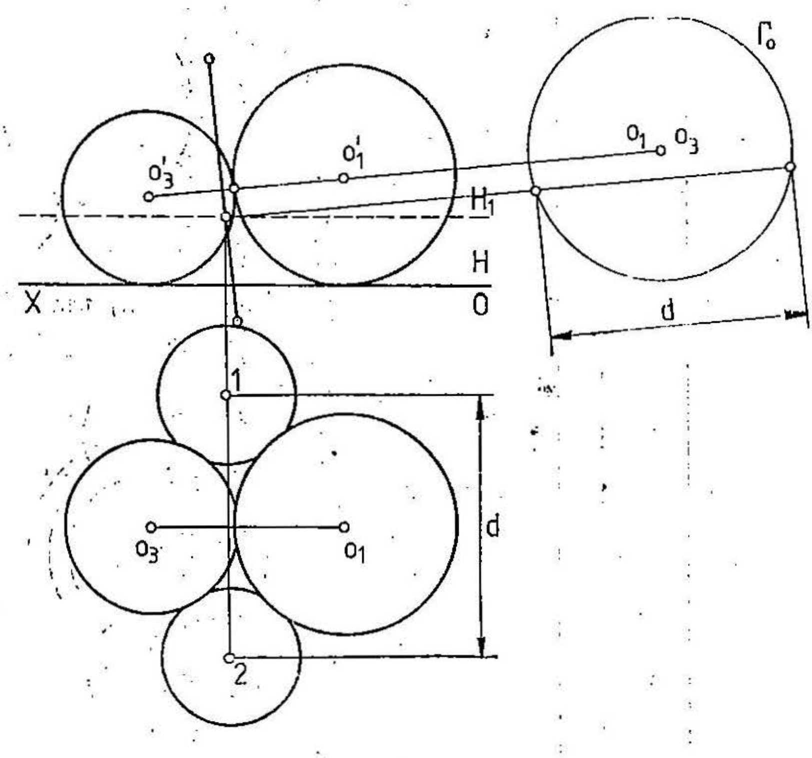


fig. 7.5.4

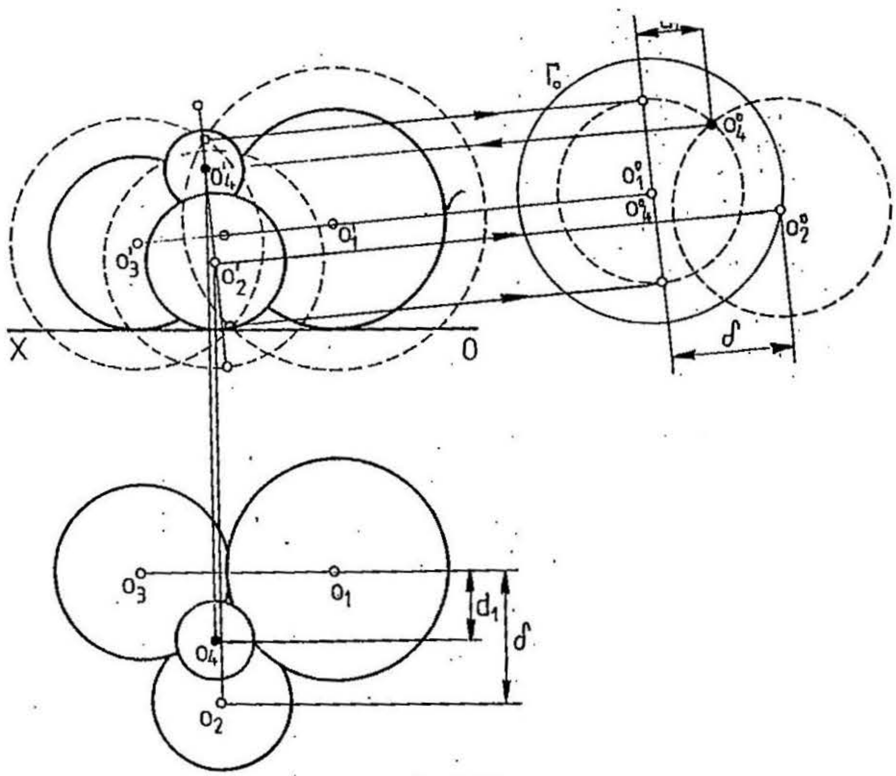


fig. 7.5.5

SFERE ÎN POLIEDRE

Locul geometric al centrului unei sfere tangente simultan la *două plane concurente* este planul bisector al acestora (fig. 7.5.6). Se observă că sfera are raza variabilă.

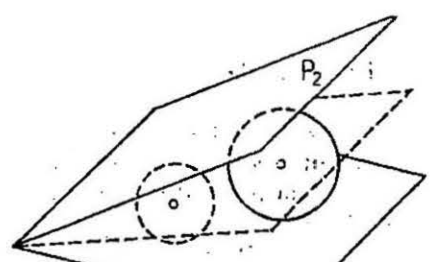


fig. 7.5.6

Locul geometric al centrului unei sfere tangente simultan la *trei plane concurente* este dreapta egal depărtată de cele trei plane (fig. 7.5.7). Desigur, planele fiind infinite, locurile geometrice se prelungesc și de cealaltă parte a dreptei (respectiv punctului) de intersecție a planelor. Dreptele egal depărtate de trei plane concurente se obțin la intersecția oricărei perechi de plane bisectoare. Este interesant că într-o proiecție după direcția acestei drepte (în care dreapta apare un punct), planele bisectoare se proiectează după trei drepte concurente în acel punct (fig. 7.5.8). Se obține practic construcția plană a centrului cercului înscris într-un triunghi oarecare, obținut la intersecția bisectoarelor, cu condiția ca triunghiul care limitează planele P_1, P_2 și P_3 să fie situat într-un plan perpendicular pe dreapta (Δ).

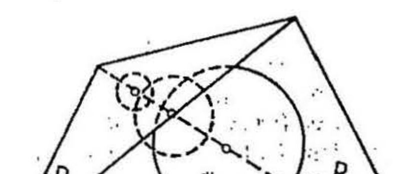


fig. 7.5.7

In cazul tangenţei simultane a unei sfere la patru plane concurente, nu mai avem un loc geometric ci o soluţie unică, şi anume, centrul sferei înscrise în tetraedrul alcătuit de cele patru plane. Centrul sferei se obţine, intersectînd trei din cele patru plane bisectoare ale tetraedrului. Pentru verificare, cel de-al patrulea plan bisector va trece şi el prin centrul sferei. Deşi conceptual problema se rezolvă relativ uşor, în cazul reprezentării în dublu ortogonal a sferei înscrise într-un tetraedru oarecare rezolvarea este destul de incomodă şi necesită cîteva schimbări de plan vertical de proiecţie (pentru a transforma planele bisectoare în plane de capăt).

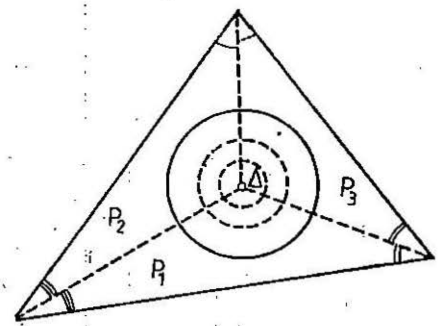


fig. 7.5.8

Aplicaţie. Desenaţi sfera cea mai mare care intră complet într-un pentaedru (poliedru cu cinci feţe) oarecare.
Problema se reduce la tangenţa simultană a unei sfere la cinci plane concurente. În cazul general, se aleg patru din cele cinci plane şi se determină (ca în exemplul precedent) sfera înscrisă în tetraedrul alcătuit de cele patru plane (fig. 7.5.9). Sînt figurate şi cele patru puncte de tangenţă a sferei la feţele tetraedrului.

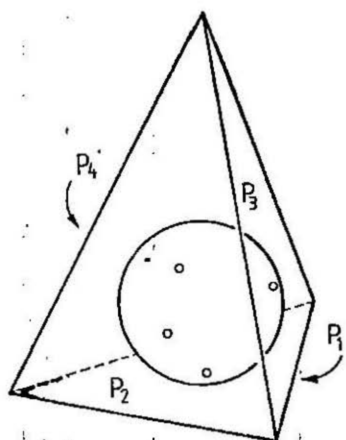


fig. 7.5.9

Dacă se introduce un al cincilea plan, pot să apară trei situaţii:

1. Planul P_5 este şi el tangent sferei (fig. 7.5.10). În aceste condiţii, pentaedrul este circumscriptibil unei sfere. Problema este deci rezolvată.

2. Planul P_5 este exterior sferei (fig. 7.5.11). În acest caz s-ar putea să existe o sferă mai mare care să intre complet în pentaedru (în funcţie de înclinaţia şi poziţia feţelor). Se compară sfera iniţială cu sfera înscrisă în tetraedrul alcătuit din altă combinaţie de plane P_1, P_2, P_4, P_5. Se continuă operaţia alegîndu-se numai combinaţiile de plane care închid spaţiul. Sfera cea mai mare este soluţia problemei.

3. Planul P_5 secţionează sfera (fig. 7.5.12). În acest caz, sfera cea mai mare care intră în pentaedru va fi în mod cert o sferă mai mică decît sfera iniţială şi această sferă va fi tangentă la planul P_5. Este, de asemenea, evident faptul că sfera nu va fi tangentă la toate cele patru plane P_1, P_2, P_3 şi P_4, ci numai la trei dintre ele. Se vor analiza combinaţiile de patru plane luate cîte trei, astfel încît, împreună cu P_5, să închidă spaţiul. Dintre sferele înscrise, se alege cea mai mare. Într-o aplicaţie concretă, rezolvarea se simplifică prin observaţie directă.

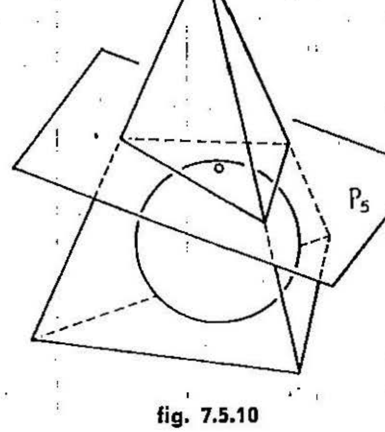


fig. 7.5.10

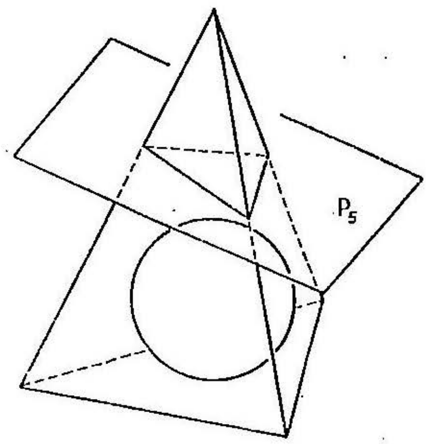


fig. 7.5.11

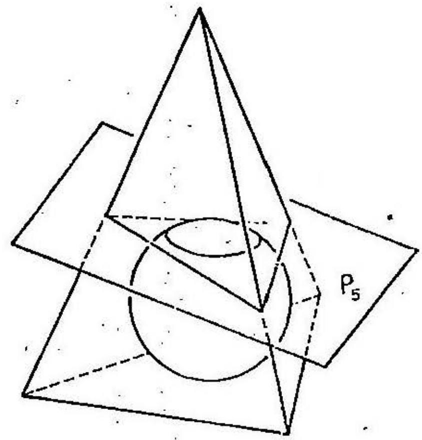


fig. 7.5.12

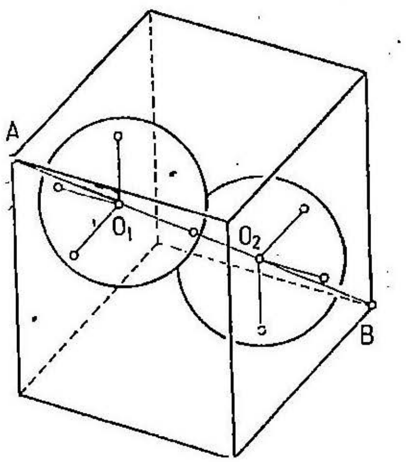


fig 7.5.13

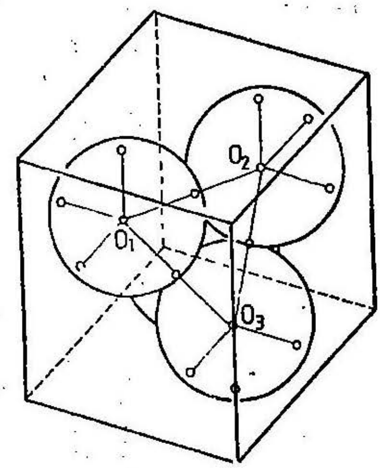


fig. 5.14

SFERE ÎN CUB

Rezolvarea problemelor cu sfere tangente se simplifică mult prin particularizare. De exemplu, *cele mai mari două sfere egale care intră complet într-un cub dat* ocupă „triedrele" corespunzătoare a două vîrfuri diametral opuse ale cubului, iar centrele lor se află pe diagonala interioară care unește cele două vîrfuri. Sferele sînt tangente între ele chiar în centrul cubului (fig. 7.5.13).
Cele mai mari patru sfere egale care intră complet într-un cub dat sînt dispuse după o configurație tetraedrală (fig. 7.5.14). Problema din spațiu se reduce aici la problema plană a introducerii celor mai mari două cercuri egale într-un pătrat dat.

Foarte interesantă este *problema celor mai mari trei sfere egale care intră complet într-un cub dat.* Dacă se revine la problema cu cele mai mari patru sfere egale cuprinse în cub și se extrage una din ele, se constată cu surprindere căcelelalte trei sfere rămîn imobilizate în continuare. Ele nu au nici un „grad de libertate" de mișcare, ceea ce înseamnă că nu se pot găsi trei sfere egale și mai mari decît acestea care să intre complet în cubul dat. Prin urmare, cele mai mari trei sfere egale care intră într-un cub dat, au aceeași dimensiune cu cele mai mari patru sfere egale care intră în acel cub.
Toate problemele de „împachetare" necesită un studiu al libertății de mișcare a volumelor împachetate. Dacă există cea mai mică posibilitate de deplasare în interior, „ambalajul" este prea mare.

În anexa 4 sînt propuse probleme care solicită găsirea celor mai mari cuburi egale care intră complet într-o sferă (respectiv 2, 3, 4, 5 și 6 cuburi). Rezolvarea problemelor nu este ușoară.

SFERE TANGENTE LA SUPRAFEȚE CURBE

În cazul *sferelor tangente la conuri* (v. problemele din anexa 4), rezolvarea se simplifică mult dacă se observă că locul geometric al centrului unei sfere tangente la un con circular este un alt con circular mai mare. Diferența dintre cele două conuri (măsurată pe o perpendiculară comună pe suprafață) este egală cu raza sferei.

În mod asemănător, locul geometric al centrului unei *sfere tangente la un cilindru circular* este un cilindru mai mare. Prin urmare, problemele de tangență dintre o sferă și cîteva conuri sau cîțiva cilindri se rezolvă prin intersecții de suprafețe conice și cilindrice.

Locul geometric al centrului unei *sfere tangente la o dreaptă* este cilindrul circular de rază egală cu raza sferei și care are drept axă dreapta dată. Tangența sferei la dreaptă apare mascată uneori în probleme prin condiții de genul celor din aplicațiile 5.14 și 5.15 din anexa 4.

* * *

Avantajele interpretării cu ajutorul locurilor geometrice a problemelor de geometrie descriptivă și axonometrie sînt, în primul rînd, *ordonarea elementelor necesare rezolvării problemelor* și, în al doilea rînd, *posibilitatea rezolvărilor multiple* care permit tratarea exhaustivă a problemelor. Se pot găsi astfel cele mai rapide și mai simple rezolvări din punct de vedere grafic. Astfel, se recomandă să se caute întotdeauna rezolvări care să se finalizeze prin intersecții de locuri geometrice de tip dreaptă-dreaptă, dreaptă-cerc, și cerc-cerc. Punctele determinate grafic la intersecția unei drepte cu o elipsă, parabolă sau hiperbolă sînt imprecise datorită impreciziei construcției curbelor ca atare.

8.

ALTE APLICAȚII ALE GEOMETRIEI DESCRIPTIVE ÎN ARHITECTURĂ

8.1. REZOLVAREA ACOPERIȘURILOR

Din punctul de vedere al geometriei descriptive ne interesează numai *traseul geometric al acoperișurilor* și nu modul practic de construcție a lor (șarpantă, învelitoare etc.). Astfel, acoperișurile se compun din plane înclinate, numite *ape* sau *versanți*. Aceste plane înclinate se intersectează între ele după drepte care constituie *muchiile acoperișului*. Muchiile aflate în planul de bază al acoperișului (streșinile) sînt de fapt *urmele* planelor înclinate (apelor) pe planul de bază orizontal al acoperișului.

Muchiile acoperișului sînt de trei feluri:
— *coame orizontale* — dacă planele de intersecție au urmele paralele;
— *creste* — dacă urmele planelor (streșinile) fac un unghi mai mic de 180°;
— *dolii* — dacă urmele planelor fac un unghi mai mare de 180°.

Figurile 8.1.1 și 8.1.2 ilustrează rezolvarea în plan a unui *acoperiș în patru ape*. Se observă o *secțiune orizontală* prin acoperiș dusă la cota punctelor A și C. *Adevărata mărime a unei ape* (sau versant) se poate obține prin rabaterea ei pe planul orizontal de bază al acoperișului. Rabaterea punctelor B, C și D depinde de *panta* acoperișului, adică de unghiul pe care îl face planul înclinat cu planul orizontal.

TIPURI DE ACOPERIȘURI

Figura 8.1.3 reprezintă în plan, vedere și axonometrie un *acoperiș în două ape*. Săgețile reprezintă direcția de scurgere a apelor și această direcție este *dreapta de cea mai mare pantă* a planelor înclinate respective. Ea este întotdeauna perpendiculară pe streașină (pe urma planului).
Figura 8.1.4 reprezintă un *acoperiș în patru ape de pante inegale*. Versanții de capăt au panta mai mare decît ceilalți doi versanți.

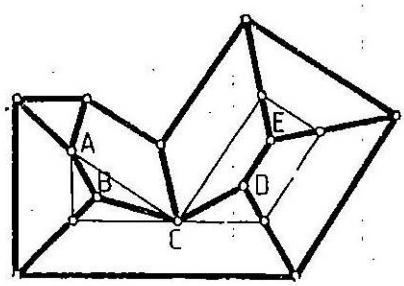


fig. 8.1.1

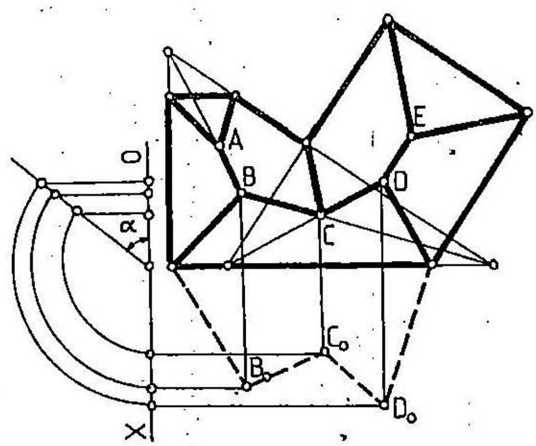


fig. 8.1.2

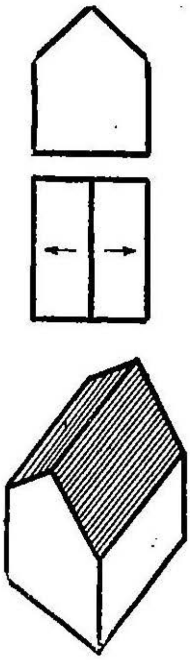


fig. 8.1.3

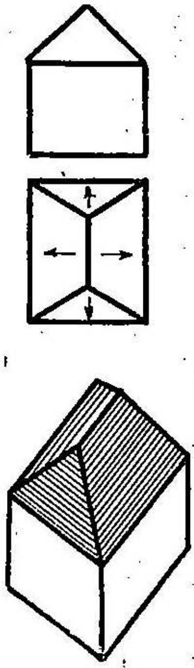


fig. 8.1.4

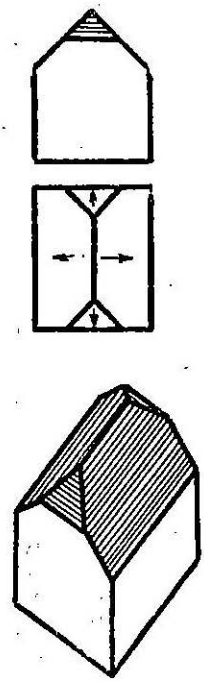


fig. 8.1.5

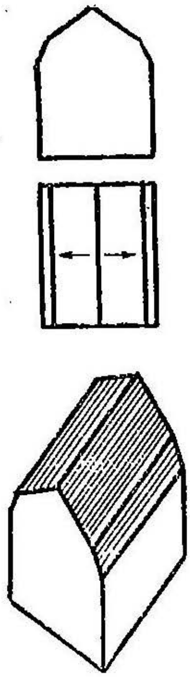


fig. 8.1.6

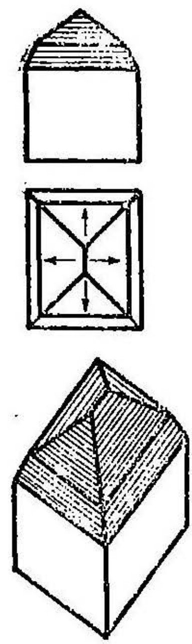


fig 8.1.7

Acoperişul în două ape poate să se prezinte sub diverse forme, de exemplu, cu teşituri pe timpane (fig. 8.1.5) sau cu rupere de pantă (fig. 8.1.6). Ruperi de pantă asemănătoare poate să prezinte şi acoperişul în patru ape (fig. 8.1.7). Mai mult decît atît, ruperea de pantă se poate produce şi prin muchii intrate, nu numai prin muchii ieşite, ca în exemplele prezentate.

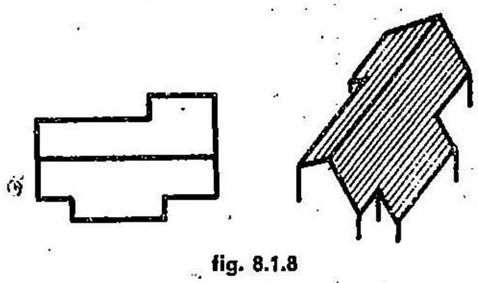


fig. 8.1.8

Acoperiş în două ape cu polată. Polata reprezintă o prelungire în jos (sub planul orizontal de bază al acoperişului) a apei sau versantului respectiv (fig. 8.1.8). Polata are ca scop acoperirea unei părţi mai joase a clădirii, a unei intrări etc.

Acoperiş în patru ape cu polată. La acoperişul în patru ape polata are, de obicei, plane înclinate laterale, evident de aceeaşi *pantă* cu planele acoperişului. În figura 8.1.9, una din apele corpului de clădire secundar are streaşina mai ridicată (din motive funcţionale).

Acoperiş în patru ape cu timpan vertical. Un alt exemplu (din multele posibile) de acoperiş în patru ape este cel din figura 8.1.10, unde apare un timpan vertical în faţadă.

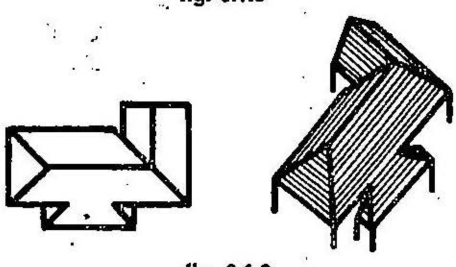


fig. 8.1.9

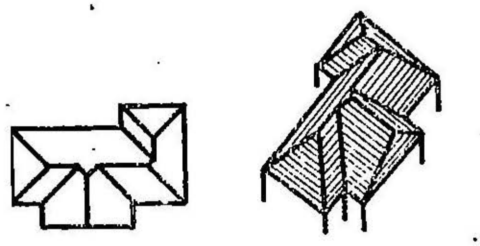


fig. 8.1.10

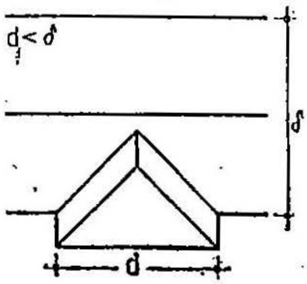


fig. 8.1.17

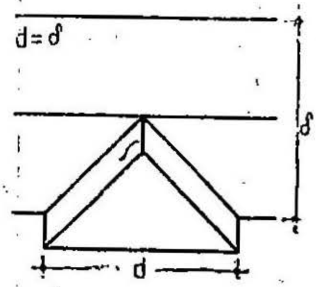


fig. 8.1.18

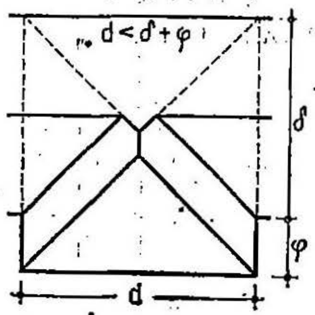


fig. 8.1.19

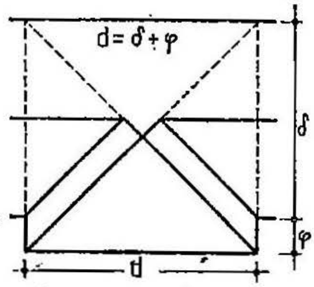


fig. 8.1.20

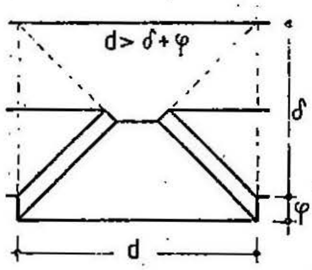


fig. 8.1.21

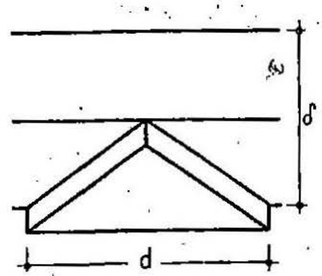


fig. 8.1.22

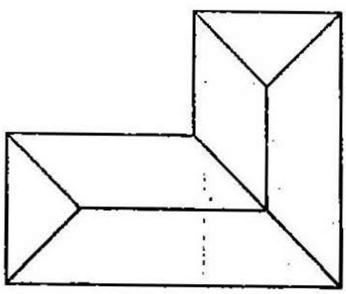


fig. 8.1.23

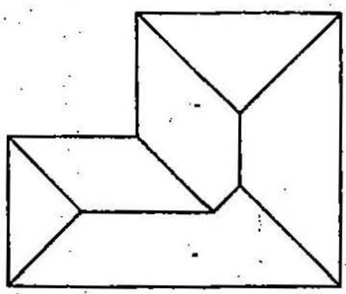


fig. 8.1.25

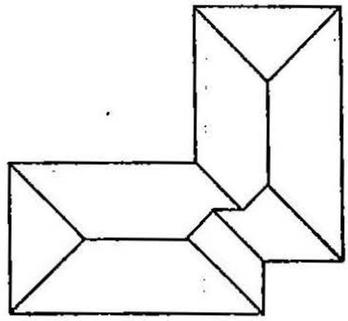


fig. 8.1.24

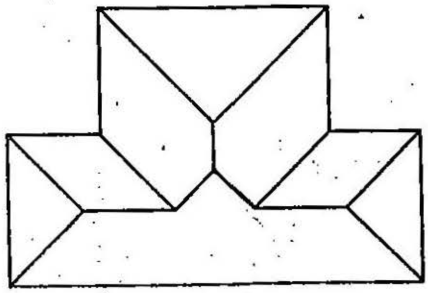


fig. 8.1.26

ACOPERIŞURI DENIVELATE CU VERSANŢI DE PANTE EGALE

Pentru rezolvarea acestor acoperişuri (fig. 8.1.27... ...8.1.28) este necesar să se cunoască denivelările care, de obicei, se indică pe elevaţii. În acoperişul din figura 8.1.29, aceste denivelări sînt date chiar în plan, prin punctele în care penetrează partea supraînălţată a acoperişului: punctele **1** şi **2.** Se prelungesc versanţii părţii supraînălţate a acoperişului pînă la cota planului orizontal de bază al acoperişului. Se rezolvă problema ca şi cînd nu ar exista denivelări. Se reţine din rezolvare numai partea care interesează (pînă la conturul exterior al acoperişului supraînălţat) — fig. 8.1.30.

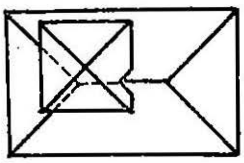


fig. 8.1.27

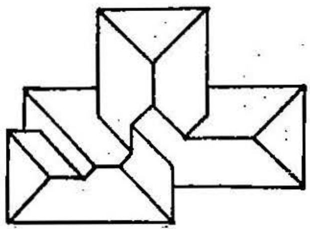


fig. 8.1.28

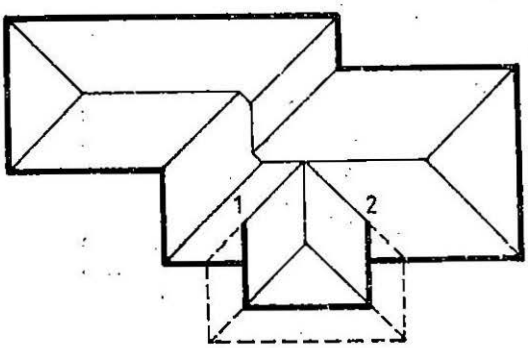


fig. 8.1.29

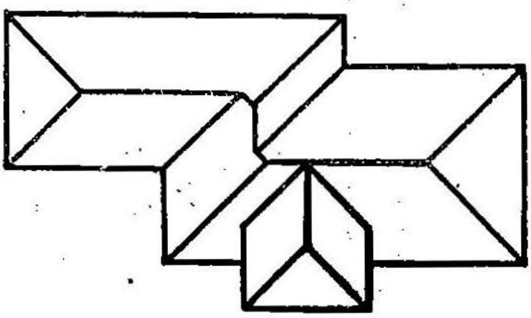


fig. 8.1.30

ACOPERIŞURI CARE „BAT" ÎNTR-UNUL SAU MAI MULTE CORPURI DE CLĂDIRE

(acoperişuri în calcan)

În figurile 8.1.31...8.1.40 sînt exemplificate o serie de astfel de acoperişuri. Rezolvarea lor se face în mod asemănător cu rezolvarea acoperişurilor obişnuite în patru ape cu versanţi de pante egale, ştiind că proiecţiile orizontale ale muchiilor de intersecţie ale diferitelor plane sînt bisectoarele urmelor acestor plane. Se vor identifica deci, în fiecare caz în parte, *urmele planelor* care se intersectează. Trebuie ţinut seama de faptul că planele care „bat" în calcan trebuie să fie perpendiculare pe acesta, în aşa fel încît apa de ploaie să se scurgă de-a lungul calcanului spre streşini.

Pentru orientare în rezolvarea acestui tip de acoperişuri se pot folosi *săgeţi* după direcţia dreptelor

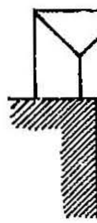


fig. 8.1.31

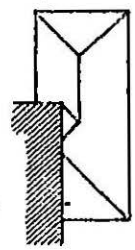


fig. 8.1.32

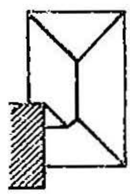


fig. 8.1.33

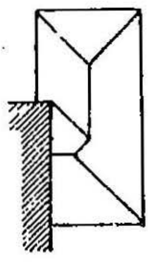


fig. 8.1.34

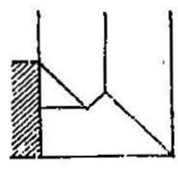


fig. 8.1.35

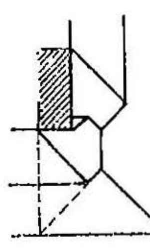


fig. 8.1.36

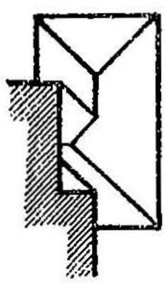


fig. 8.1.37

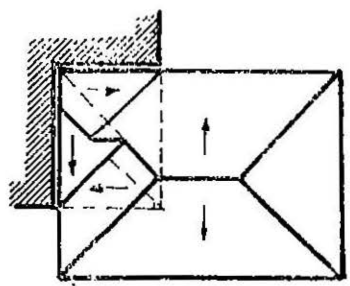


fig. 8.1.38

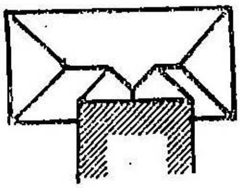


fig. 8.1.39

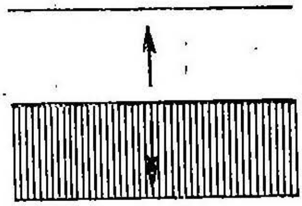


fig. 8.1.41

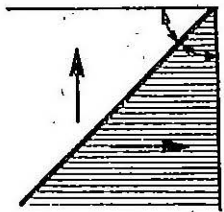


fig. 8.1.42

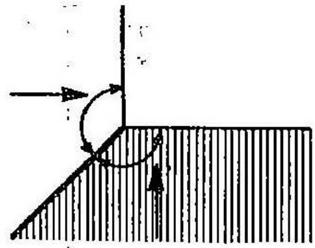


fig. 8.1.43

de cea mai mare pantă ale planelor înclinate care se intersectează. După cum am mai precizat înainte, *muchiile acoperișului* nu pot fi decît de trei feluri:

— *coame orizontale*; săgețile sînt în prelungire (fig. 8.1.41);

— *creste*; săgețile sînt divergente (fig. 8.1.42);

— *dolii*; săgețile sînt convergente (fig. 8.1.43).

Deci pentru o scurgere corectă a apei de ploaie de pe acoperiș va fi necesar ca planele din vecinătatea calcanului să fie perpendiculare pe acesta. În aceste condiții, muchiile trasate mai întîi la aceste tipuri de acoperișuri vor fi, după bisectoarele unghiurilor, cele din figura 8.1.44. În continuare, rezolvarea acoperișului este asemănătoare cu cea a acoperișurilor obișnuite. În figurile 8.1.45...8.1.46 sînt prezentate rezolvări de acoperișuri mai complicate. Elevațiile și secțiunile prin aceste acoperișuri oferă o imagine mai clară a rezolvării lor.

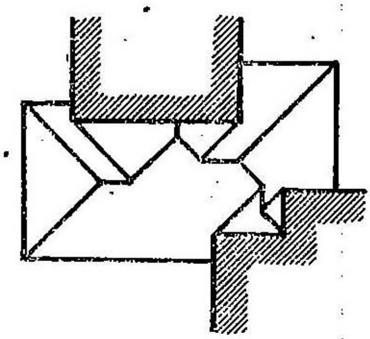


fig. 8.1.40

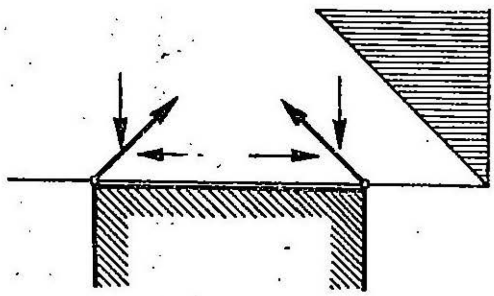


fig. 8.1.44

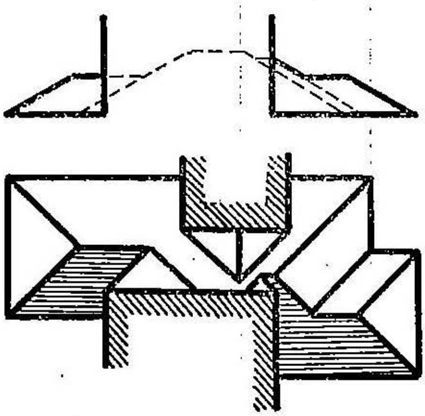


fig. 8.1.45

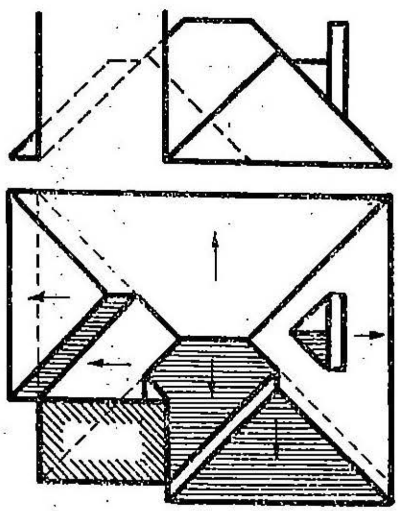


fig. 8.1.46

Efectul calcanelor asupra rezolvării unui acoperiș. În lipsa calcanelor, acoperișul din figura 8.1.47 se rezolvă conform metodei prezentate. În momentul introducerii a două clădiri mai înalte, acoperișul studiat trebuie să „bată" în calcanele acestor clădiri (fig. 8.1.48). Una din greșelile curente la rezolvarea acestor tipuri de acoperișuri provine din construcția „mecanică" a bisectoarelor din toate unghiurile streșinii. De fapt, în momentul introducerii calcanelor, bisectoarele duse din punctele M, N, P, Q, R și S nu mai au nici o semnificație. Toate aceste puncte se vor afla situate mult deasupra planului de bază al acoperișului și nu vor fi situate pe muchiile acoperișului decît din pură coincidență.

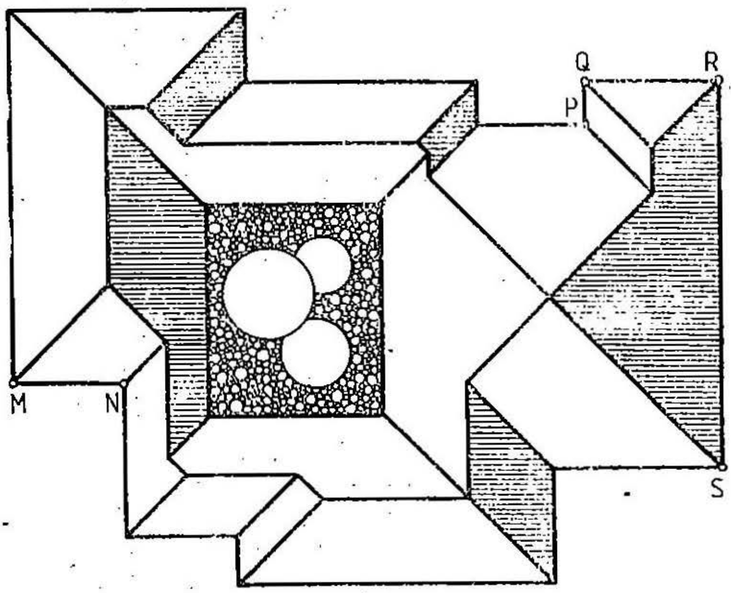


fig. 8.1.47

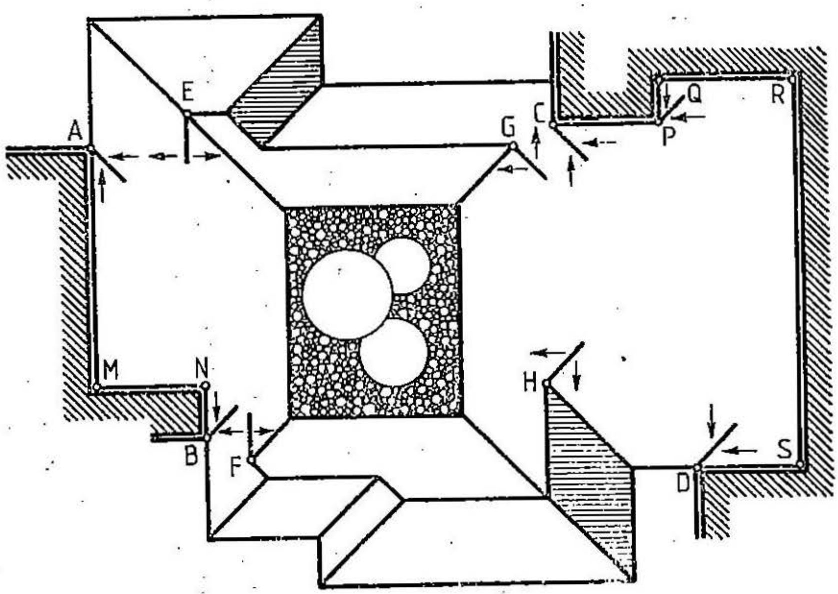


fig. 8.1.48

Acoperişul se rezolvă în mod obişnuit, începînd cu rezolvarea apelor care „bat" în calcane, respectiv construind muchiile din punctele A, B, C şi D (fig. 8.1.48). Muchiile duse din A şi B se intersectează cu muchiile din E şi F, iar muchiile duse din G şi H se intersectează într-un punct de unde porneşte o coamă orizontală ce se intersectează cu muchia dusă din C. Rezolvarea acoperişului este ilustrată în figura 8.1.49. Apa de ploaie este colectată în curtea interioară şi la streşinile exterioare.

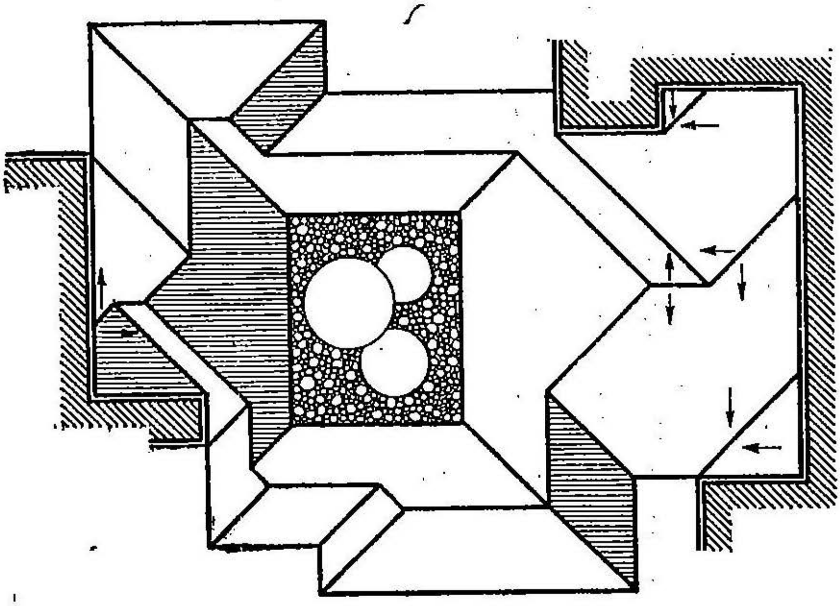


fig. 8.1.49

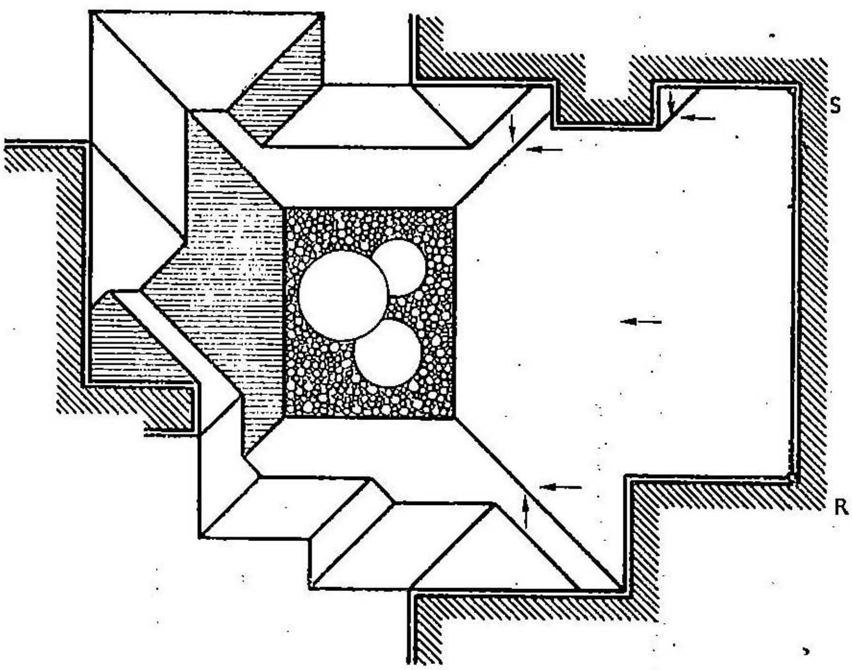


fig. 8.1.50

Cu cît acoperişul este mai obturat de clădirile înalte, cu atît rezolvarea este funcţional mai incomodă, acoperişul ajungînd la cote foarte înalte, necesare colectării apei de ploaie din vecinătatea calcanului şi aducerii ei în curtea interioară. De exemplu, în figura 8.1.50 zona cea mai înaltă a acoperişului este muchia orizontală RS. În asemenea situaţii (destul de rare, de altfel), rezolvarea funcţiunilor construcţiei necesită introducerea unor curţi de lumină (fig. 8.1.51). În mod automat, apa de ploaie este dirijată spre aceste curţi interioare, ceea ce scade cota maximă a acoperişului.

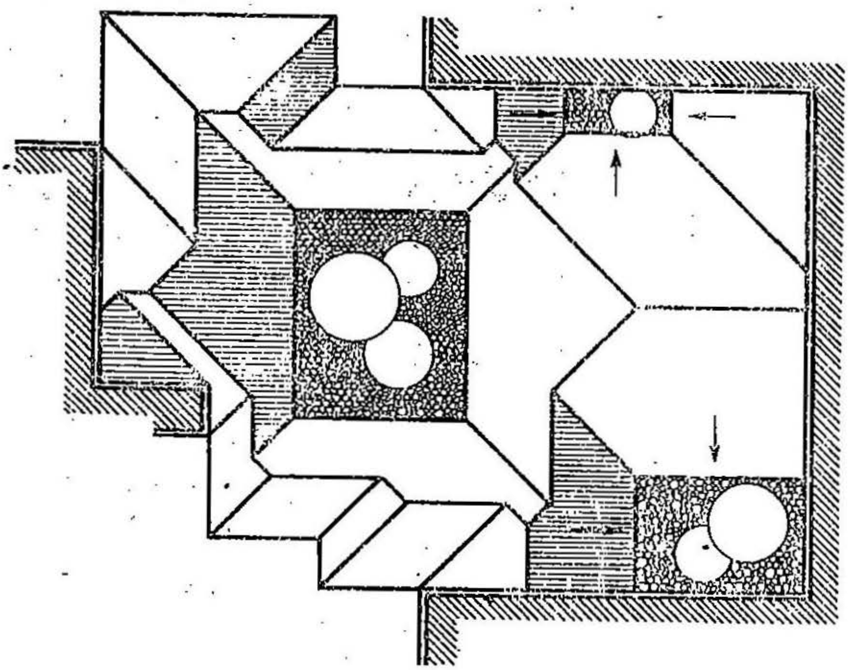


fig. 8.1.51

8.2. SISTEMATIZARE VERTICALĂ

Alte aplicaţii asemănătoare rezolvării acoperişurilor sînt lucrările de *sistematizare verticală*, adică lucrările de teren pentru construirea de platforme orizontale, săpături şi umpluturi de pămînt, taluzuri etc. Toate aceste aplicaţii intervin în problemele de amenajare a unor terenuri denivelate, în pantă, acolo unde este necesară amplasarea de obiecte de arhitectură.

SUPRAFEŢE TOPOGRAFICE

Pentru înţelegerea lucrărilor de sistematizare verticală (desigur, din punctul de vedere al traseului geometric), este necesar să studieze mai întîi reprezentarea în plan a suprafeţelor topografice.

Terenul natural poate avea forme de relief variate Pentru reprezentarea lor, se efectuează *secţiuni orizontale* prin teren. Curbele după care aceste plane orizontale secţionează terenul se numesc *curbe de nivel*. Toate punctele de pe o curbă de nivel au aceeaşi cotă. Curbele de nivel sînt asemănătoare dreptelor orizontale trasate pe plane înclinate.

Reprezentarea în plan a curbelor de nivel face apel la elemente ale unui capitol din geometria descriptivă numit *proiecţii cotate*. Astfel, în plan apare proiecţia orizontală a acestor curbe şi *cota lor*. Distanţa dintre planele de nivel cu care a fost secţionat terenul se numeşte *echidistanţa curbelor de nivel*. În exemplele următoare, echidistanţa curbelor de nivel este de 10 m.

În figura 8.2.1., punctele A şi B reprezintă două *vîrfuri de deal* şi punctul C reprezintă o *căldare*, iar în figura 8.2.2., s-a reprezentat o *căldare* (de-

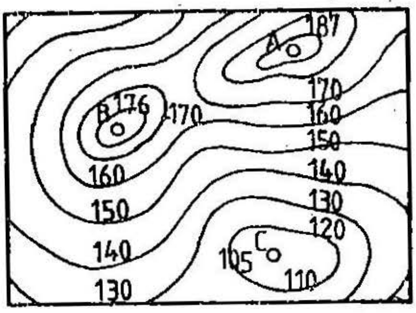


fig. 8.2.1

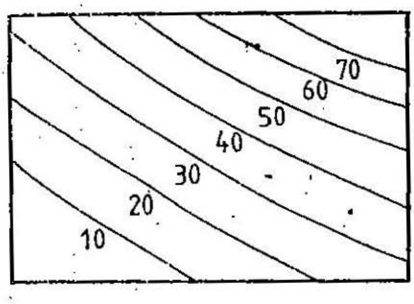


fig. 8.2.4

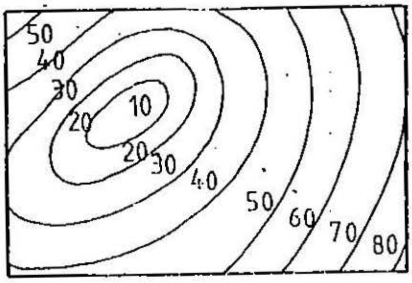


fig. 8.2.2

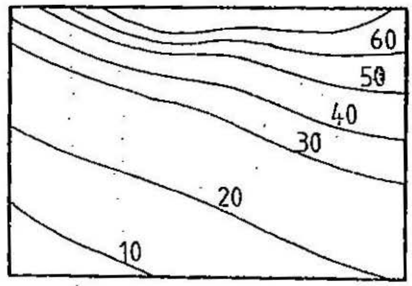


fig. 8.2.5

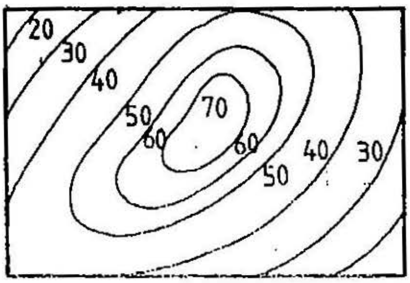


fig. 8.2.3

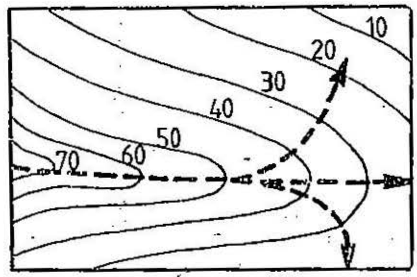


fig. 8.2.6

presiune înconjurată de zone mai înalte).
Reprezentarea unui *deal* (movile) al cărui vîrf se află la cota de 70 m este dată în figura 8.2.3, cea a unui *versant de deal* a cărui pantă este mai scăzută spre poale se vede în figura 8.2.4, iar a unui alt *versant de deal*, care prezintă o pantă mai accentuată spre „botul" sau „muchia" dealului, în figura 8.2.5. Un „bot de deal" de pantă relativ constantă, a cărui *creastă* este figurată punctat, este reprezentat în figura 8.2.6; săgețile indică direcțiile de coborîre (de curgere a apelor).
În figura 8.2.7 este reprezentată o *vale*, la care terenul coboară spre dreapta desenului. Linia punctată din centru reprezintă *firul văii* (sau direcția principală de curgere a apei). Celelalte linii punctate reprezintă alte direcții de scurgere a apei de ploaie.

Figura 8.2.8. reprezintă o *șea*, adică o suprafață topografică caracterizată de întîlnirea a două „boturi de deal" și a două văi. Liniile punctate reprezintă o suprafață de aceeași cotă.
În figura 8.2.9 este reprezentată *secțiunea transversală* (după un plan vertical) într-o suprafață topografică. Pentru obținerea secțiunii între punctele A și B se ridică punctele de intersecție în plan cu curbele de nivel la cotele respective, rezultînd astfel curba de secțiune a terenului. Pentru *transformarea unui teren* cu o suprafață neregulată într-un plan înclinat, se realizează săpături în zonele mai ridicate și umpluturi în zonele mai coborîte ale terenului (fig. 8.2.10). Noile „curbe de nivel" vor fi dreptele orizontale ale planului, de cote din 10 în 10 m.

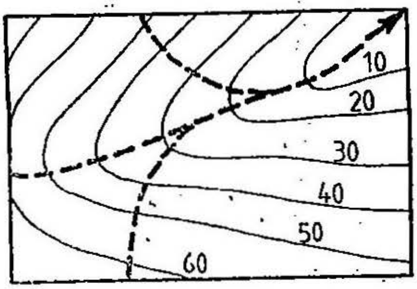


fig. 8.2.7

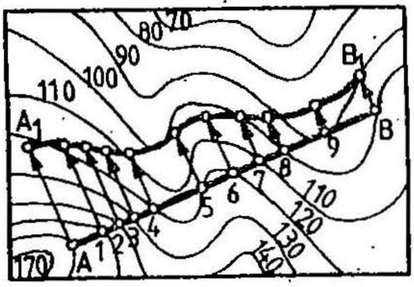


fig. 8.2.9

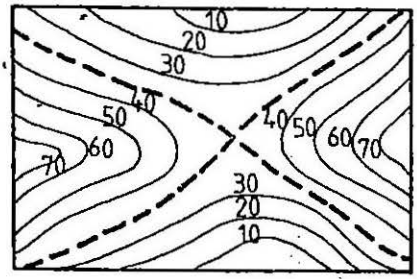


fig 8.2.8

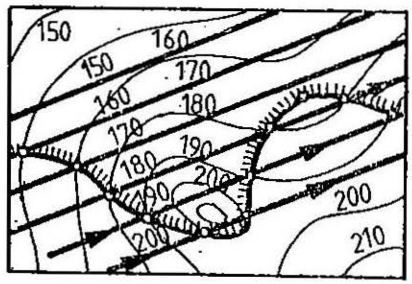


fig. 8.2.10

CONSTRUCȚII DE PLATFORME

În figura 8.2.11 este ilustrată construcția unei *platforme orizontale cu drum de acces.* Terenul este un plan înclinat, luat în acest caz, pentru simplificare, perfect regulat. Orizontala **mn** se află situată chiar la cota terenului. Zona **mabn** a platformei se obține printr-o *săpătură* și este mărginită de terenul natural prin plane sau taluzuri de *debleu*, a căror înclinare este dată de unghiul din figură. Zona **mdcn** este despărțită de terenul natural prin taluzuri de *rambleu* (umplutură). Din mijlocul laturii **dc** pornește o *rampă de acces* mergînd pînă la terenul natural.

Problema care se pune în rezolvarea acestei platforme orizontale este aceea a ducerii prin dreptele **ma**, **ab** și **bn** a unor plane înclinate și a găsirii intersecțiilor dintre ele și planul **P** al terenului (dat prin orizontalele de nivel).

Se consideră planul taluzului care trece prin **ab**. Se iau punctele de întîlnire ale orizontalelor de cote **7** și **8** ale planelor P (terenul) și **Q** (planul care trece prin **ab**); se obține intersecția $\alpha\beta$ a acestor plane. Se procedează la fel și pentru celelalte situații. Dacă taluzurile au pante egale, dreapta de intersecție a planelor înclinate apare în plan ca bisectoarea unghiului format de cele două urme ale planelor pe planul orizontal de bază (întocmai ca la acoperișuri).

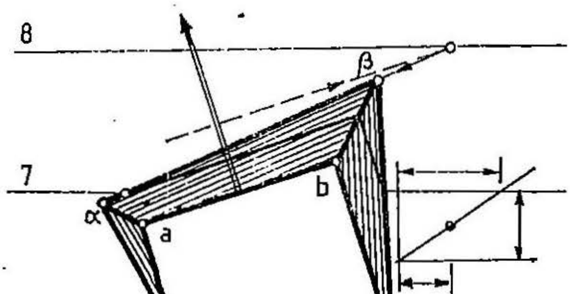


fig. 8.2.11

În figura 8.2.12 este ilustrată în axonometrie operația de nivelare (orizontalizare) a *traseului unui drum* prin săpătură (debleu) și umplutură (rambleu).

Se observă regularizarea curbelor de nivel pe taluzuri.

Figura 8.2.13 ilustrează o altă aplicație a sistematizării verticale, pe un caz asemănător. Terenul are de data aceasta o *rupere de pantă* la cota **20**.

Este necesar deci să se intersecteze taluzurile (toate de aceeași pantă) cu două înclinări diferite ale terenului. Din acest motiv, se observă că taluzurile prezintă o rupere în plan, în dreptul cotei **20**.

Intersecția planelor taluzurilor cu terenul se obține și de data aceasta cu ajutorul unor schițe care figurează *panta* (în acest caz, *pantele*) terenului (fig. 8.2.14).

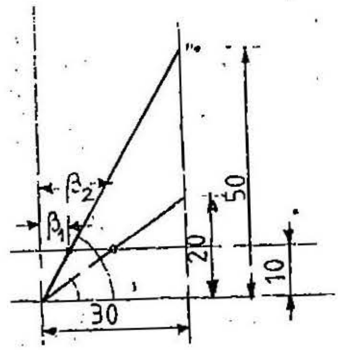


fig. 8.2.14

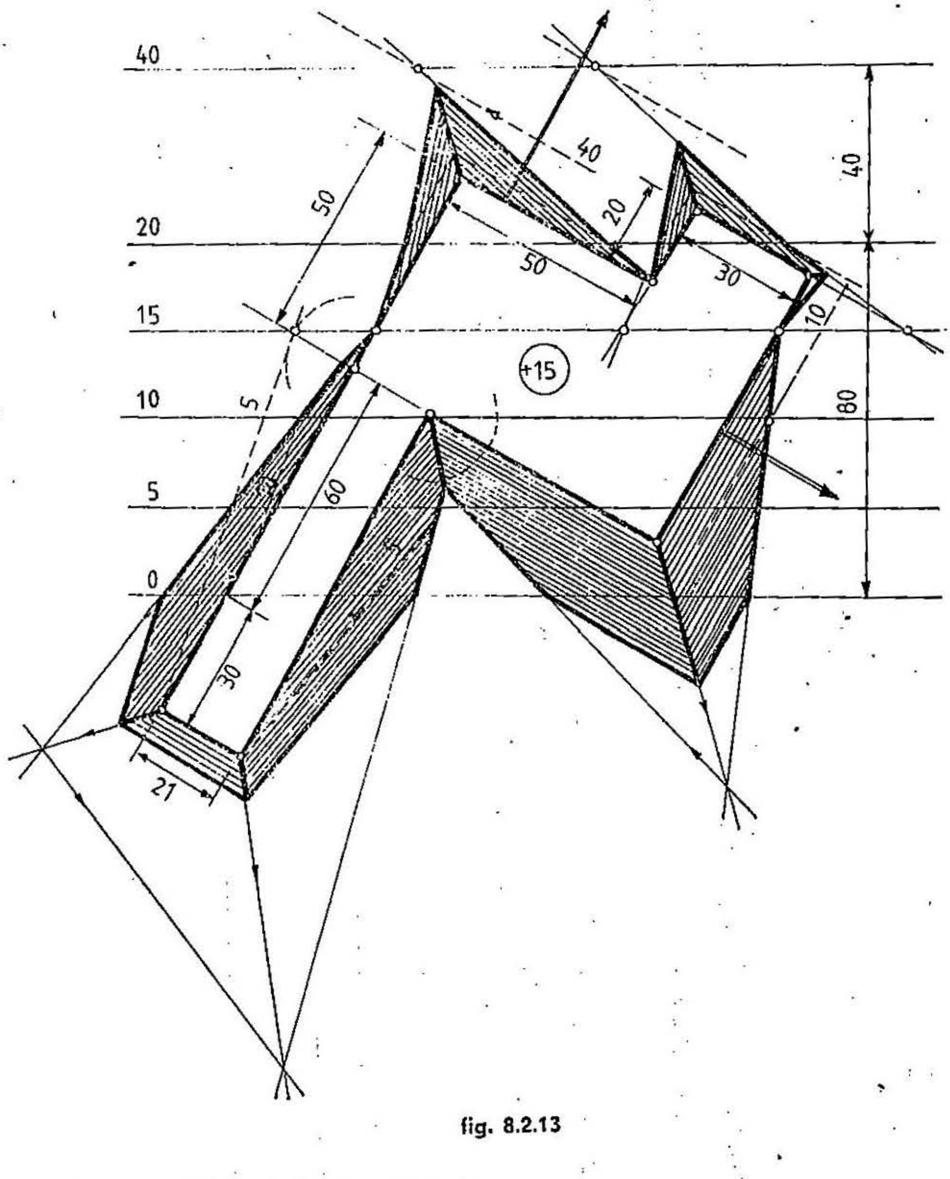


fig. 8.2.13

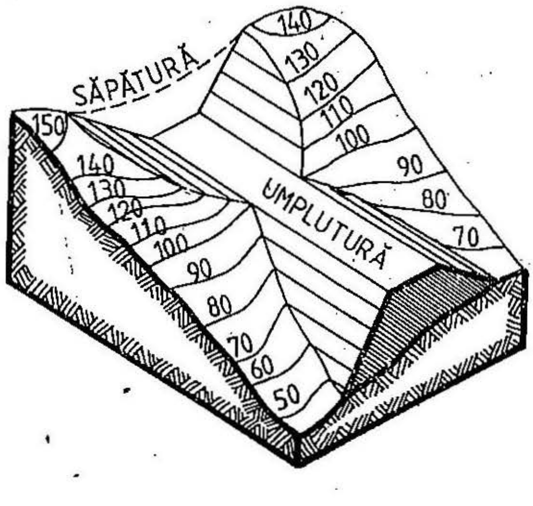


fig. 8.2.12

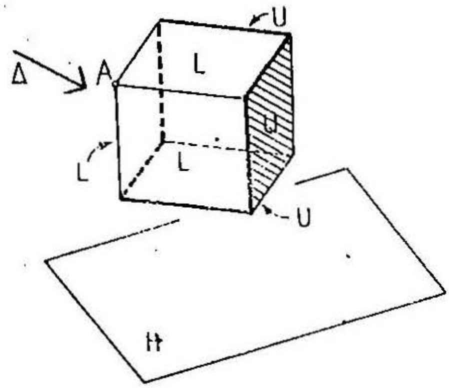


fig. 8.3.1

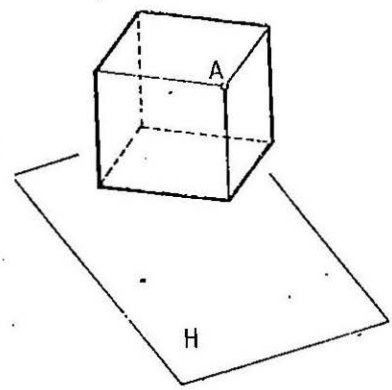


fig. 8.3.2

8.3. TRASAREA UMBRELOR

Una din aplicaţiile geometriei descriptive în arhitectură o constituie trasarea umbrelor volumelor de arhitectură. Studiul umbrelor în schiţe sau proiecte de arhitectură şi sistematizare are scopul de a pune în evidenţă formele şi proporţiile volumelor şi ale detaliilor proiectate. Umbrele contribuie la crearea impresiei de relief a obiectelor reprezentate. Din punctul de vedere al geometriei descriptive, *traseul umbrelor constă în determinarea liniei care separă partea luminată de cea umbrită.*
Sursa de lumină este de două tipuri:
— *lumină artificială* (lumînare, bec etc.); sursa luminoasă este situată la distanţă finită; razele de lumină formează un fascicul de drepte concurente; fenomenul se asimilează cu proiecţia centrală sau conică; este cazul *omologiei* în care centrul de omologie este sursa de lumină, iar axa de omologie este intersecţia dintre planul dreptei de separare între umbră şi lumină şi planul umbrei;
— *lumină naturală* (soare sau lună); sursa luminoasă este situată practic la infinit; razele de lumină formează un fascicul de drepte paralele; fenomenul se asimilează cu proiecţia paralelă sau cilindrică; este cazul *afinităţii* în care razele de lumină sînt paralele cu direcţia de afinitate.
Umbrele sînt de două categorii: umbre proprii şi umbre purtate. *Umbrele proprii* sînt umbrele aflate pe suprafaţa unui corp expus la lumină artificială sau naturală, în timp ce *umbrele purtate* sînt umbrele aruncate sau lăsate de corpul respectiv pe alte suprafeţe sau corpuri din apropierea sa.

UMBRE PROPRII

Linia curbă sau frîntă de pe suprafaţa unui corp expus la lumină care desparte zonele luminate de zonele de umbre proprii se numeşte *separatrice.* Trasarea separatricei în cazul poliedrelor este o operaţie relativ simplă, întrucît separatricea este o linie poligonală alcătuită din muchii ale poliedrului respectiv. O faţă a unui poliedru expus la lumină nu poate fi decît luminată sau în umbră proprie. Astfel, separatricea cubului suspendat din figura 8.3.1 este alcătuită din muchiile care separă feţele luminate (L) de feţele aflate în umbră proprie (U). Asimilînd trasarea umbrelor la soare cu o proiecţie paralelă după direcţia (Δ), se constată că, în proiecţia după direcţia (Δ), separatricea se confundă cu *conturul aparent* al cubului (fig. 8.3.2).
Trasarea separatricei în cazul suprafeţelor curbe este ceva mai complicată, întrucît punctele separatricei sînt puncte de contact ale razelor de lumină tangente la suprafaţă. De exemplu, în cazul unei sfere

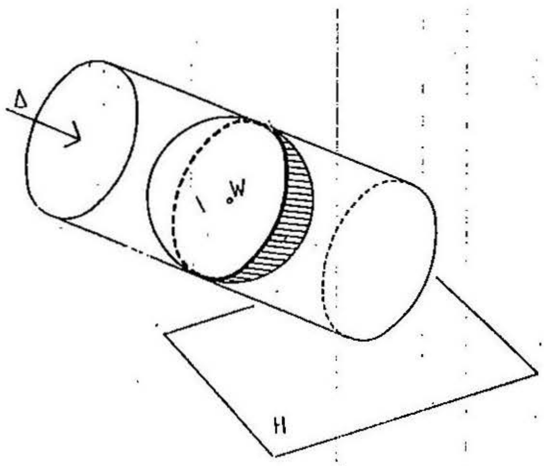


fig. 8.3.3

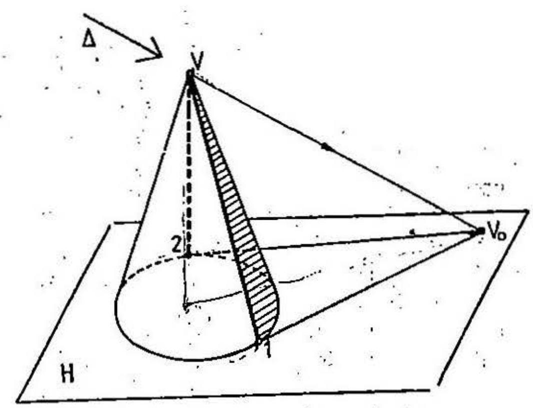


fig. 8.3.5

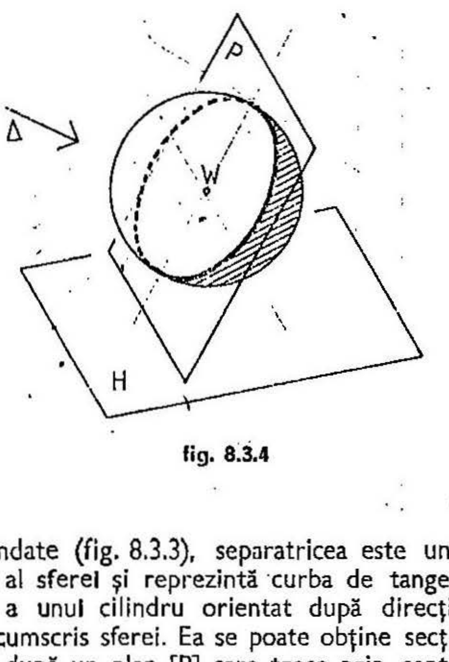


fig. 8.3.4

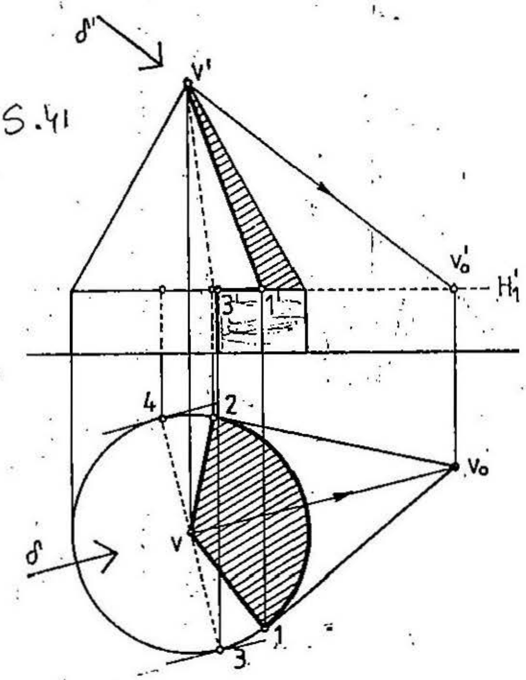


fig. 8.3.6

suspendate (fig. 8.3.3), separatricea este un cerc mare al sferei și reprezintă curba de tangență la sferă a unui cilindru orientat după direcția (Δ) și circumscris sferei. Ea se poate obține secționînd sfera după un plan [P] care trece prin centrul W al sferei și este perpendicular pe direcția (Δ) a razelor de lumină (fig. 8.3.4). Și în acest exemplu se poate verifica că separatricea se confundă cu *conturul aparent* al sferei într-o proiecție paralelă cu direcția (Δ).

Dacă suprafața curbă este mai complicată, construcția separatricei ca loc geometric al punctelor de contact ale tangentelor la suprafață după direcția (Δ) este mult mai dificilă. În unele cazuri, separatricea se poate obține *după construirea umbrei purtate* a volumului respectiv, așa cum se întîmplă cu umbra proprie a conului (fig. 8.3.5). Astfel, umbra purtată pe planul orizontal [H] a vîrfului V al conului este punctul V_0; ducînd din V_0 două tangente la cercul de bază al conului, se obțin punctele **1** și **2**. Dreptele V_0**1** și V_0**2** delimitează *umbra purtată* a conului pe planul orizontal [H], în timp ce generatoarele V_1 și V_2 reprezintă separatricea căutată; ele separă zona de lumină de zona de umbră proprie a conului.

Multe aplicații de umbre care par foarte simple și intuitive sînt înșelătoare. Un asemenea exemplu îl constituie *ruperea umbrei proprii de pe cilindru pe con* (fig. 8.3.6). Punctele **1** și **2** se obțin ca în

exemplul precedent, iar punctele **3** și **4** sînt punctele de contact ale tangentelor la cilindru paralele cu direcția (Δ). Separatricea comună celor două corpuri de rotație se compune deci din patru segmente de dreaptă și două arce de cerc.

Dacă conul este așezat cu vîrful în jos, zona de umbră proprie de pe suprafața sa laterală va fi mai întinsă decît zona luminată (fig. 8.3.7). Construcția separatricei se poate face proiectînd după direcția (Δ) a razelor de lumină cercul de bază al conului pe planul [H] al vîrfului său. Ducînd din V tangente la cercul de proiecție se obțin punctele $\mathbf{1_0}$ și $\mathbf{2_0}$ care se reproiectează pe cercul de bază în punctele **1** și **2**. Dreptele **V1** și **V2** sînt separatricea căutată. În aceste condiții se poate afirma că separatricea volumului din figura 8.3.8, compus dintr-un cilindru și două conuri, nu este tocmai intuitivă.

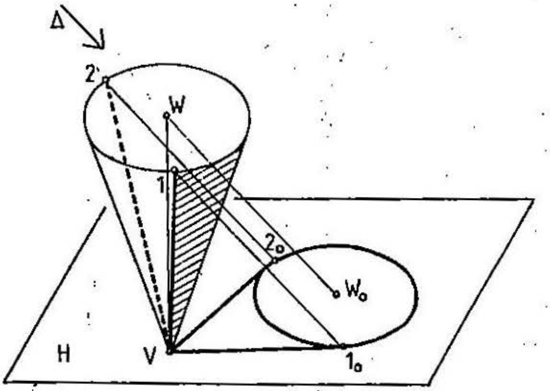


fig. 8.3.7

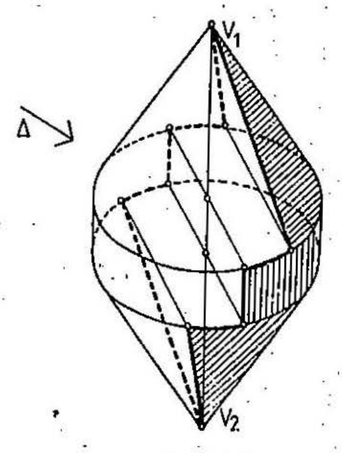


fig. 8.3.8

UMBRE PURTATE

Dacă trasarea separatricei pentru construcția umbrelor proprii este o problemă de *tangență*, trasarea umbrelor purtate este o problemă de *secțiuni plane* sau *intersecții de corpuri*. Astfel, umbra purtată de un volum pe un plan se obține prin secționarea cu acel plan a cilindrului sau conului (în cazul luminii artificiale) de lumină care îmbracă volumul respectiv. *Generatoarele* cilindrului sau conului sînt razele de lumină care pornesc din sursa luminoasă, iar *directoarea* cilindrului sau conului o constituie însăși separatricea, care poate fi oricît de complicată.

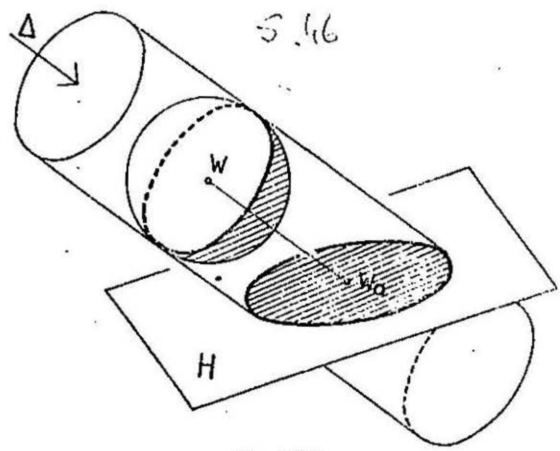


fig. 8.3.9

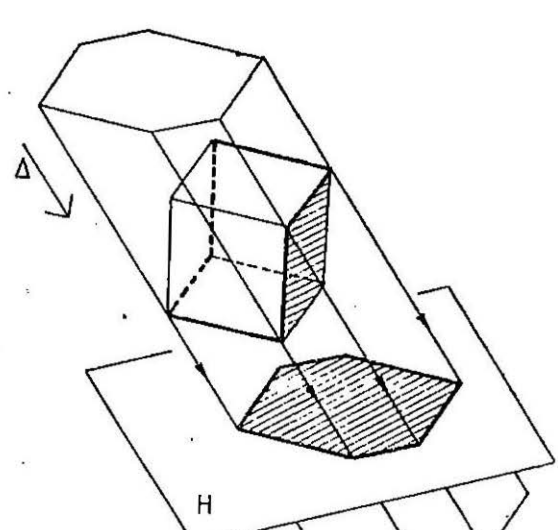


fig. 8.3.10

În cazul umbrei purtate pe un plan [H] de o sferă, după o direcţie (Δ) oblică faţă de planul [H], umbra va fi o elipsă al cărei centru W_0 este proiecţia după direcţia (Δ) a centrului sferei pe planul [H]. Elipsa se obţine secţionînd cu planul [H] cilindrul de lumină circumscris sferei (fig. 8.3.9). Dacă separatricea este o linie poligonală, ca în cazul cubului suspendat (un hexagon strîmb în spaţiu), umbra purtată pe un plan [H] se obţine secţionînd cu planul [H] prisma de lumină dusă prin separatrice (fig. 8.3.10). Umbra purtată este un hexagon cu laturile două cîte două paralele.

TRASAREA UMBRELOR ÎN AXONOMETRIE

În figurile precedente, construcţia umbrelor a fost exemplificată în schiţe axonometrice aproximative, iar direcţia razelor de lumină a fost reprezentată de un singur segment de dreaptă — direcţia (Δ). Pentru construcţia riguroasă a umbrelor în axonometrie se alege o direcţie de lumină (Δ) în spaţiu şi proiecţia sa (δ) pe planul orizontal (fig. 8.3.11). *Dreptele verticale* aruncă pe planul orizontal umbre dirijate după direcţia (δ). Aceste umbre se frîng eventual pe planele verticale sau oarecare pe care le întîlnesc. Pentru celelalte tipuri de drepte se construiesc umbrele lor printr-un număr suficient de puncte de umbră.

Construcţia umbrelor la o sursă punctuală de lumină artificială. Sursa de lumină fiind la distanţă finită, ea apare în axonometrie şi se notează **(L, l)**. Umbra punctului este chiar urma pe planul orizontal a razei de lumină ce trece prin punct (fig. 8.3.12).

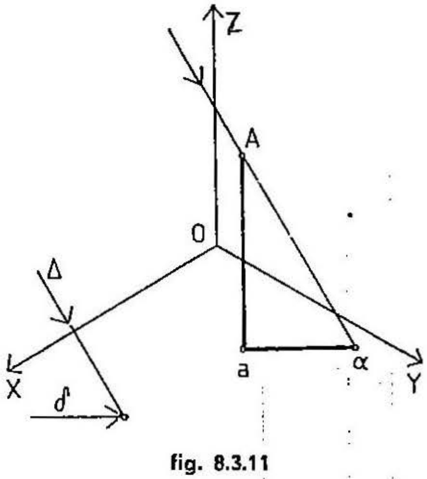


fig. 8.3.11

Construcţia umbrei la lumină artificială aruncată de o piramidă dreaptă pe planul orizontal [XOY] şi pe planul vertical [ZOY] este ilustrată în figura 8.3.13. Intersecţia razei de lumină ce trece prin L cu planul lateral [ZOY] se face folosind ca plan auxiliar planul proiectant al razei de lumină. Umbra purtată se frînge pe planul lateral de proiecţie [ZOY].

Construcţia umbrei la lumină artificială purtate pe planul orizontal de proiecţie de către un cub este ilustrată în figura 8.3.14. Umbra purtată se obţine unind în planul orizontal umbrele punctelor **B, C** şi **E.** Observînd figura, se observă că umbrele pe un plan oarecare ale unor drepte paralele cu acel plan sînt paralele cu dreptele respective. Astfel, segmentul de umbră βγ este paralel cu BC.

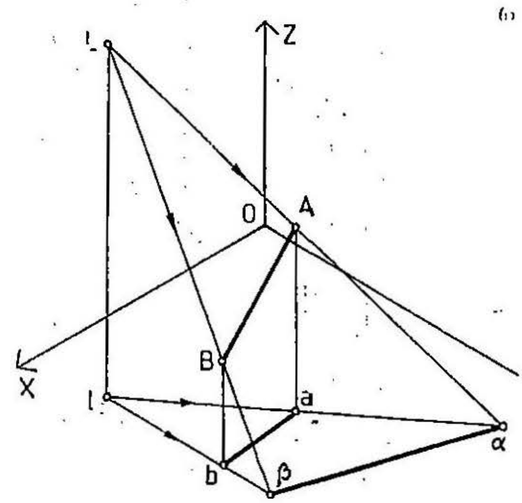


fig. 8.3.12

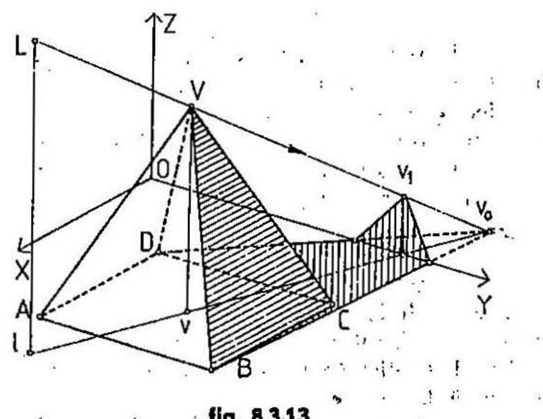


fig. 8.3.13

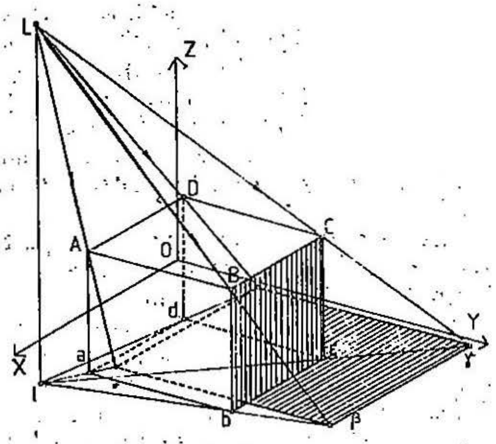


fig. 8.3.14

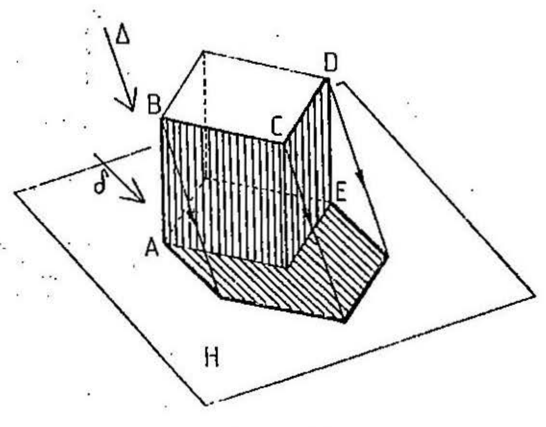


fig. 8.3.16

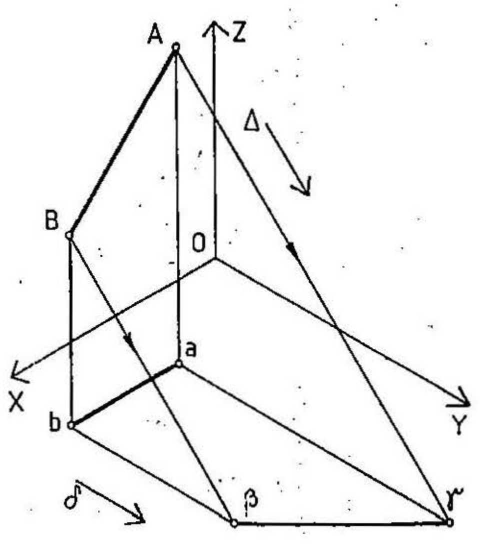


fig. 8.3.15

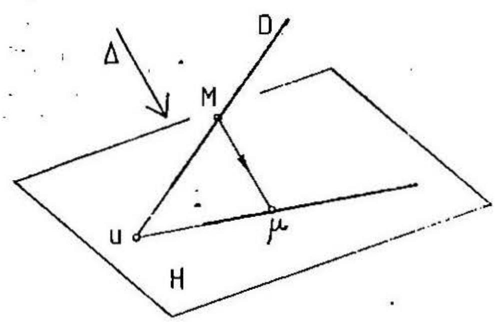


fig. 8.3.17

Umbrele la soare în axonometrie. Sursa de lumină fiind la infinit, există o direcție de lumină (Δ) și proiecția ei (δ). În figura 8.3.15 sînt reprezentate umbra punctului și a dreptei.

În cazul unor corpuri geometrice așezate pe planul orizontal de proiecție, trebuie mai întîi pusă în evidență separatricea, întrucît *separatricea este cea care aruncă conturul umbrei purtate* pe planul orizontal. Pentru cubul din figura 8.3.16, separatricea este linia poligonală ABCDE, iar umbra purtată pe planul orizontal de proiecție rezultă imediat. Identificarea separatricei nu mai este așa de simplă la volume compuse, care lasă umbre purtate unele pe celelalte și pe mai multe plane.

Regulile de bază în construcția în axonometrie a umbrelor purtate ale volumelor prismatice sînt:
— umbra unui punct pe un plan se obține intersectînd planul cu raza de lumină ce trece prin punctul respectiv; se folosește ca plan auxiliar planul proiectant al razei;
— dacă un segment de dreaptă este paralel cu un plan, umbra sa pe acel plan este paralelă și egală cu segmentul de dreaptă respectiv;
— dacă o dreaptă nu este paralelă cu un plan, se poate obține un punct de umbră pe acel plan prelungind dreapta pînă cînd intersectează planul dat; acest punct se numește *originea umbrei dreptei pe plan* (fig. 8.3.17); pentru a obține umbra dreptei este suficientă umbra încă a unui punct al dreptei (în cazul ales, punctul M).

Pentru a construi umbrele purtate ale volumelor din figura 8.3.18, se evidențiază suprafețele aflate în umbră proprie și se construiește separatricea. Umbra verticalei AB pe planul orizontal de proiecție [H] este Ab. Segmentul BC, fiind orizontal,

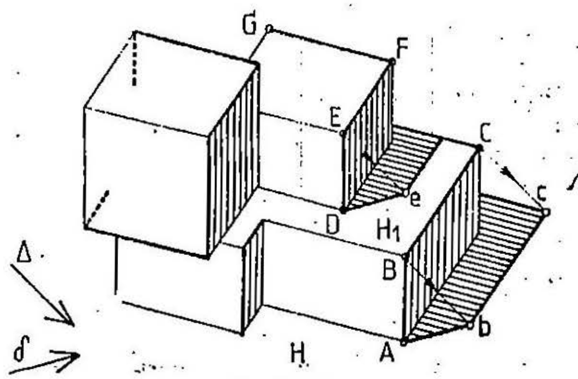


fig. 8.3.18

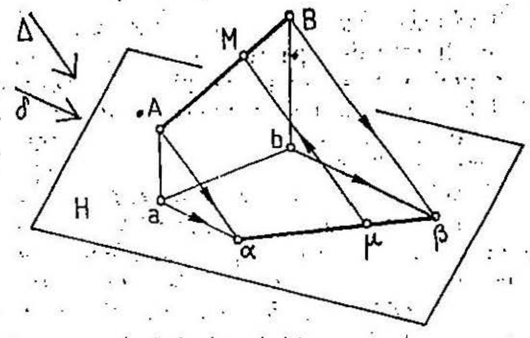


fig. 8.3.20

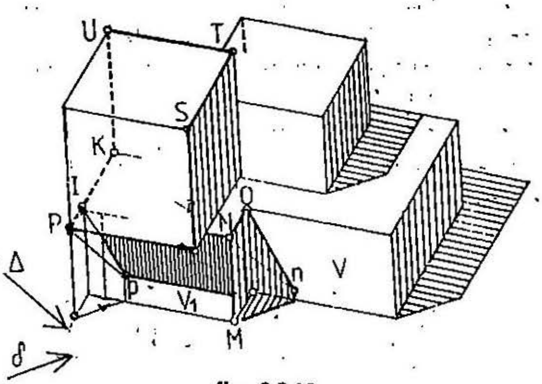


fig. 8.3.19

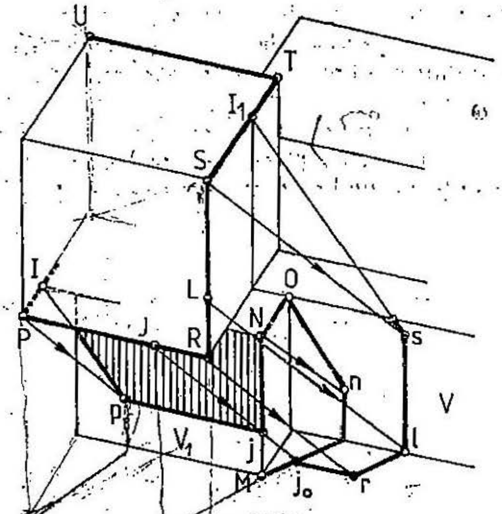


fig. 8.3.21

va lăsa pe planul orizontal de proiecție o umbră paralelă și egală cu el (segmentul bc). În mod similar se construiește umbra purtată pe planul orizontal $[H_1]$ de segmentele DE și EF. Segmentul GF lasă umbră pe planul [H] într-o zonă invizibilă în axonometria aleasă.

Umbra verticalei MN se obține intersectînd raza de lumină dusă prin punctul N cu planul vertical [V]. Se obține punctul n (fig. 8.3.19). Segmentul NO are ca origine a umbrei pe planul [V] chiar punctul O; umbra lui va fi deci On. Pentru construcția umbrei punctului P se construiește întîi proiecția acestuia pe planul orizontal de proiecție. Umbra lui P pe planul $[V_1]$ este p. Umbra muchiei PK pe planul $[V_1]$ are ca origine punctul I de intersecție a muchiei cu planul. Umbra ei se obține unind I cu p. Muchia PR fiind paralelă cu planul $[V_1]$, umbra ei pe $[V_1]$ va fi paralelă și egală. Se observă însă că punctul R nu lasă umbră pe planul $[V_1]$. Pentru a lămuri mai bine lucrurile, se folosește o metodă de analiză mai detaliată a umbrelor volumelor compuse: *metoda razelor inverse*. Dacă se consideră o dreaptă sau o curbă oarecare în spațiu care lasă o umbră determinată pe un plan, există o corespondență biunivocă între punctele dreptei (curbei) și punctele umbrei purtate (fig. 8.3.20). De aceea, pentru orice punct de pe conturul unei umbre purtate, se poate determina punctul de pe separatrice care lasă umbra respectivă, ducînd o *rază inversă*. De exemplu, umbra în μ este purtată de punctul M de pe segmentul AB.

Cu ajutorul metodei razelor inverse se pot verifica foarte exact segmentele care lasă umbră pe diverse suprafețe și se pot rezolva ușor umbrele care „sar" de pe un plan pe alt plan. Continuînd traseul umbrelor în exemplul ales, se duce o rază inversă din punctul J și se obține punctul j (fig. 8.3.21). Segmentul PJ lasă umbra pe planul $[V_1]$, dar nu știm încă unde lasă umbra segmentul JR. Se observă că umbra punctului J cade în j pe muchia MN și apoi „sare" pe planul orizontal de proiecție în punctul j_0. Segmentul JR fiind orizontal, va lăsa umbra j_0r paralelă și egală cu el.

În continuare umbra este lăsată de muchia verticala RS, care aruncă o umbră orientată după direcția (δ). Umbra se rupe în l, după care continuă pe planul vertical [V] cu un segment vertical ls.

Dacă se duce raza inversă IL, se obţine punctul L. Umbra ls este deci purtată de LS. În continuarea lui s, umbra este purtată pe planul [V] de muchia ST. Direcţia umbrei se obţine uşor utilizînd punctul l_1 de origine a umbrei lui ST pe planul [V]. Este momentul să se facă o corecţie separatricei iniţial definite. Se observă că segmentele jN şi NO nu funcţionează ca separatrice, iar umbra lăsată de ele (segmentele j_0n şi nO) este înglobată în umbra cubului. Cu cît volumele sînt mai complicate, cu atît corecţiile pe parcurs sînt mai numeroase. Punctul j_0 se numeşte *punct de pierdere de speţa I* şi este definit ca punct în care două linii de umbră purtată se intersectează pe aceeaşi suprafaţă (în acest caz, planul orizontal de proiecţie). *Punctele de pierdere de speţa II* sînt punctele de intersecţie dintre o linie de umbră purtată şi o linie de umbră proprie.

Construcţia umbrei se încheie în figura 8.3.22. Muchia ST lasă pe planele orizontale $[H_1]$ şi $[H_2]$ segmente de umbră paralele cu ea, iar pe planul vertical $[V_2]$ lasă o umbră înclinată cu originea în punctul T. În sfîrşit, muchia TU poartă pe planul $[H_2]$ o umbră paralelă cu ea.

Figurile 8.3.23 şi 8.3.24 ilustrează traseul umbrelor în alte două exemple de volume compuse, iar figura 8.3.25 prezintă construcţia umbrei purtate a unui parapet pe trepte.

În general, pentru construcţia umbrelor scărilor, se stabileşte mai întîi unde cade umbra punctului A. Apoi se construieşte umbra treaptă cu treaptă. Intersectînd planul vertical al contratreptei cu planul vertical al parapetului rezultă punctul de origine a umbrei, şi direcţia umbrei pe contratreaptă. Dacă parapetul este înclinat şi urmează panta scării (fig. 8.3.26), umbrele lăsate de el pe trepte (respectiv contratrepte) vor fi paralele şi egal depărtate de parapet. În acest caz, în care construcţia se repetă de mai multe ori, se pot folosi punctele de origine a umbrei (l_1, l_2 şi l_3) şi razele inverse.

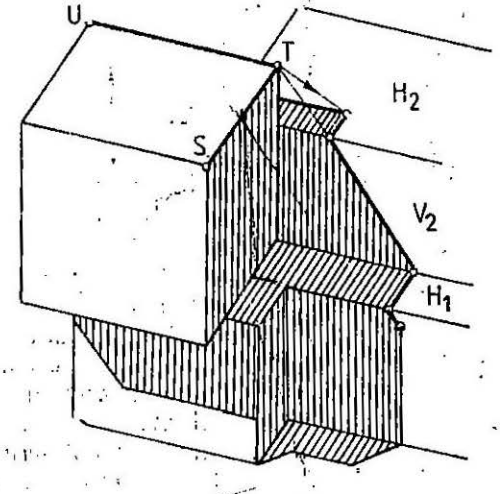


fig. 8.3.22

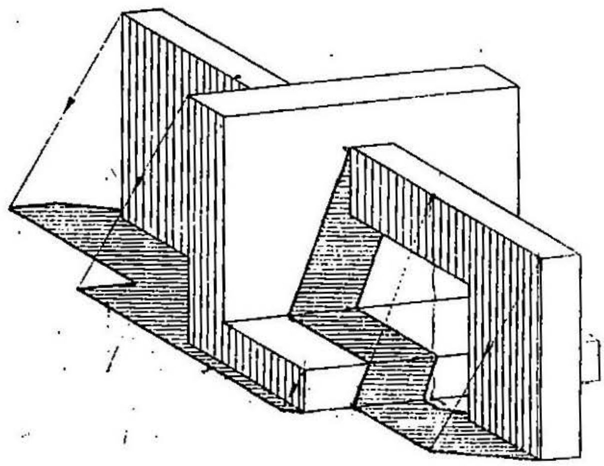


fig. 8.3.23

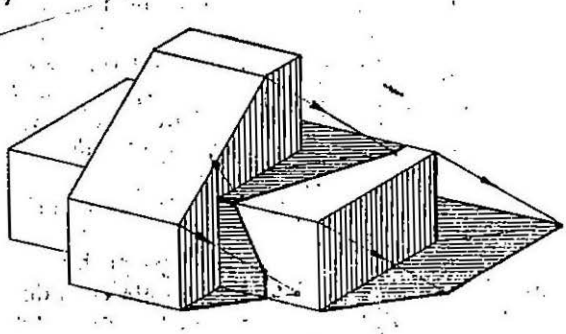


fig. 8.3.24

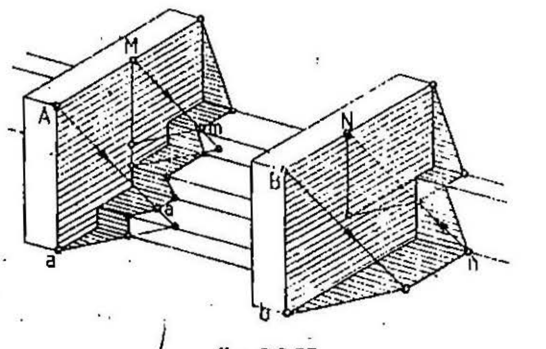


fig. 8.3.25

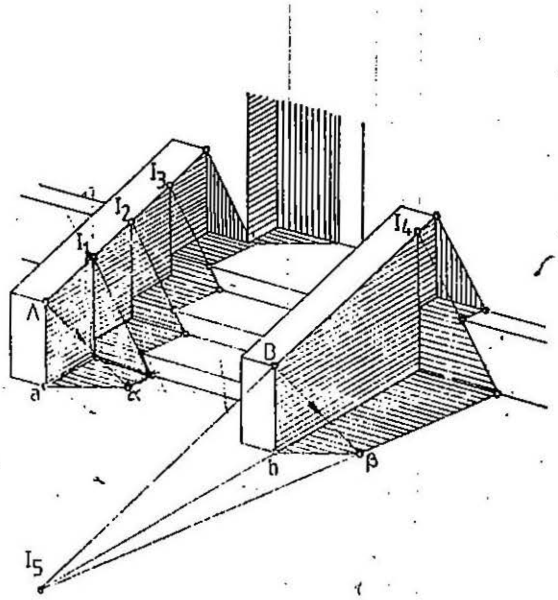


fig. 8.3.26

Figurile 8.3.27 şi 8.3.28 ilustrează construcţia umbrei purtate de un capitel pe o coloană, iar figura 8.3.29 reprezintă traseul umbrei unei case cu acoperiş în patru ape.

Umbra sferei în axonometrie izometrică. Pentru a construi o sferă în axonometrie izometrică se construieşte întîi ecuatorul ei care apare ca o elipsă (fig. 8.3.30). Construcţia elipsei se face prin înscriere în pătrat. Mijloacele laturilor pătratului (punctele **1**, **2**, **3** şi **4**) sînt puncte ale elipsei. Punctele de pe diagonale se construiesc obţinînd mai întîi punctul **5** care împarte segmentul **AO** în raportul $\sqrt{2}$. Raza sferei are lungimea $\overline{O5}$.
Se consideră sfera aşezată pe planul orizontal de proiecţie [H]. Se obţine punctul **S** de sprijin pe planul [H], construind unul din cercurile meridiane ale sferei (fig. 8.3.31). Mijloacele laturilor superioară şi inferioară ale pătratului în care este înscris cercul meridian sînt chiar polul nord şi polul sud al sferei.

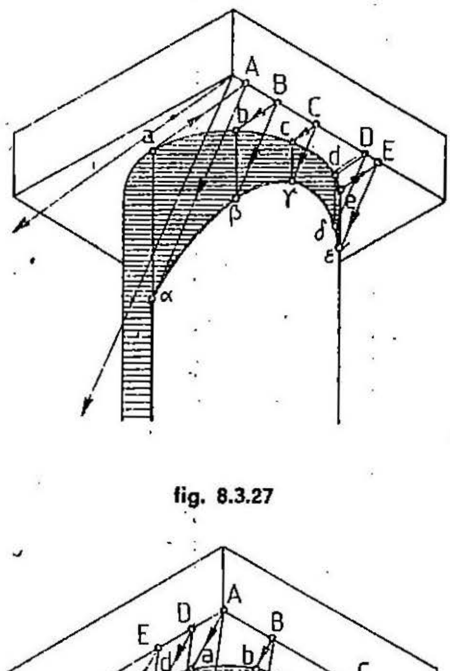


fig. 8.3.27

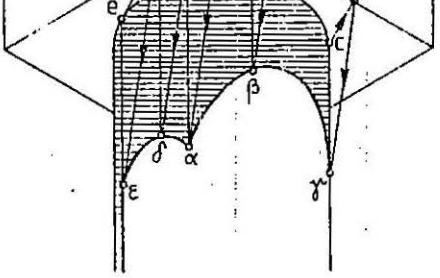


fig. 8.3.28

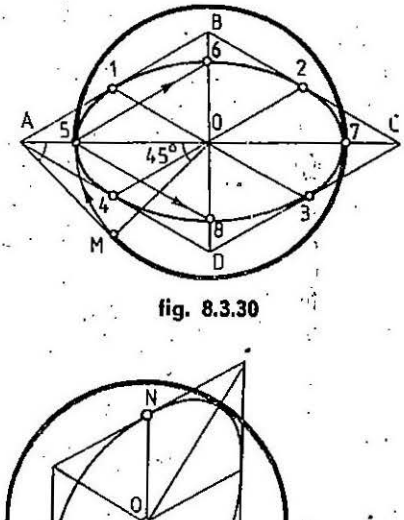


fig. 8.3.30

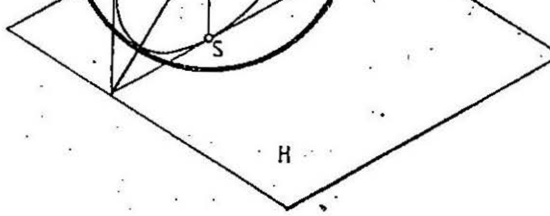


fig. 8.3.31

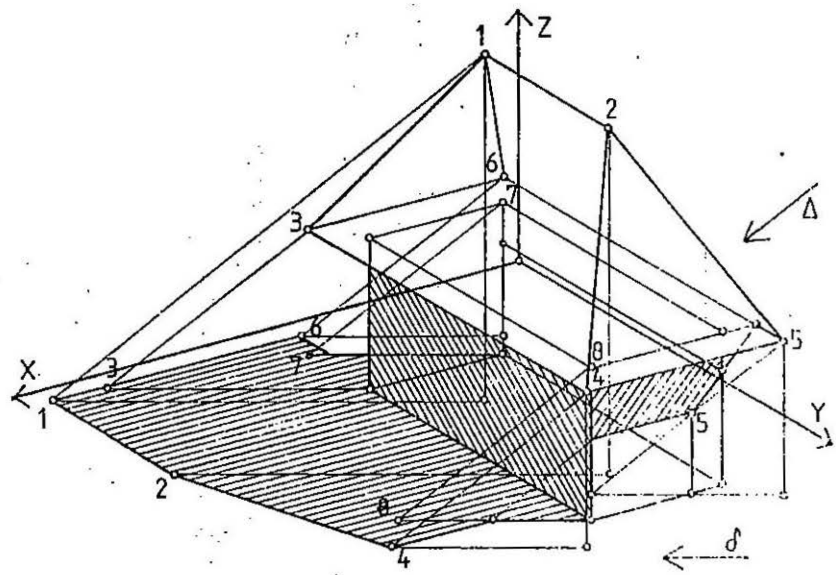


fig. 8.3.29

Dacă se alege o direcţie de umbră în axonometrie (Δ, δ) traseul umbrei proprii se obţine imediat (fig. 8.3.32). Cercul mare al sferei care delimitează umbra proprie este perpendicular pe raza de lumină ce trece prin centrul sferei. Pentru construcţia umbrei purtate se proiectează centrul O al sferei după direcţia de umbră (Δ, δ) şi se obţine în [H] centrul O_0 al elipsei de umbră. Umbrele 1_0, 2_0, 3_0 şi 4_0 lăsate de punctele **1, 2, 3** şi **4** ale cercului de umbră proprie se obţin în mod asemănător. Elipsa de umbră purtată se construieşte cu ajutorul acestor patru puncte sau prin opt puncte, pentru a obţine o construcţie mai exactă. Se observă că în exemplul ales, direcţia de umbră (Δ,δ) are o poziţie particulară. În cazul general

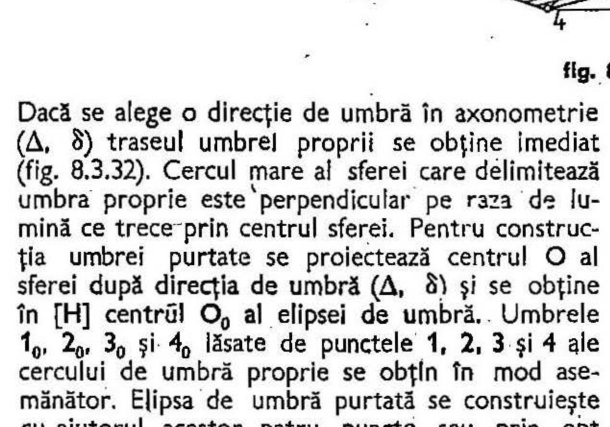


fig. 8.3.32

al unei direcţii de umbră oarecare, se intersectează mai întîi sfera cu raza de lumină dusă prin centrul ei, iar apoi se secţionează sfera după planul perpendicular pe această rază, obţinîndu-se cercul de umbră proprie.

Figura 8.3.33 ilustrează traseul în axonometrie al umbrelor unor volume astfel compuse încît să cuprindă cîteva din exerciţiile precedente.

UMBRELE VOLUMELOR DE ARHITECTURĂ ÎN DUBLĂ PROIECŢIE ORTOGONALĂ

În dublă proiecţie ortogonală, direcţia de lumină se alege în mod *convenţional* la 45°, atît în proiecţie verticală, cît şi în proiecţie orizontală (fig. 8.3.34). Direcţia de lumină este deci *diagonala interioară a unui cub* care are feţele confundate cu cele trei plane de proiecţie. Unghiul pe care îl face diagonala cubului cu feţele sale este, în spaţiu, de 35°16′ (fig. 8.3.35). Direcţia umbrelor convenţionale la 45° este aceeaşi cu direcţia axonometriei izometrice.

Umbrele trasate la 45° reproduc în unele cazuri forma şi dimensiunile volumelor proiectate şi redau adîncimile diferitelor plane frontale. Traseul umbrelor la 45° face posibilă construcţia umbrei direct pe o faţadă (fără utilizarea planului) sau direct în plan (folosind numai cotele).

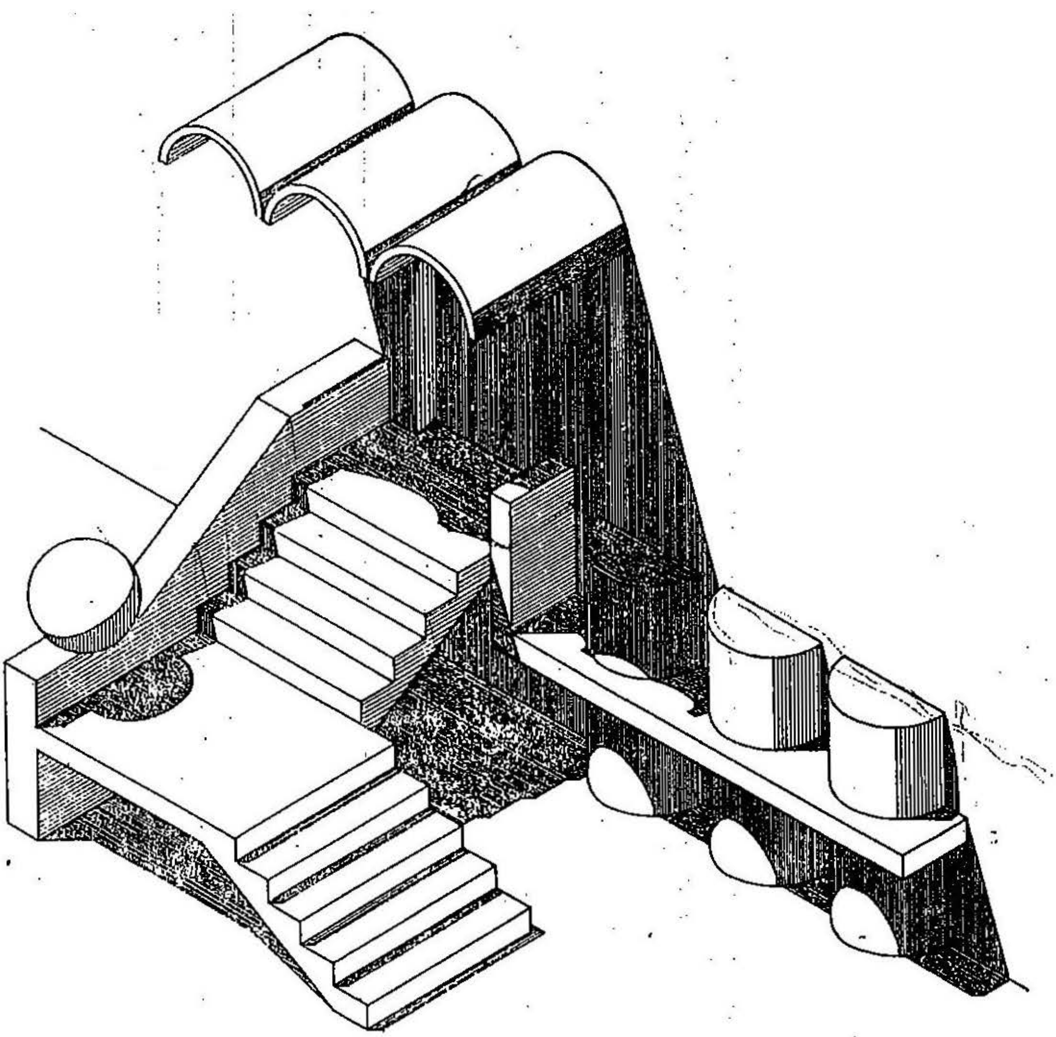


fig. 8.3.33

Umbra punctului și a dreptei. Dreptele (δ) și (δ') sînt proiecțiile direcției razelor de lumină (fig. 8.3.36). Paralelele la această direcție duse prin extremitățile segmentului au urmele orizontale în α și β (umbrele extremităților segmentului). Umbra segmentului de dreaptă pe planul orizontal este $\alpha\beta$. Întrucît planul vertical este opac, această umbră se frînge în k pe axa OX și va trece prin urma verticală β'. Umbra segmentului de dreaptă pe cele două plane de proiecție este deci linia frîntă $\alpha k \beta'$.

Umbra unui segment AB pe un plan oarecare PP' se află intersectînd paralelele la direcția razelor de lumină (duse prin A și B) cu planul dat PP' (fig. 8.3.37). Dacă nu ar exista planul PP', umbra segmentului pe planul vertical ar fi $\alpha'\beta'$. Dar umbra segmentului AB se frînge în r'.

Umbra unei drepte perpendiculare pe unul din planele de proiecție se trasează după direcția la 45°. Această proprietate permite enunțarea următoarelor *două reguli suplimentare* în trasarea umbrelor convenționale la 45°:

— umbra unei *drepte de capăt* pe orice profil (succesiune de suprafețe plane sau curbe) apare în *proiecția verticală* ca o dreaptă înclinată la 45°; această proprietate se poate verifica în figurile 8.3.38 și 8.3.39;

— umbra unei *drepte verticale* pe orice profil apare în *proiecția orizontală* ca o dreaptă înclinată la 45°; această proprietate se poate verifica în figurile 8.3.40 și 8.3.41.

Aceste două reguli, adăugate celor trei reguli de bază enunțate în subcapitolul referitor la traseul umbrelor în axonometrie, permit rezolvarea tra-

sării umbrelor convenţionale la 45° în proiecţie dublu ortogonală.

Construcţia umbrelor proprii şi purtate ale unei *piramide triunghiulare* este ilustrată în figura 8.3.42. Dacă nu ar fi planul vertical de proiecţie, umbra purtată pe planul orizontal ar ajunge pînă în punctul v_1.

Construcţia umbrei cercului este ilustrată în trei figuri. În figura 8.3.43 este construită umbra unui cerc de nivel care apare de fapt ca intersecţia unui cilindru oblic cu planele de proiecţie; în figura 8.3.44, pentru construirea umbrei unui cerc frontal, se pun în evidenţă cele două diametre conjugate şi în figura 8.3.45 este construită umbra unui cerc de profil.

Umbra unui arc vertical este de fapt o intersecţie de două umbre purtate (fig. 8.3.46):

— umbra lăsată de semicercul mare cu centrul în ω_2;

— umbra lăsată de semicercul mic cu centrul în ω_1;

— umbra segmentului de capăt mn (separatrice), care este locul unde razele de lumină sînt tangente la cerc.

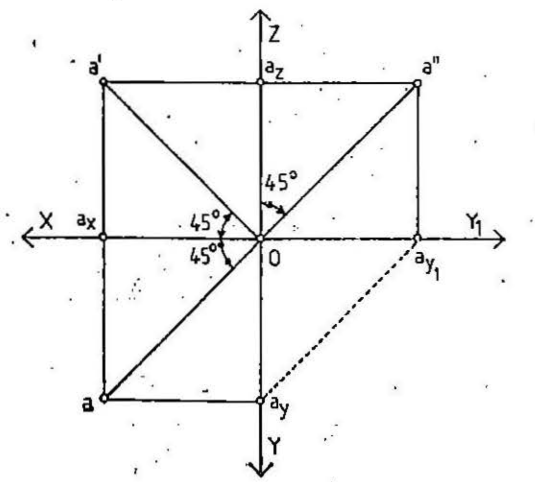


fig. 8.3.34

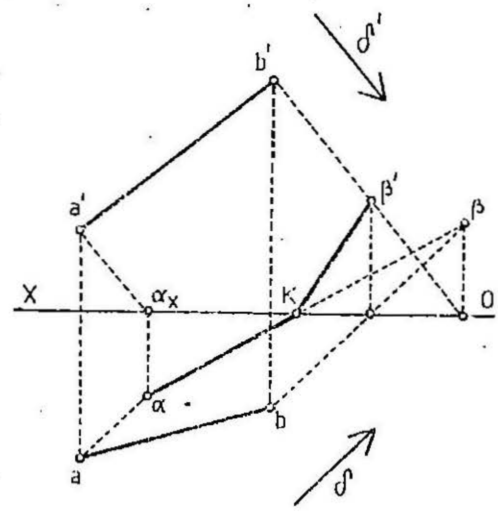


fig. 8.3.36

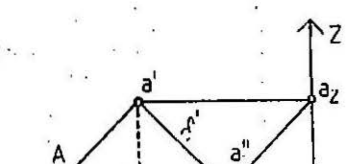


fig. 8.3.35

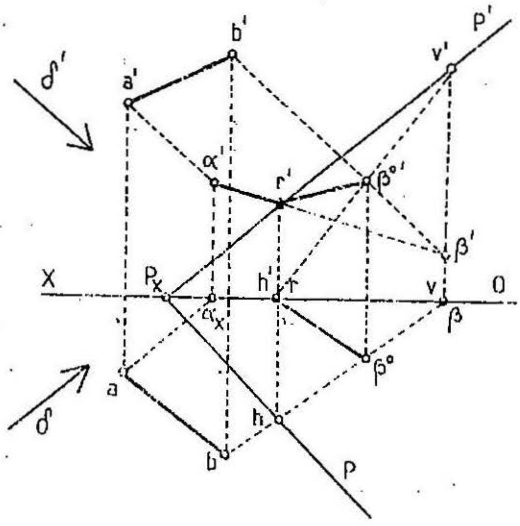


fig. 8.3.37

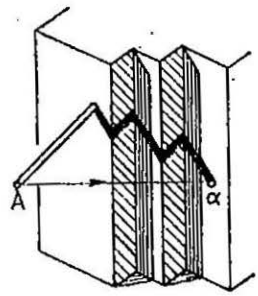


fig. 8.3.38

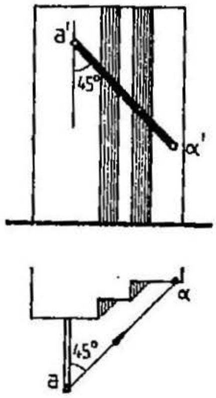


fig. 8.3.39

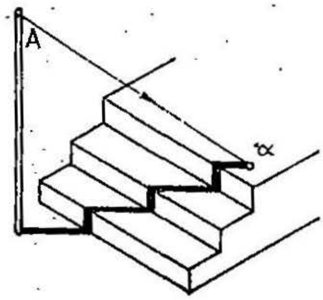


fig. 8.3.40

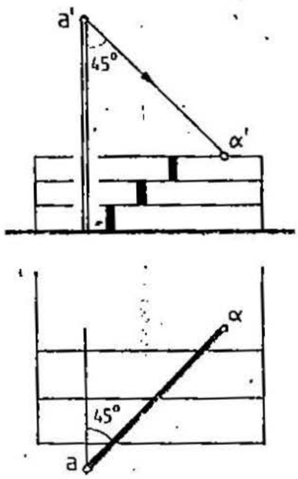


fig. 8.3.41

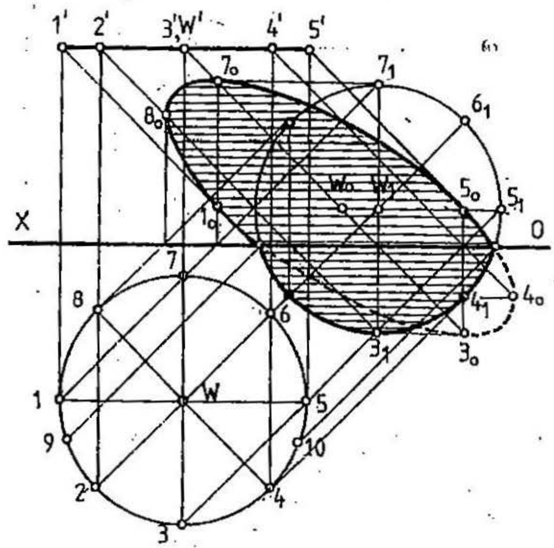


fig. 8.3.43

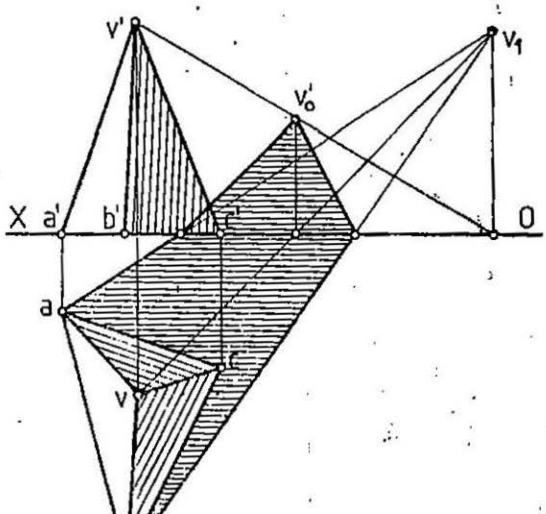


fig. 8.3.42

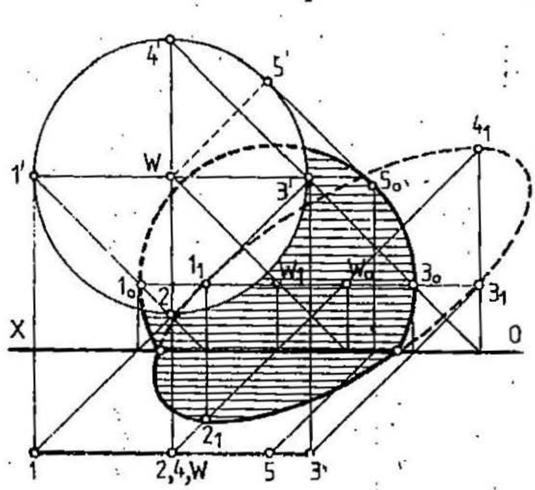


fig. 8.3.44

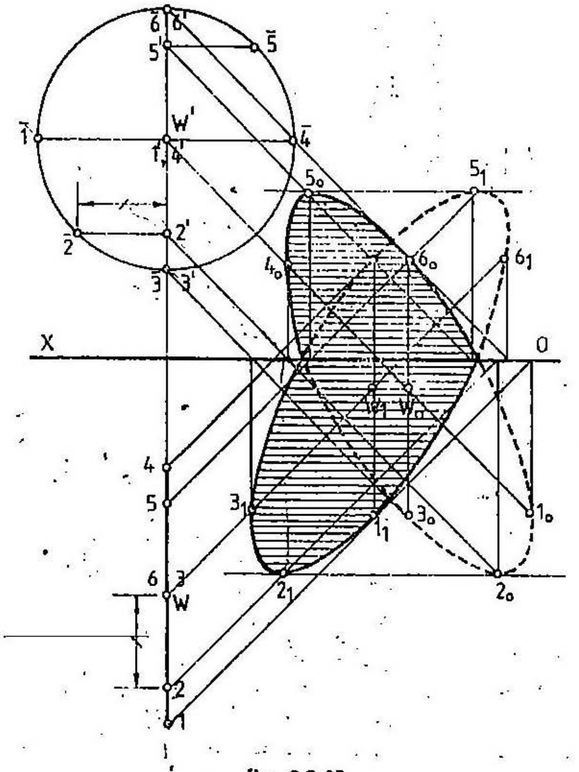


fig. 8.3.45

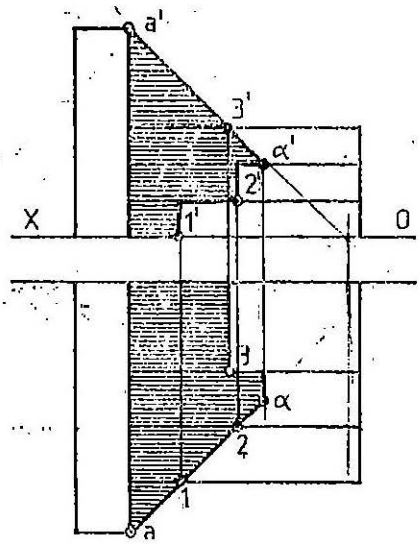


fig. 8.3.47

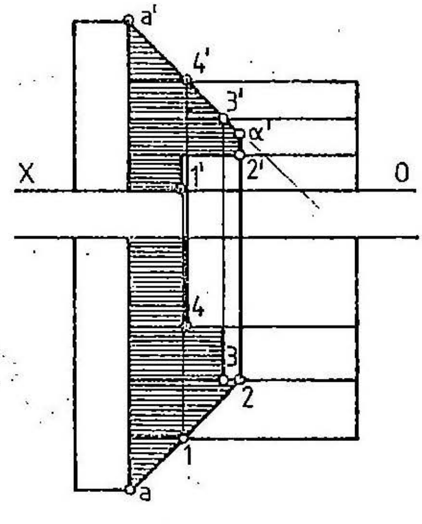


fig. 8.3.48

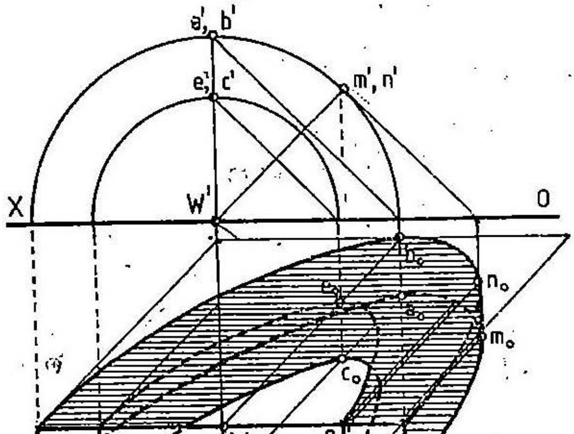


fig. 8.3.46

Trasarea umbrelor convenționale ale scărilor. Se vor analiza două tipuri de scări:

a) *cu parapet de capăt;* apar două situații — cînd umbra punctului A(a, a') cade pe treaptă (fig. 8.3.47) sau pe contratreaptă (fig. 8.3.48). Umbrele scărilor se construiesc treaptă cu treaptă, făcînd mereu corespondența plan-vedere. Verticala are ca umbră pe trepte o linie continuă la 45°, indiferent de cota lor. Dreapta de capăt lasă pe contratrepte o umbră sub forma unei drepte continue înclinate la 45°, indiferent de profunzimea lor. Umbra unei intrări cu copertină și scară este ilustrată în figura 8.3.49.

b) *cu parapet oblic* (de profil); pentru determinarea umbrei pe contratrepte, se folosește *metoda razelor inverse* în proiecția laterală (fig. 8.3.50).

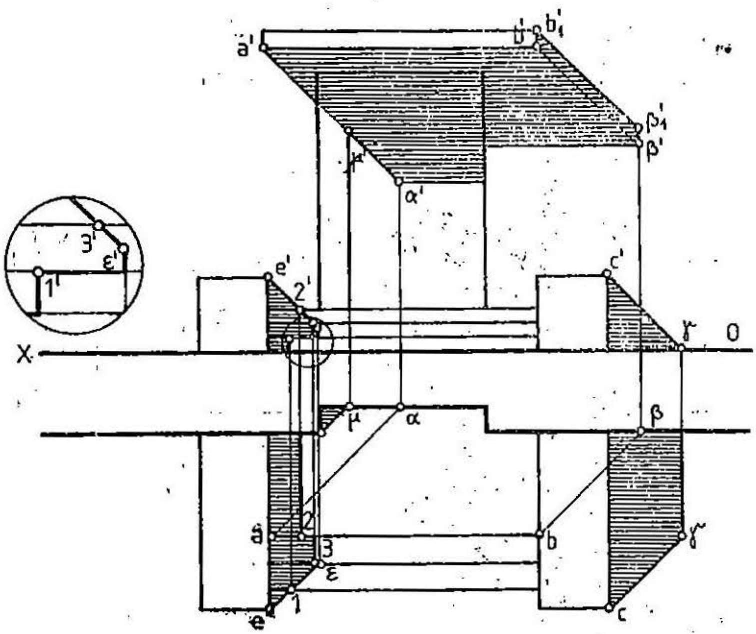


fig. 8.3.49

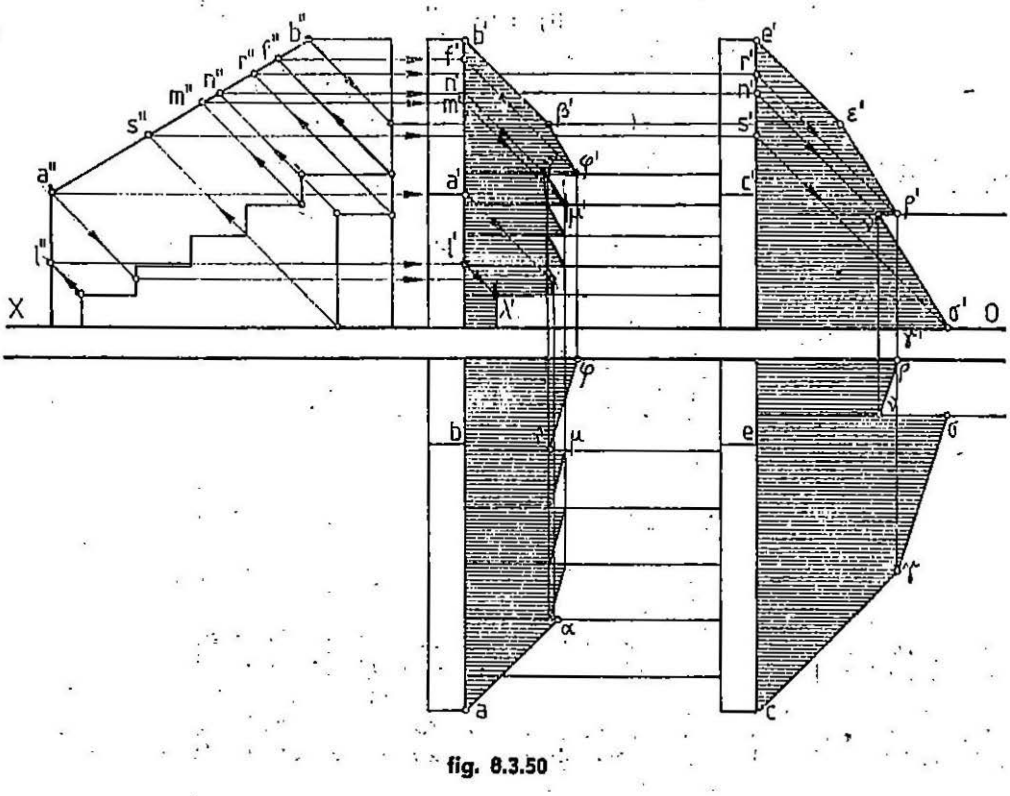


fig. 8.3.50

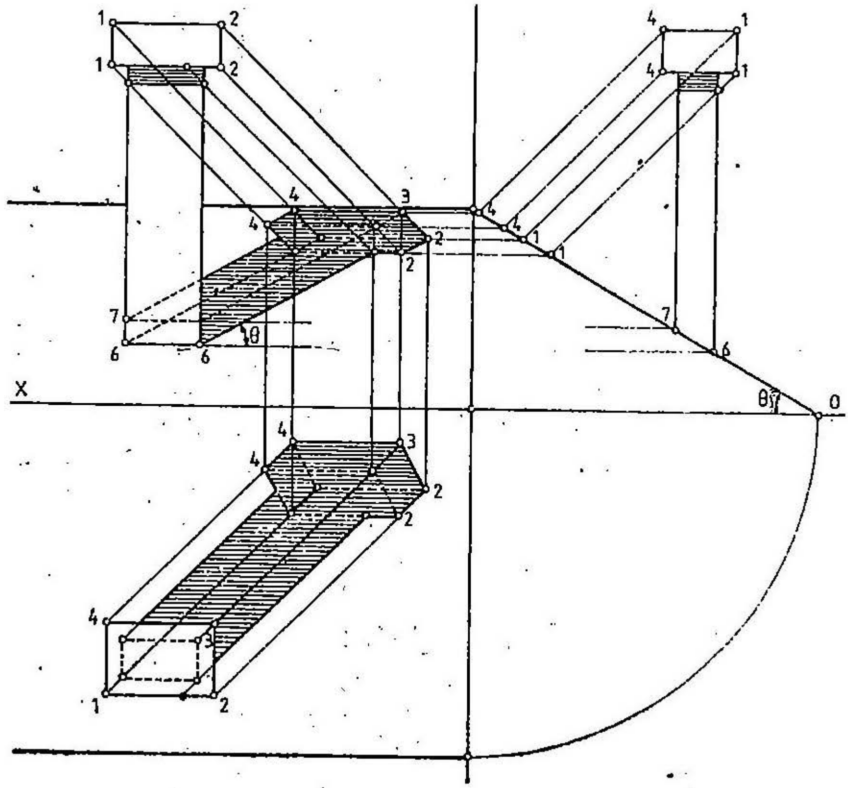


fig. 8.3.51

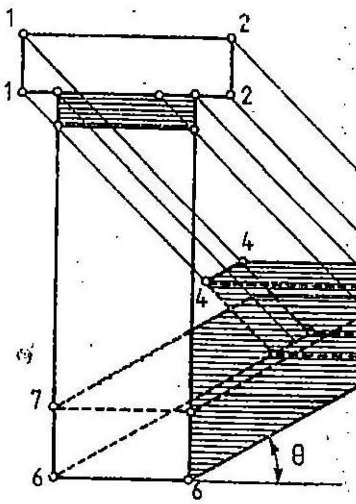


fig. 8.3.52

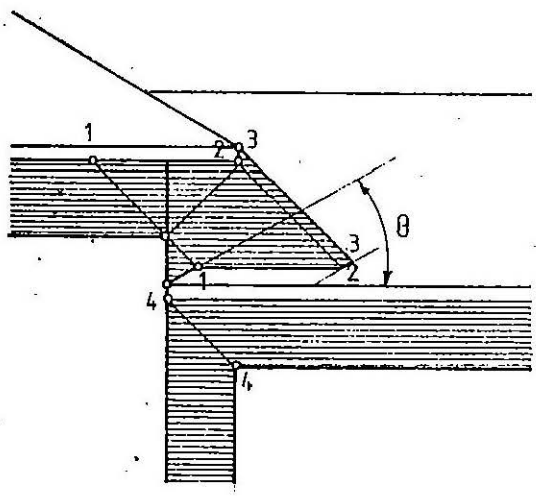


fig. 8.3.53

Umbrele pe acoperiș. Se vor analiza umbra coșului, umbrele acoperișurilor denivelate și umbrele lucarnelor.

a) *Umbra coșului.* În exemplul din figura 8.3.51 s-a utilizat proiecția laterală. Se observă că verticalele aruncă, în proiecția verticală, umbre înclinate sub același unghi θ, care este de fapt panta acoperișului. Acest lucru face posibilă construcția umbrei în proiecție verticală, fără a utiliza proiecția orizontală sau cea laterală, folosindu-ne de unghiul θ

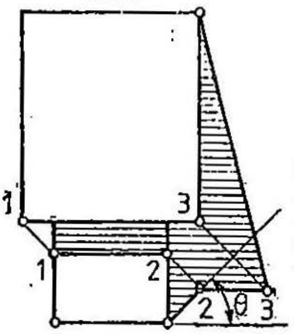


fig. 8.3.54

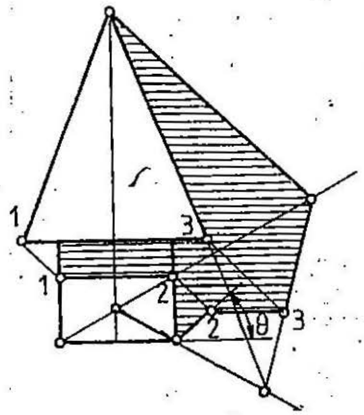


fig. 8.3.55

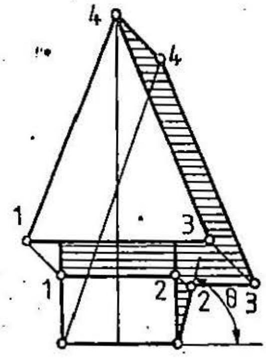


fig. 8.3.56

(panta acoperişului). Construcţia începe din punctul 6 (fig. 8.3.52).

b) *Umbrele acoperişurilor denivelate* se construiesc cunoscînd profunzimea faţadei în raport cu cornişa — punctele **1** şi **4** (fig. 8.3.53).

c) *Umbrele lucarnelor* se construiesc cu ajutorul unghiului θ (panta acoperişului). Construcţia începe din punctele **1** şi **2** (fig. 8.3.54...8.3.56).

Umbrele pe coloană sînt analizate în trei situaţii:

— *abaca cu muchii de capăt* (fig. 8.3.57), în care, se observă că muchia de capăt lasă pe coloană o umbră înclinată la 45° — β'α'. Punctul ε' este punct de pierdere de speţa II;

— *umbra abacei pe plan vertical* (fig. 8.3.58);

— *abaca rotită cu 45°* (fig. 8.3.59), la care s-a folosit metoda razelor inverse.

Figura 8.3.60 ilustrează construcţia *umbrei balconului* pe o faţadă, iar figura 8.3.61 reprezintă *umbrele arcadelor frontale*. Se intersectează umbrele semicercurilor de centre **1** şi **2**. Se poate construi direct cu compasul trasînd umbrele **1** şi **2** ale centrelor. Figura 8.3.62 ilustrează umbrele unor nişe sferice. Într-un exemplu mai complex (fig. 8.3.63) sînt ilustrate umbrele convenţionale în proiecţie dublu ortogonală ale volumelor reprezentate în axonometria din figura 8.3.33.

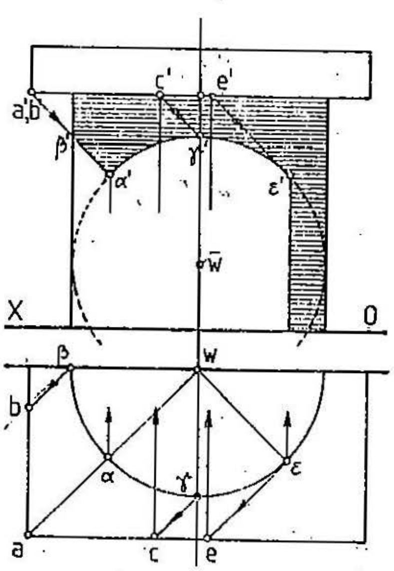


fig. 8.3.57

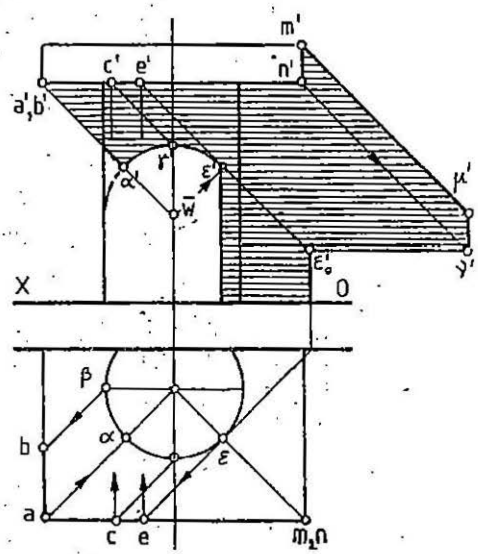


fig. 8.3.58

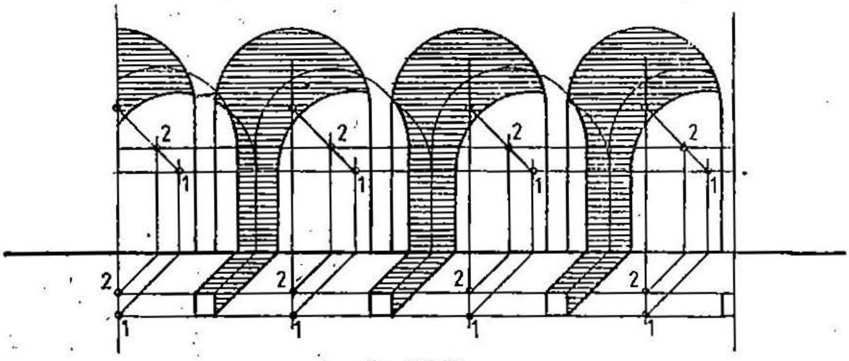


fig. 8.3.61

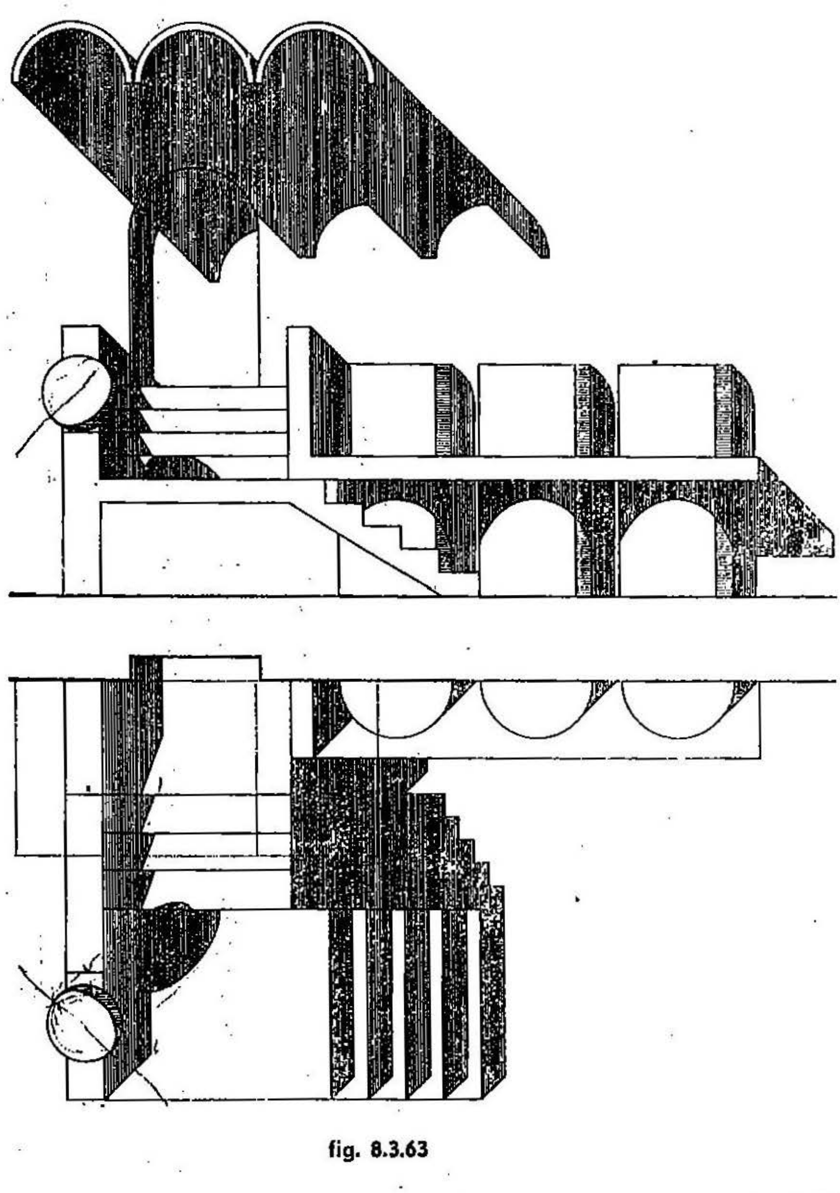


fig. 8.3.63

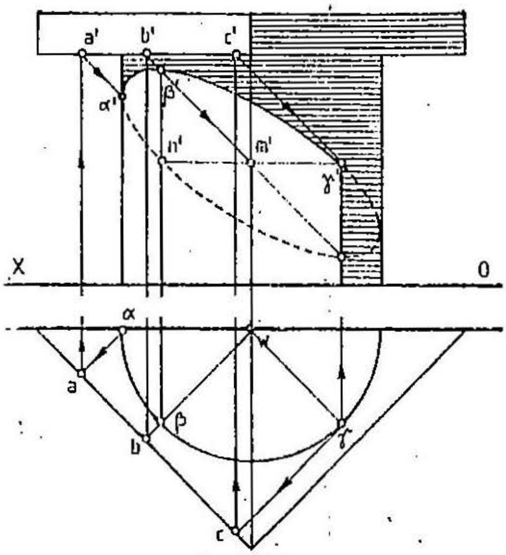


fig. 8.3.59

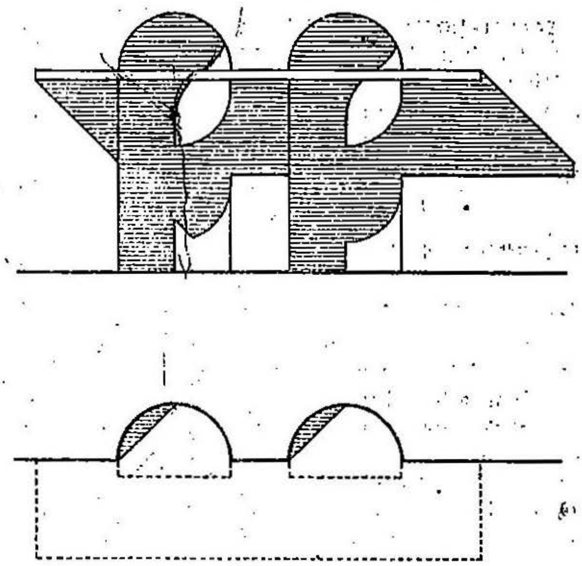


fig. 8.3.62

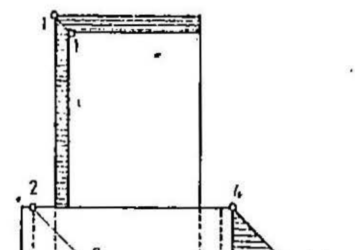


fig. 8.3.60

8.4. GEOMETRIE ȘI COMPOZIȚIE

CONCEPTUL DE PROPORȚIE

Teoreticienii de arhitectură și artă sînt de părere că în *compoziție* conceptul cel mai important este *conceptul de proporție*, fie că este utilizat în mod conștient, fie că se aplică în mod inconștient.

Din punct de vedere matematic, proporția este *egalitatea a două rapoarte*. De exemplu, la segmente de dreaptă, *raportul* dintre două segmente AB și BC se scrie AB/BC sau a/b, dacă $\overline{AB} = a$ și $\overline{BC} = b$. Proporția geometrică se numește *discontinuă*, în cazul general în care cei patru termeni sînt diferiți, adică a/b = c/d, și *continuă*, în cazul în care doi dintre cei patru termeni sînt identici, adică a/b = b/c. Proporțiile geometrice, continue sau discontinue, pot avea oricîți termeni, ca în exemplele de mai jos:

$$a/b = c/d = e/f = g/h = \dots$$

sau

$$a/b = b/c = c/d = d/e = \dots$$

În ambele cazuri există o *permanență a unui raport caracteristic*. De aceea, conceptul de proporție introduce, în afara unei simple măsurări și comparații, ideea unei calități permanente transmisă de la un raport la altul; acest *invariant analogic* stă la baza unui principiu de ordonare (*Ghyka*, 1981). Din punctul de vedere al proporției, cea mai importantă figură plană este dreptunghiul. Caracteristica cea mai importantă a unui dreptunghi este raportul său caracteristic (raportul dintre latura lungă și latura scurtă). Toate dreptunghiurile care au același raport caracteristic sînt omotetice. Acest raport a/b poate fi un număr rațional sau irațional. *Matila Ghyka* numește dreptunghiurile care au un

raport rațional între laturi — dreptunghiuri *statice*, iar dreptunghiurile caracterizate de un raport irațional — dreptunghiuri *dinamice*. Dreptunghiurile dinamice permit o flexibilitate și o diversitate mult mai mari decît dreptunghiurile statice, în special în compozițiile de arhitectură și artă.

SECȚIUNEA DE AUR

Secțiunea de aur este cea mai simplă proporție asimetrică obținută atunci cînd se încearcă să se reducă cei trei termeni ai unei proporții geometrice continue $a/b = b/c$ la doi termeni. Cea mai simplă modalitate de a realiza acest lucru este de a presupune că $c = a + b$; în acest caz, proporția devine $a/b = b/(a + b)$ sau $b/a = (a + b)/b$. Raportul caracteristic care trebuie calculat este b/a (unde b este mai mare decît a) și se obține astfel:

$$(b/a)^2 - b/a - 1 = 0$$

Rădăcina pozitivă a acestei ecuații este:

$$b/a = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1{,}618 \ldots$$

Acest raport caracteristic a fost numit de greci „secțiune". În anul 1509, Luca Pacioli l-a numit „proporția divină", iar începînd cu Leonardo da Vinci se numește „secțiunea de aur". Numărul $(\sqrt{5} + 1)/2 = 1{,}618 \ldots$ simbolizat prin litera grecească Φ, are proprietăți aritmetice, algebrice și geometrice cu totul remarcabile; astfel se poate verifica că:

$\Phi = 1{,}618 \ldots$
$1/\Phi = 0{,}618 \ldots$
$\Phi^2 = 2{,}618 \ldots$

Din expresia $(b/a)^2 - b/a - 1 = 0$ sau $\Phi^{n-1} = \Phi + 1$, se obține (multiplicînd ambii termeni cu Φ de orice număr de ori) $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$, ceea ce se exprimă astfel: în orice progresie sau serie avînd rația Φ, fiecare termen este egal cu suma celor doi termeni precedenți. Această proprietate permite o construcție geometrică imediată a seriei; avînd doi termeni succesivi, se pot construi toți ceilalți termeni cu ajutorul compasului.

Construcția raportului $\Phi = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1{,}618 \ldots$ este cunoscută din subcapitolul 5.2 referitor la poliedrele regulate; este chiar raportul dintre diagonala și latura unui pentagon regulat și intervine în majoritatea relațiilor poligoanelor regulate și semiregulate. Construcția raportului este amintită în figura 8.4.1, unde $AC/AB = (\sqrt{5} + 1)/2 = \Phi$.

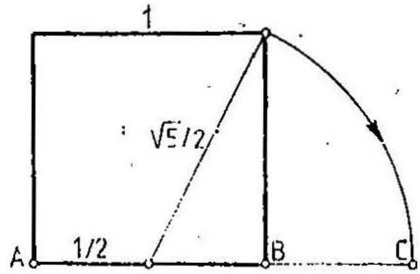


fig. 8.4.1

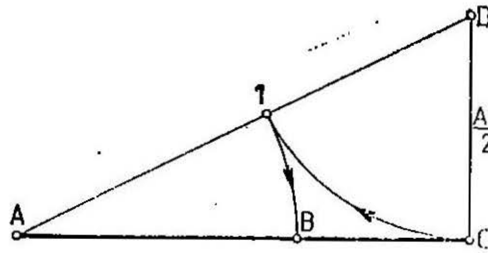


fig. 8.4.2

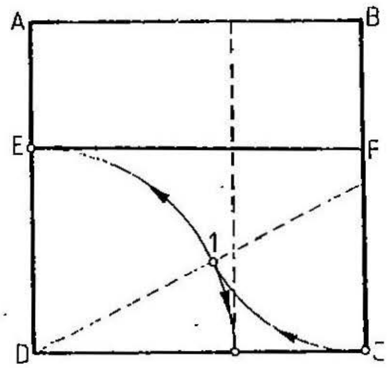


fig. 8.4.3

Dacă se dă un segment de dreaptă AB, se poate găsi un al treilea punct C, astfel încît $AB/BC = AC/AB = \Phi$ (fig. 8.4.2). În figura 8.4.3, pătratul ABCD a fost divizat după secțiunea de aur. Dreptunghiul EFCD este un dreptunghi de aur ($DC/ED = \Phi$), iar dreptunghiul ABFE este un dreptunghi de raport Φ^2 (adică $AB/AE = \Phi^2$).

Raportul dintre raza unui cerc și latura decagonului înscris este Φ. Raportul dintre latura unui decagon stelat și raza cercului circumscris este de asemenea Φ.

SIMETRIE DINAMICĂ

Prin simetrie, arhitecţii greci şi romani (ca şi cei gotici, dealtfel), înţelegeau „comodularea" sau legarea tuturor elementelor unui ansamblu proiectat într-un set de proporţii înrudite. Vitruviu afirmă în tratatul său de arhitectură că, atunci cînd se asigură simetria sau comodularea între elemente şi între elemente şi ansamblu, se obţine „euritmie".

Simetria dinamică sau simetria de gradul doi (bazată pe rapoarte cu valori numere iraţionale) înseamnă că, deşi elementele liniare (segmentele de dreaptă) utilizate în compoziţie au valori iraţionale (incomensurabile), suprafeţele construite pe aceste segmente pot fi comensurabile (fiind legate prin valori raţionale). De exemplu, suprafeţele pătratelor de laturi proporţionale cu $\sqrt{2}$ şi $\sqrt{3}$ se vor afla în raportul 2/3.
Simetria dinamică se obţine utilizînd în compoziţie dreptunghiuri dinamice, de exemplu dreptunghiurile cu raportul laturilor egal cu $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, Φ^2, $\sqrt{\Phi}$ şi Φ^2. Matila Ghyka consideră dreptunghiurile cu raportul laturilor egal cu 1 (pătratul) şi 2 (două pătrate adiacente) ca fiind atît statice, cît şi dinamice (*Ghyka*, 1931). Importanţa „gradului de rudenie" dintre dreptunghiuri provine dintr-o lege de compoziţie menţionată de Leon Battista Alberti şi redescoperită de Jay Hambidge, şi anume „legea neamestecării proporţiilor sau temelor într-o compoziţie plană". Într-o asemenea compoziţie trebuie folosite numai rapoarte sau teme înrudite. De pildă, dreptunghiurile de raport Φ, Φ^2, $\sqrt{\Phi}$ şi $\sqrt{5}$ sînt înrudite între ele, dar nu se înrudesc cu dreptunghiurile de raport $\sqrt{2}$ şi $\sqrt{3}$. Proporţia $\sqrt{\Phi} = 1{,}273\ldots$ are o anumită importanţă, întrucît se întîmplă ca multe rame de tablouri să aibă această proporţie. Seurat a folosit raportul $\sqrt{\Phi}$ în majoritatea compoziţiilor sale.

Prin compuneri şi descompuneri de elemente caracterizate de raportul Φ sau de rapoarte înrudite, unii pictori au încercat să realizeze „compoziţii armonice". Figura 8.4.4 reprezintă o asemenea compoziţie realizată de D. Wiener pe o reţea de rapoarte armonice realizate pe un dreptunghi de aur de dimensiuni 1 m/61,8 cm.

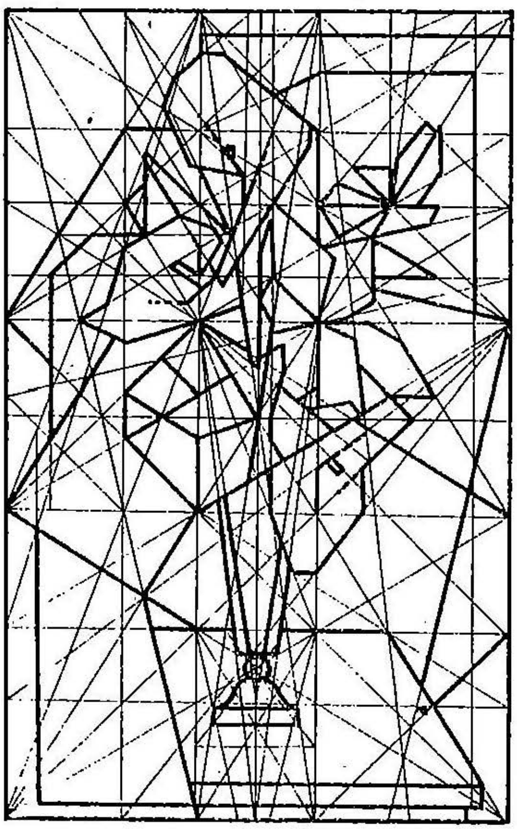


fig. 8.4.4

APLICAŢIILE SECŢIUNII DE AUR ÎN ARHITECTURĂ

Analiza cu ajutorul „subdiviziunilor armonice" efectuată de *Hambidge* asupra planurilor templelor greceşti, a vaselor şi elementelor decorative, confirmă interpretarea lui Vitruviu privitoare la „simetrie" şi „euritmie". Figura 8.4.5 ilustrează analiza faţadei Parthenonului de către Hambidge şi evidenţiază prezenţa dreptunghiurilor de tip „dinamic". Toate cotele reale găsite în monumentele greceşti din perioadă clasică se încadrează în sistemul secţiunii de aur, atît în ceea ce priveşte compoziţia ansamblului, cît şi detaliile. Întreaga arhitectură grecească clasică este modulată şi configurată după regula prin excelenţă organică a secţiunii de aur (*Radian*, 1981).

„Cartea proporţiilor" (*H. R. Radian*, Editura Meridiane, 1981) tratează în detaliu aplicaţiile secţiunii de aur în arhitectura tuturor timpurilor, începînd cu Orientul antic, Egiptul, Grecia şi Roma antică, continuînd cu Evul Mediu şi Renaşterea şi încheind cu epoca modernă şi contemporană. Sînt studiate legile compoziţiei, punerea în proporţie, traseele regulatoare (ca trasee geometrice de compunere a faţadelor obiectelor de

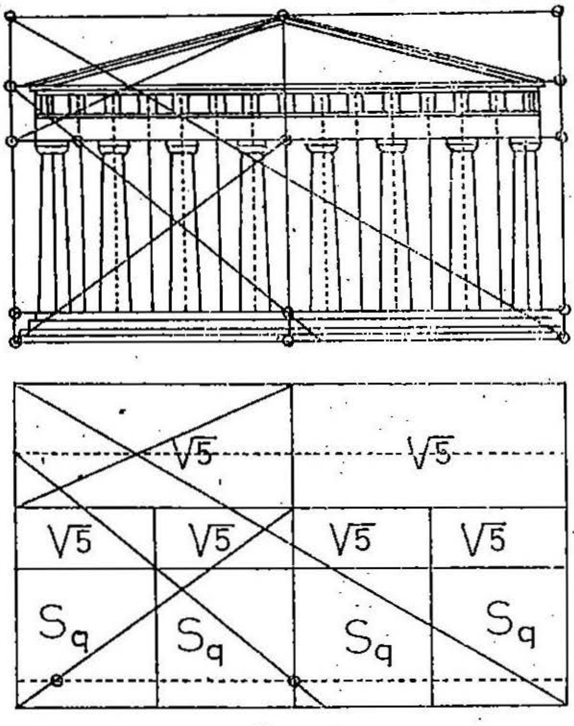


fig. 8.4.5

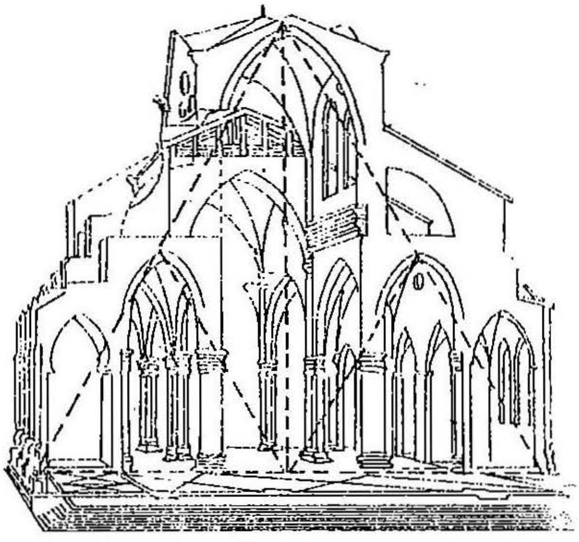


fig. 8.4.6

arhitectură) şi, după o încercare de sinteză, sînt formulate cîteva recomandări referitoare la compoziţie.

Astfel, se recomandă să se evite greşeala săvîrşită frecvent de a se analiza proporţiile edificiului numai pe proiecţiile sale ortogonale. O clădire trebuie pusă în proporţie în spaţiu, analizînd volumele şi percepţia ei în perspectivă. Esenţiale sînt şi proporţiile şi rapoartele spaţiului interior, care în general au fost mai neglijate de proiectanţii şi teoreticienii de arhitectură. Asemenea proporţii sînt evidenţiate de exemplu în figura 8.4.6, care este gravura întocmită de arhitectul Fiano Ambresino (apărută în 1592) referitoare la biserica gotică Sf. Petroniu din Bologna. Un fapt interesant este acela că, deşi Ambresino a propus realizarea bisericii după triangulaţia $\pi/3$, autorităţile au terminat edificiul după triangulaţia $\pi/4$, aspectul final al bisericii fiind, de aceea, nereuşit.

De asemenea, o clădire nu trebuie pusă în proporţie izolat, independent, ci numai încadrată în anturajul ei arhitectural şi natural. Întregul ansamblu trebuie să fie pus în proporţie unitar, fără a se amesteca proporţii străine. Un factor care poate contribui în mod substanţial la punerea în proporţie a clădirilor este, în arhitectura contemporană jocul dintre plinuri şi goluri. De asemenea, ritmul arhitectural poate contribui şi el la o bună punere în proporţie, iar modularea, chiar şi cea impusă de industrializarea construcţiilor, nu constituie o piedică, dacă produce euritmie (*Radian*, 1981). În sfîrşit, trebuie privite şi cu o oarecare rezervă şi precauţie aplicaţiile secţiunii de aur şi ale compoziţiilor „armonice" în arhitectură. Prima observaţie este aceea că multe trasee regulatoare aplicate monumentelor de arhitectură sînt construite destul de arbitrar, rapoartele şi proporţiile teoretice sprijinindu-se de multe ori pe elemente şi detalii secundare şi nu neapărat pe elementele structurale şi compoziţionale importante. În al doilea rînd, prin complicarea oricărei compoziţii, probabilitatea de apariţie a secţiunii de aur creşte foarte mult. De exemplu, un singur dreptunghi secţionat de o transversală şi o longitudinală, dă naştere unui număr de 9 dreptunghiuri. Prin introducerea a patru sau cinci alte drepte, numărul dreptunghiurilor se ridică la cîteva sute, iar probabilitatea de apariţie „spontană" a secţiunii de aur (sau a unor valori foarte apropiate) este foarte mare. De aceea, o regulă empirică mai simplă a compoziţiei arhitecturale „curente", rezultată din studii teoretice şi aplicaţii practice, este aceea a aplicării secţiunii „la o treime". De exemplu, secţiunile-tip, nu se cuplează în general „la jumătate", ci „la o treime" sau „la două treimi" din lăţimea tronsonului. Juxtapunerea „la o treime" a tronsoanelor aproximează valoarea secţiunii de aur, raportul fiind 1,666 faţă de 1,618...

În condițiile arhitecturii serializate și ale secțiunilor-tip, respectarea unor asemenea reguli empirice poate să ofere, dacă nu rafinamentul unor subdiviziuni armonice bazate pe secțiunea de aur, cel puțin certitudinea evitării unor egalități și proporții supărătoare.

Să încercăm o aplicație de serializare simplă, într-o compoziție de cuburi așezate pe trei niveluri, care prezintă probleme de compoziție și probleme de statică, întrucît cuburile de la etajele superioare trebuie să stea în echilibru stabil pe cuburile de sub ele.

Aplicație. Desenați în axonometrie izometrică o compoziție de 24 cuburi egale așezate pe trei niveluri, astfel: 9 cuburi la primul nivel, 8 cuburi la al doilea nivel și 7 cuburi la al treilea nivel. Cuburile vor fi așezate în două variante:

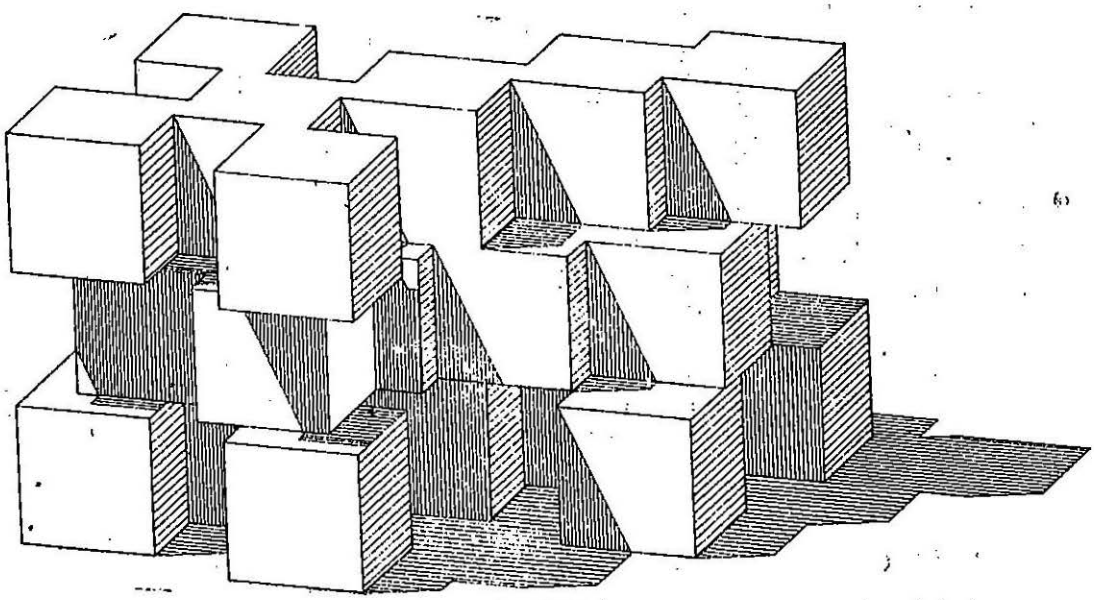


fig. 8.4.7

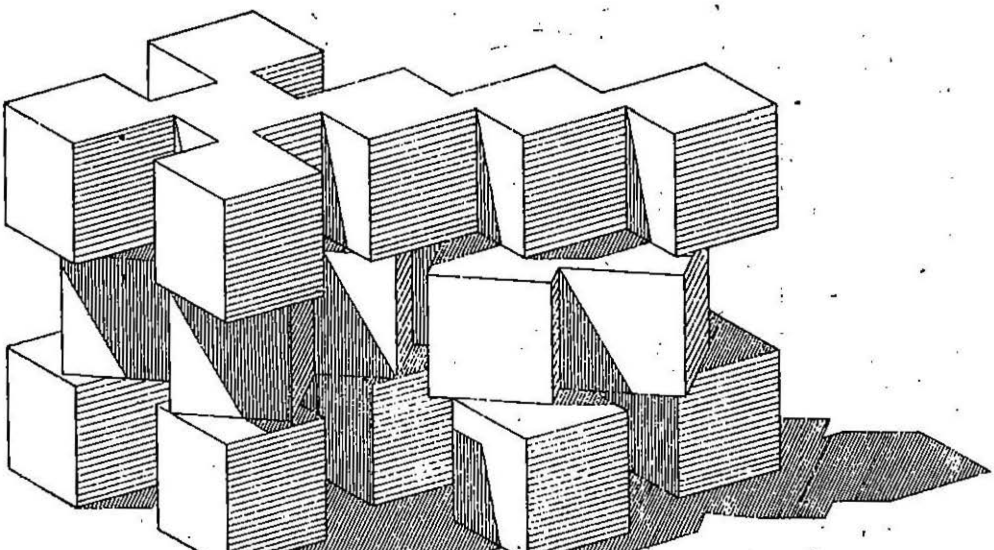


fig. 8.4.8

— toate cuburile sînt așezate după direcțiile axelor OX și OY;
— cuburile de la al doilea nivel sînt așezate rotit la 45° față de cuburile de la celelalte două niveluri.
Regulile de compoziție sînt:
— toate cuburile de pe un nivel sînt legate între ele;
— legătura lor se poate face numai „la o treime" sau „la două treimi";
— nu se acceptă cuburi juxtapuse „colț la colț";
— nu este voie să se suprapună perfect două cuburi situate la două niveluri adiacente (pentru a păstra identitatea cuburilor ca elemente ale compoziției);
— cuburile de la un nivel superior trebuie să stea în echilibru stabil pe cuburile pe care se sprijină (de la nivelul imediat inferior).
Figurile 8.4.7 și 8.4.8 ilustrează o rezolvare posibilă pentru cele două variante (inclusiv umbrele proprii și purtate ale ansamblului). Compozițiile s-au realizat pe un raster pătrat de dimensiune 1/3 din muchia cubului. Regulile de compoziție sînt astfel precizate încît se pot introduce într-un program de calculator, oferind un număr foarte mare de soluții. Sortarea soluțiilor se poate face după alte criterii, care trebuie și ele precizate exact, de exemplu forma generală a ansamblului, linia fronturilor obținute etc.

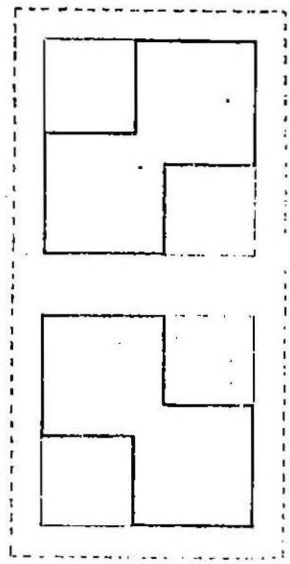


fig. 8.5.1

8.5. REPREZENTĂRI GEOMETRICE ALE SPAȚIULUI INTERIOR

Ne propunem să găsim mai întîi o metodă de imaginare și reprezentare a spațiului interior pornind de la forme poliedrale simple. În amîndouă aplicațiile care urmează se vor analiza întîi golurile ca și cum ar fi volume pline și, odată perfect înțelese se vor reprezenta ca goluri.

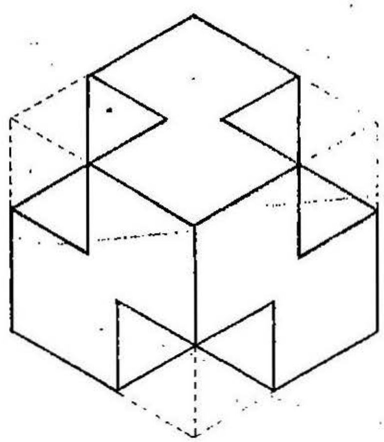


fig. 8.5.2

Aplicație. Se dă un cub de muchie 9 cm, așezat cu o față în planul orizontal de proiecție. Un cub de muchie 3 cm este așezat concentric cu el și are muchiile paralele cu muchiile sale. Patru dintre vîrfurile cubului de muchie 3 cm (care sînt vîrfurile unui tetraedru regulat) sînt centrele a patru cuburi de muchie 4 cm, care au la rîndul lor muchiile paralele cu muchiile primului cub. Cubul de muchie 9 cm este plin, iar cele patru cuburi de muchie 4 cm sînt goale. Secționați cubul cu golul din el după un plan diagonal vertical și desenați axonometria izometrică după ce ați îndepărtat una din jumătăți. Apoi desenați desfășurata volumului astfel rezultat (jumătatea reprezentată în axonometrie) și construiți o machetă din hîrtie.

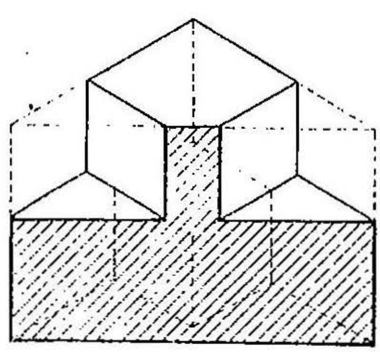


fig. 8.5.3

Se studiază întîi ansamblul celor patru cuburi de muchie 4 cm, ca și cînd ar fi volume pline. Ansamblul are o configurație tetraedrală; dubla proiecție ortogonală este cea din figura 8.5.1, iar axonometria izometrică apare în figura 8.5.2. Dacă se secționează ansamblul celor patru cuburi cu un plan median diagonal, se obține un volum reprezentat în două poziții ilustrate în figurile 8.5.3 și 8.5.4. Dacă cele patru cuburi se transformă în goluri, liniile punctate (aflate în spate) din figurile 8.5.3 și 8.5.4 vor deveni linii pline, iar reprezentarea spațiului interior este foarte directă. Cele două imagini finale sînt prezentate în figurile 8.5.5 și 8.5.6.

Aplicație. Patru cuburi întrepătrunse de muchie 9 cm au muchiile paralele, iar centrele lor de greutate se află situate în patru din vîrfurile unui cub de muchie 3 cm, în așa fel încît aceste patru vîrfuri formează un tetraedru regulat. Fiecare din cele patru cuburi are un gol interior de formă unui octaedru regulat, obținut prin unirea centrelor fețelor sale. Desenați ansamblul în axonometrie izometrică, după ce s-a secționat cu un plan vertical diagonal al cubului mic și s-a îndepărtat jumătatea dinspre observator. Se cere în plus desfășurata volumului și macheta din hîrtie.

Se studiază întîi ansamblul celor patru octaedri ca și cum ar fi volume pline. Construcția lor se obține din figura 8.5.7, prin înscriere în cub. Se obține o configurație tetraedrală reprezentată în proiecție dublu ortogonală în figura 8.5.8. Se observă că fiecare din

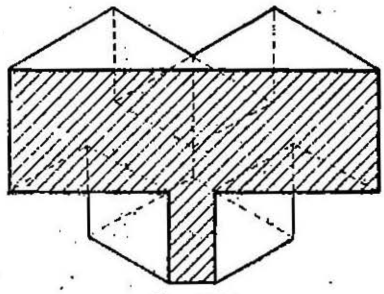


fig. 8.5.4

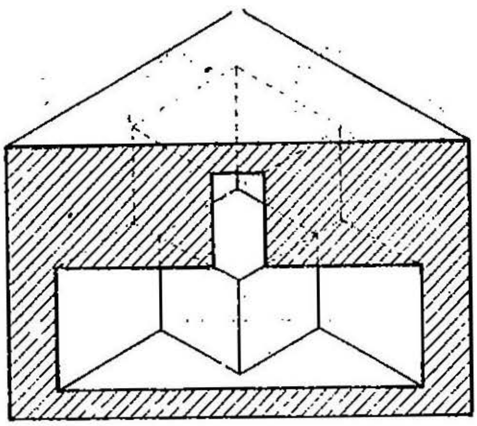


fig. 8.5.5

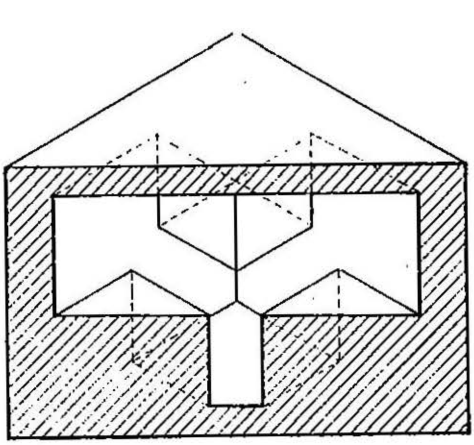


fig. 8.5.6

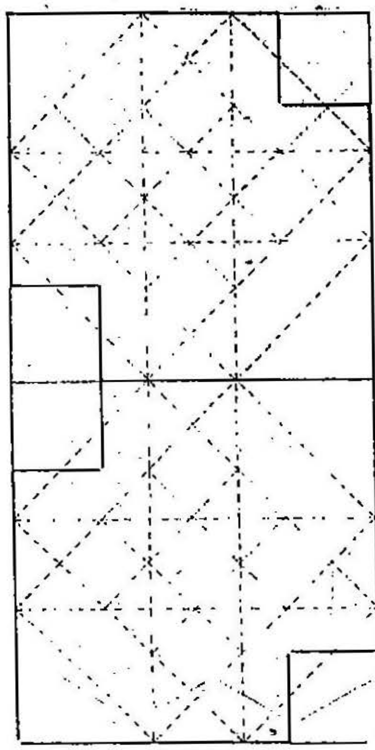


fig. 8.5.7

cele patru fețe ale ansamblului (corespunzătoare celor patru fețe ale tetraedrului) are forma unei frunze de trifoi. Axonometria izometrică a celor patru octaedri regulați este cea din figura 8.5.9. Secționînd ansamblul cu un plan diagonal, se obțin două reprezentări în axonometrie (cele din figurile 8.5.10 și 8.5.11). Dacă în aceste reprezentări se trasează liniile punctate (din spate) cu linie groasă continuă, se obține imaginea golului interior (destul de complicat) de forma intersecției de octaedri. Cele două figuri corespunzătoare sînt 8.5.12 și 8.5.13.

Se poate studia și o variantă a aplicației în care golurile interioare sînt octaedri regulați de muchie 9 cm, dispuși cu muchiile paralele cu muchiile octaedrilor înscriși (din versiunea inițială).

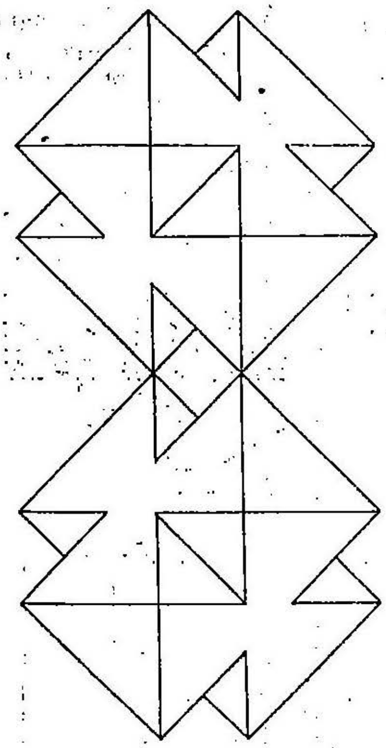


fig. 8.5.8

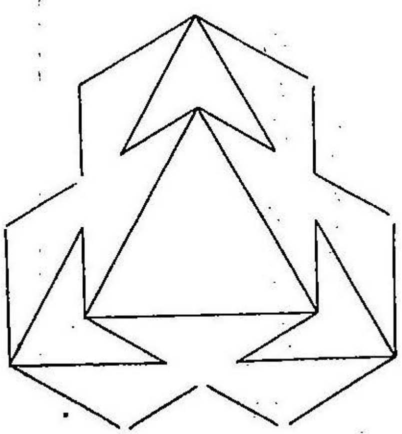


fig. 8.5.9

SECȚIUNI AXONOMETRICE

Secțiunile axonometrice sînt o modalitate „clasică" de reprezentare a spațiului interior. În volumele sale de istoria arhitecturii, Auguste Choisy reprezintă monumentele de arhitectură pornind de la planul construcției și construind o axonometrie a spațiului interior văzut de jos în sus (*Choisy*, 1929). Aceste reprezentări au devenit atît de populare, încît ele se numesc astăzi secțiuni axonometrice „de tip Choisy". Axonometriile Choisy sînt ilustrate prin axonometria izometrică a cate-

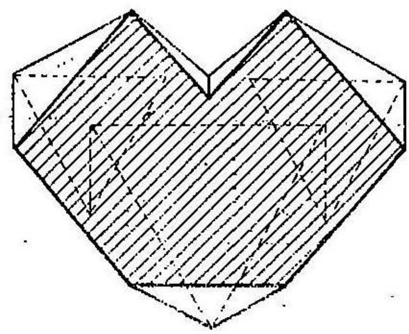


fig. 8.5.10

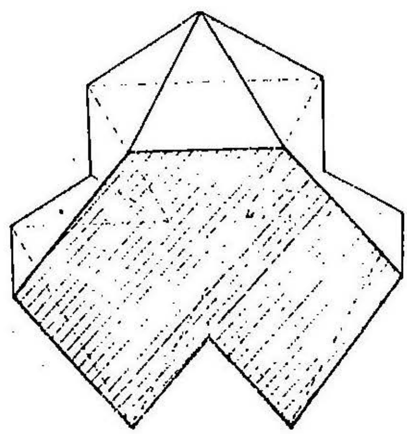


fig. 8.5.11

dralei Sf. Sofia din Constantinopol (fig. 8.5.14) și axonometria cavalieră a Pantheonului din Paris (fig. 8.5.15).
Un alt tip de reprezentare a spațiului interior este cel din figura 8.5.16, în care secțiunile prin ansamblu se realizează după plane paralele cu planul lateral de proiecție (axonometria aparține lui Paul Rudolph). În capitolul 3, care cuprinde reprezentările axonometrice, s-a ilustrat un alt tip de reprezentare a spațiului interior, respectiv o axonometrie cavalieră a unui apartament, cu spațiul din interior perceput de sus în jos (v. fig. 3.4.11).

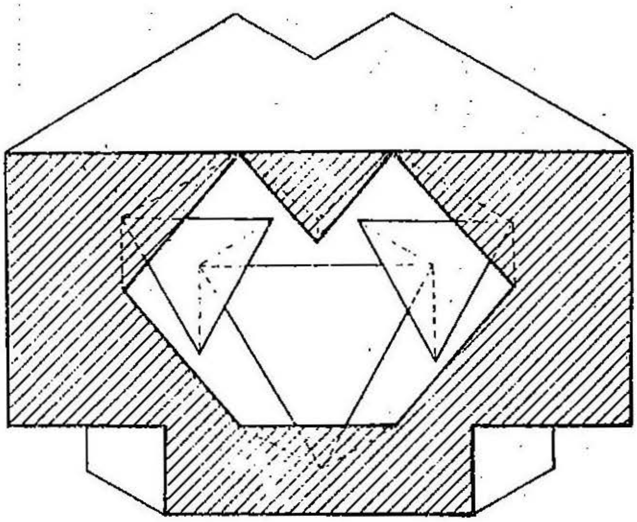


fig. 8.5.12

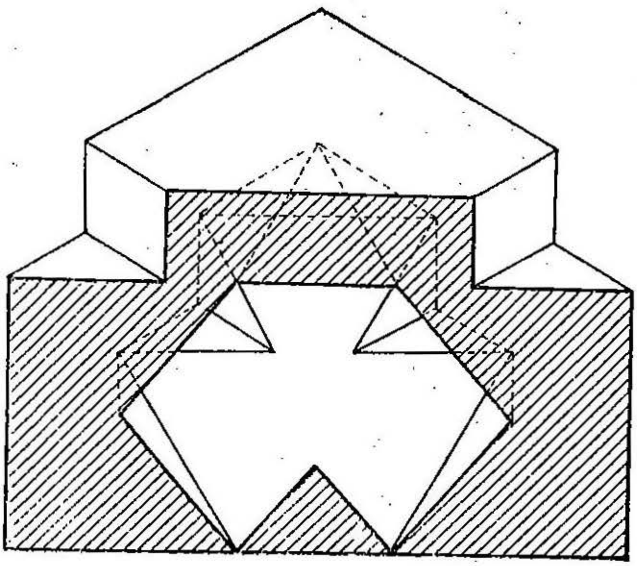


fig. 8.5.13

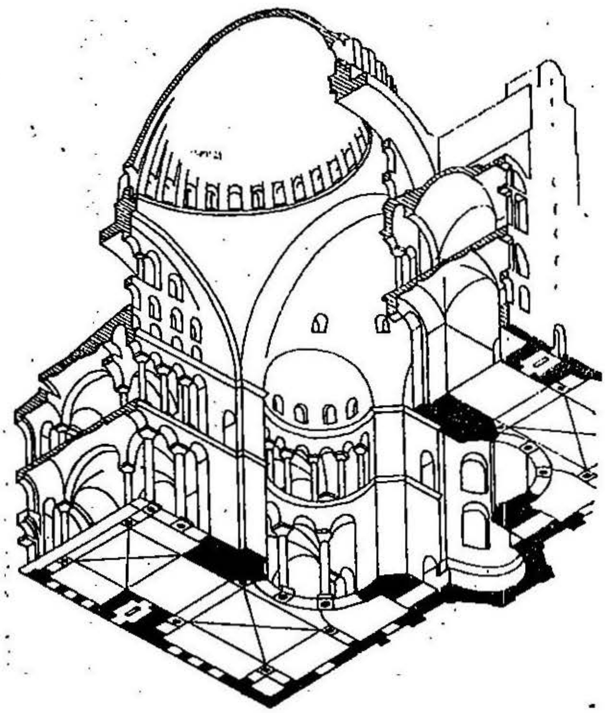


fig. 8.5.14

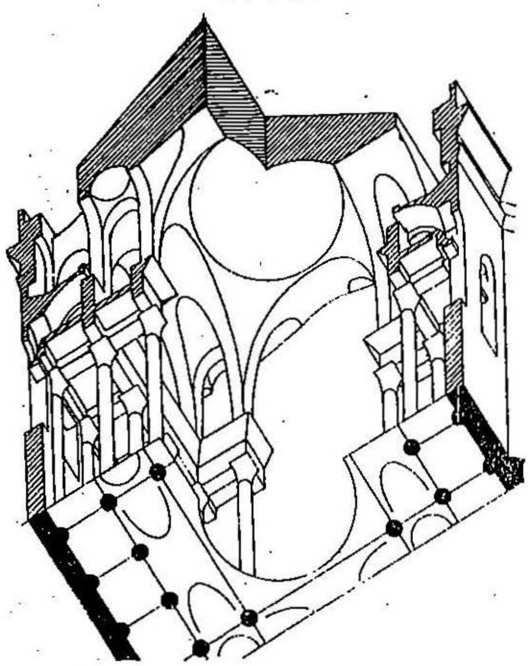


fig. 8.5.15

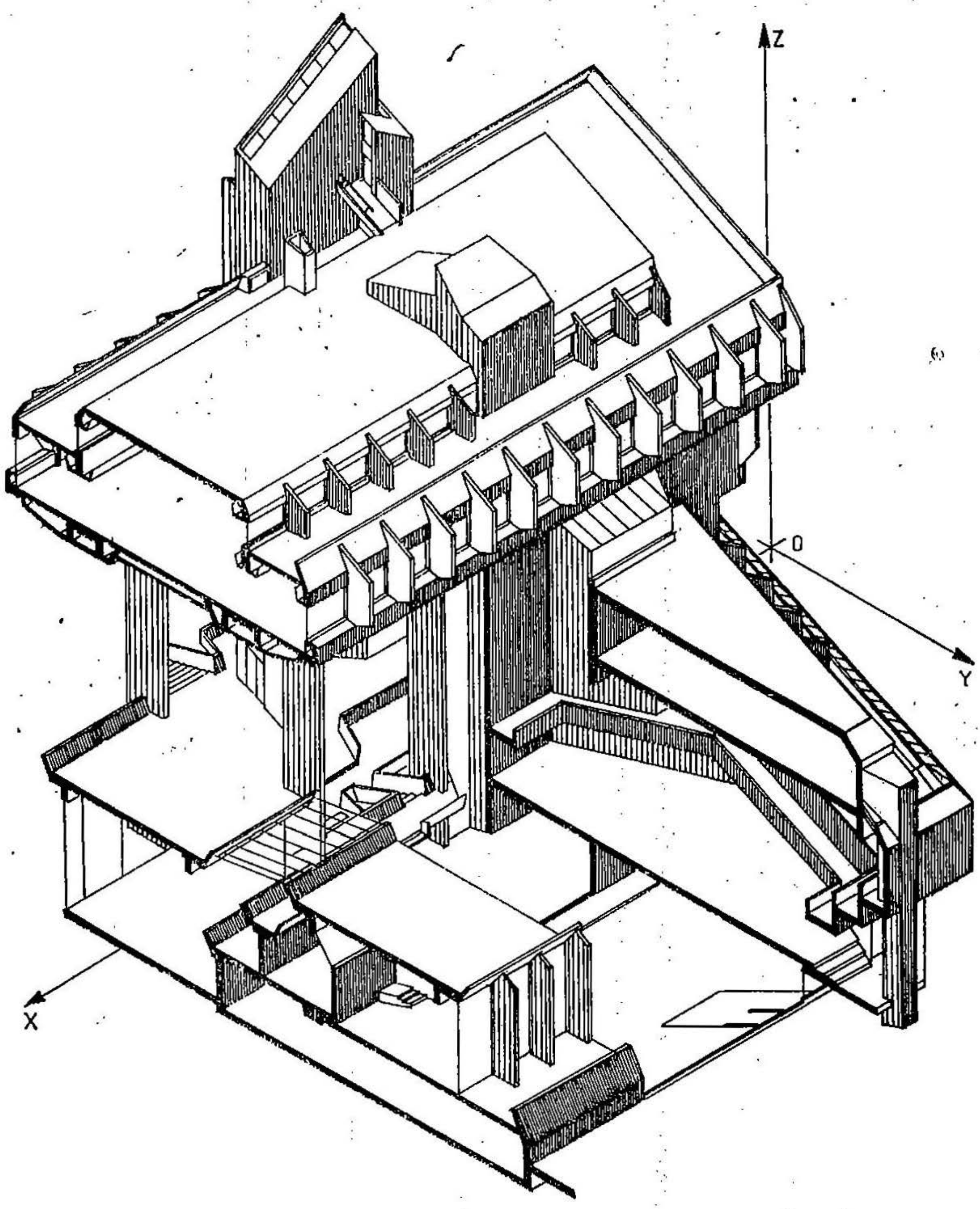


fig. 8.5.16

Partea a doua
REPREZENTĂRI DE ARHITECTURĂ ÎN PERSPECTIVĂ

9.
MECANISMUL PERSPECTIVEI

9.1. INTRODUCERE

DEFINIŢII

Perspectiva explică legile după care obiectele înconjurătoare capătă aspecte diferite în funcţie de locul din care sînt privite. În acelaşi timp perspectiva prezintă procedeele grafice după care se poate reprezenta pe un plan cu două dimensiuni spaţiul cu trei dimensiuni.

Redarea spaţiului în desen a constituit preocuparea scenografilor antici în pictura decorurilor scenice. Aceste căutări izvorîte din necesităţi practice şi teoretice au dat naştere la o disciplină care în perioada Renaşterii, a primit numele de *perspectivă*. Ea intră ca materie de învăţămînt în toate universităţile epocii. În concepţiile de început perspectiva cuprindea mai mult reguli de desen ce aveau drept scop o apropiere de imaginea realităţii. În Antichitate perspectiva era cunoscută sub numele de „scenografica". Istoricul matematicii greceşti Geminus (sec. I î.e.n.) dă următoarea definiţie: „Scenografica este acea ramură a opticii care arată cum să se facă desenele, reprezentînd obiecte la distanţe diferite şi diferite înălţimi, păstrînd totuşi pentru vedere proporţia şi forma acestor obiecte". Leonardo da Vinci (1452—1519) arată că: „Pictura se întemeiază pe perspectivă... fără ea nimic nu se face... Ucenicul trebuie mai întîi să înveţe perspectiva, cu care el poate să distribuie fiecărui obiect dreapta lui măsură".

Jules de la Gournerie (sec. XIX) defineşte perspectiva astfel: „Perspectiva este arta de a reprezenta obiectele din spaţiu pe un tablou, păstrînd aparenţa lor. Ea este liniară sau aeriană, după cum se ocupă de forme sau de coloraţie".

După cum reiese din aceste definiţii perspectiva nu este numai geometrie, ci aşa cum arată A. Gheorghiu, ea este în acelaşi timp geometrie, optică, fiziologie şi psihologie a vederii.

Perspectiva este ştiinţa de a reda prin desen aspectele obiectelor din spaţiu aşa cum se văd ele de la distanţă finită.

Într-o primă aproximaţie, perspectiva se bazează pe proiecţia conică. *Proiecţia conică* este operaţia geometrică care schematizează procesul percepţiei vizuale.

Geometria introdusă de perspectivă este necesară, dar nu suficientă şi de aceea s-a apelat la o serie de metode grafice care să apropie desenul perspectiv de viziunea realităţii.

UTILITATEA PERSPECTIVEI ÎN ARHITECTURĂ

Încă din secolul I î.e.n., arhitectul şi inginerul latin Vitruviu a arătat utilitatea perspectivei în arhitectură: „Arhitecţii au neapărată trebuinţă de scenografie (perspectivă), pentru că ea învaţă a da diferitelor părţi ale unei clădiri raporturi convenabile, fără a se mai teme că prin realizare, ei ar pierde ceva din frumuseţea proiectată". Perspectiva este utilă pentru „laici" întrucît ea reuşeşte să redea într-o viziune cît mai aproape de realitate aspectul viitoarei construcţii, dar este şi mai utilă pentru proiectanţi în timpul studiului, ca mijloc de cercetare anticipată a efectului plastic (*A. Gheorghiu* 1963). Studiul şi definitivarea unei creaţii de arhitectură exclusiv în epura de geometrie descrip-

tivă poate duce, datorită caracterului convențional al acestui desen, la un anumit grafism. Proiectul nefiind scopul final al proiectării de arhitectură, grafica nu slujește cu nimic construcției realizate. Practica de proiectare a impus o continuă trecere de la reprezentarea de geometrie descriptivă la cea de perspectivă și invers.

Fotografia poate înlocui perspectiva mai ales pentru nevoi de documentare, în studiu fiind folosită în combinație cu aceasta; perspectiva și legile ei avînd un rol dominant.

Nici macheta nu poate înlocui complet perspectiva. În procesul de proiectare, studiul pe machetă nu ne dă o viziune corectă a obiectelor ce se vor realiza. Macheta redă numai volumetria dar nu și relația cu dimensiunile umane, în plus nu toate elementele arhitecturale și constructive își reduc efectul plastic și de rezistență proporțional cu micșorarea pur geometrică a întregului volum. Deoarece la fiecare etapă de studiu se poate face o perspectivă, aceasta se dovedește a fi mai directă, mai economică și mai avantajoasă decît o machetă. De asemenea, numai perspectiva poate să redea atmosfera și relația cu mediul înconjurător.

9.2. VEDEREA UMANĂ

GLOBUL OCULAR

Simțul vederii permite omului să recunoască obiectele care îl înconjură, să aprecieze forma, mărimea, culoarea, luminozitatea și mișcarea lor, precum și distanța care îl separă de ele, în măsura în care aceste obiecte emit lumină, reflectă lumină sau sînt amplasate pe un fond luminos. Organul vederii îl constituie ochiul care este format din *globul ocular* și *anexele* sale de mișcare, apărare, nutriție și de transmitere a informației la creier.

Ochiul a servit drept model aparatului de fotografiat dar, spre deosebire de acesta, ochiul este viu, deci în continuă mișcare. Totuși, pentru a înțelege mai bine sistemul optic al ochiului, se va face analogia cu aparatul de fotografiat care este mai simplu și la îndemîna tuturor. În figura 9.2.1 este arătată o secțiune orizontală prin globul ocular drept. Globul ocular are o formă relativ sferică, cu diametrul de aproximativ 24 mm, și este limitat la exterior de o membrană albă protectoare numită sclerotică. Sclerotica este căptușită la interior cu o membrană neagră — coroida. *Retina* este o membrană formată din celule sensibile la excitații luminoase. Aceste celule sensibile, în formă de conuri și bastonașe, constituie terminațiile nervului optic. Nervul optic pătrunde în globul ocular printr-un punct situat în planul ecuatorial la 15° spre interior față de axa optică. Acest punct se numește *punctul orb*, deoarece este insensibil la lumină și are un diametru de 1,5...1,8 mm. Sistemul optic al ochiului este alcătuit dintr-o serie de organe și medii refrigente care condensează pe retină razele de lumină. Corneea este transparentă și are forma de calotă sferică cu raza de 8 mm.

Cristalinul este o lentilă biconvexă cu țesut viu, avînd fețele sferice de raze variabile, în funcție de distanțele obiectelor vizate. Această variație a curburii fețelor se realizează cu ajutorul mușchilor ciliari. În fața cristalinului se găsește *irisul* — mușchi radio-centric, străpuns circular de *pupilă*. Pupila are un diametru ce variază în funcție de lumină de la 2 la 7 mm. Irisul servește ca ecran opac, similar cu diafragma unui aparat de fotografiat, pentru a doza cantitatea de lumină care ajunge pe retină, în funcție de diferitele intensități de iluminare. Imaginea este mai clară atunci cînd razele de lumină trec prin partea centrală a cristalinului, iar irisul împiedică trecerea lor prin periferia cristalinului. Centrele fețelor corneei, cristalinului și centrul pupilei formează *axa optică* a sistemului optic ocular. Diametral opus pupilei, pe axa optică, se găsește *pata galbenă*, zona cea mai sensibilă a retinei. Pata galbenă este de formă eliptică, cu axa mare orizontală de 2 mm și axa mică verticală de 1 mm. În centrul petei galbene, retina prezintă o mică depresiune — *fovea centralis* cu un diametru de 150...200 microni; este punctul de maximă acuitate vizuală.

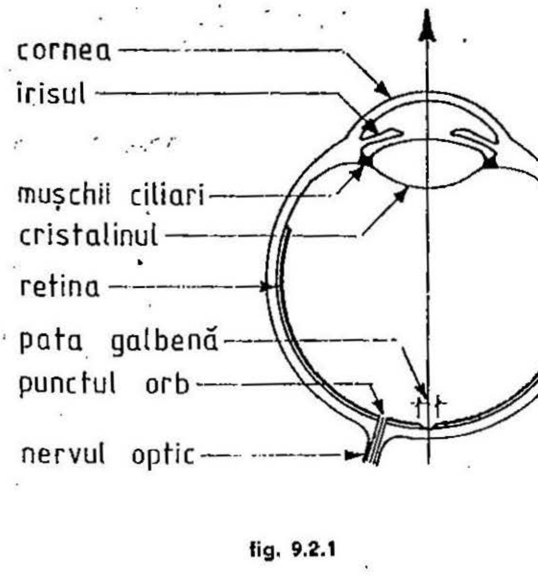


fig. 9.2.1

FORMAREA IMAGINII

În sistemul optic al ochiului, cristalinul joacă rolul principal în formarea imaginii, deoarece funcționează ca o lentilă biconvexă. După cum se știe din optică, lentilele convergente biconvexe dau o imagine reală, răsturnată și mai mică (fig. 9.2.2). Fascicülul de raze divergente, ce pleacă dintr-un punct A al unui obiect în spațiu, este transformat de către cristalin într-un fascicul convergent în punctul-imagine **a** pe retină. Posibilitatea ochiului ca, prin variația curburii cristalinului, să aducă imaginea oricărui obiect pe retină, se numește *acomodare*.

Într-un glob ocular normal, razele luminoase care vin de la un obiect situat la o distanță de cel puțin 6 m se focalizează, datorită sistemului optic al ochiului, la o distanță de 24 mm înapoia corneei, adică chiar pe retină. Deci, pentru obiectele ce se găsesc la o distanță față de ochi mai mare de 6 m nu este necesară acomodarea. Punctul cel mai apropiat de ochi la care un obiect poate fi văzut clar cu ajutorul acomodării complete se află, în raport cu vîrsta, la o distanță cuprinsă între 7 și 80 cm.

Capacitatea ochiului de a percepe obiecte foarte mici se numește *acuitate vizuală*. Două puncte de 1,4 mm diametru situate la 5 m distanță sînt percepute separat dacă între ele există o distanță de minim 1,4 mm. Dacă distanța dintre ele este mai mică cele două puncte apar contopite. Acuitatea vizuală este maximă pe fovea centralis și scade de 4...5 ori către extremitatea petei galbene, iar în dreptul meridianului frontal al retinei este de 150 de ori mai mică. Prin mici mișcări ochiul caută să aducă în zona de maximă acuitate vizuală imaginile obiectelor din spațiu. Aceste mișcări care se succed cu o frecvență foarte mare (50—90/s) fac ca imaginea recepționată de creier să fie continuă și clară pe toată suprafața ei.

La trecerea de la o lumină la alta ochiul prezintă *fenomenul de adaptare*. Adaptarea la întuneric se face mai greu (circa 20 min față de cea la lumină care se face în circa 5 min).

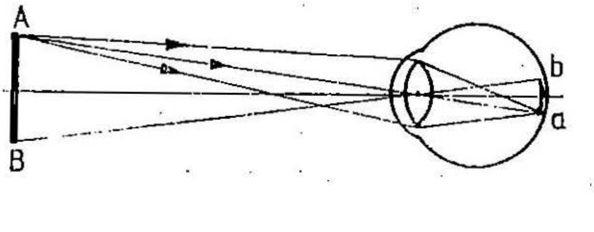


fig. 9.2.2

CÎMPUL VIZUAL

Cîmpul vizual al ochiului este format de ansamblul de puncte din spațiu ale căror imagini se formează pe retină, atunci cînd privim ținînd capul nemișcat. Cîmpul vizual corespunzător petei galbene este un con cu o deschidere la vîrf de 6...8°. Acest cîmp redus poate fi pus în evidență atunci cînd căutăm cu privirea un avion aflat la mare înălțime; sînt necesare mai multe încercări pînă reușim să aducem imaginea avionului în zona de maximă acuitate vizuală. Dacă vederea s-ar realiza cu aceeași intensitate pe întreaga suprafață a retinei, acest punct, aflat la mare distanță, s-ar putea percepe imediat. Datorită mobilității ochiului în orbită, cîmpul vizual este mai larg fiind limitat de construcția anatomică a feței. De exemplu, pentru ochiul drept, cîmpul vizual al unei vederi suficient de clare poate ajunge pe orizontală la 40...50° spre interior și 80...104° spre exterior, iar pe verticală la 40...50° superior și 60...70° inferior (fig. 9.2.3). Acest cîmp vizual se mărește, dacă lumina descrește, pentru că atunci deschiderea pupilei crește. Rezultă astfel, pentru ochiul drept de exemplu, o imagine alungită din stînga sus către dreapta jos (fig. 9.2.4). Cîmpul vizual al vederii binoculare este o rezultantă a cîmpurilor vizuale ale celor doi ochi și este un con cu vîrful înapoia lor. Din motive practice vom simplifica diagrama vederii binoculare

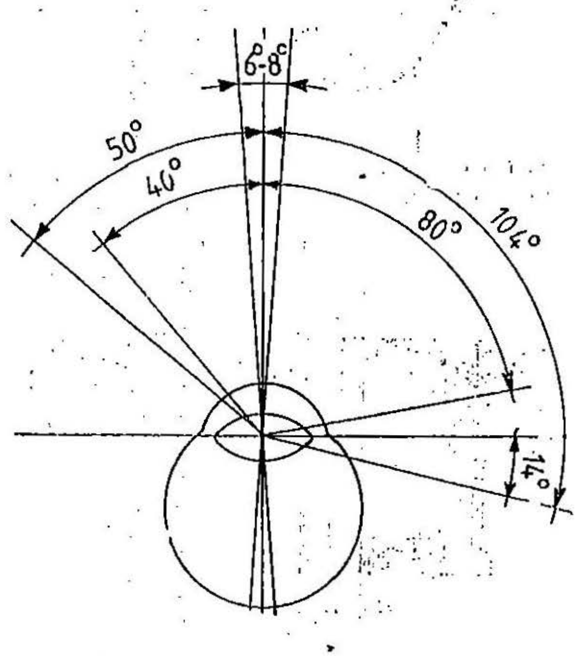


fig. 9.2.3

din figura 9.2.4, punînd în evidență mai ales acele unghiuri pe care le vom folosi la construcția perspectivei. În figura 9.2.5 (*H. Teodoru*, 1959) sînt puse în evidență mai multe zone de claritate a cîmpului vizual:

a) o zonă centrală de viziune foarte precisă și foarte clară, unde obiectele sînt percepute în cele mai mici detalii, avînd unghiul cuprins între 28...37°.

b) o zonă de viziune mai puțin precisă și destul de clară, unde obiectele sînt percepute satisfăcător cu unghiul de 53°.

c) o zonă periferică de viziune neclară; după cum se vede această zonă este foarte mare în raport cu celelalte.

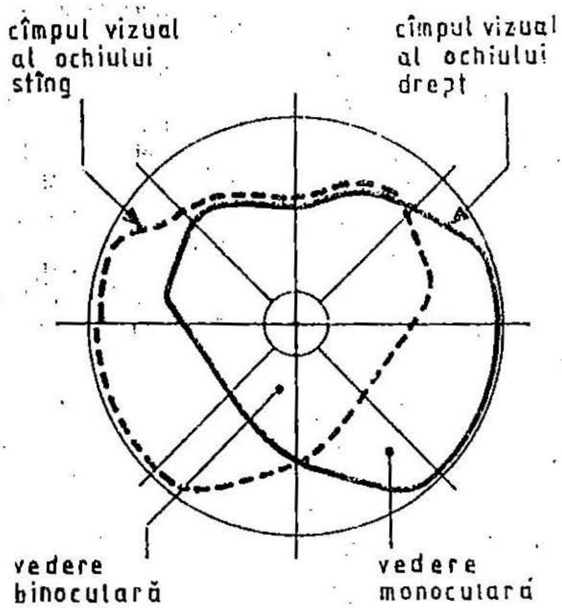
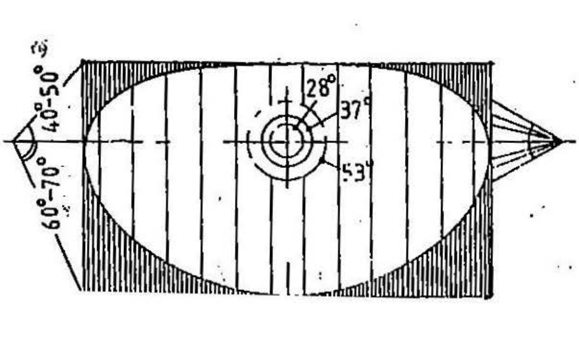


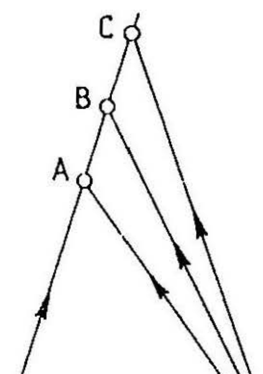
fig. 9.2.4



VEDEREA BINOCULARĂ

Vederea binoculară reprezintă capacitatea scoarței cerebrale de a contopi, într-o senzație unică, cele două imagini transmise de fiecare retină în parte. Deși imaginea care se formează pe retină are două dimensiuni, obiectele înconjurătoare sînt percepute spațial și nu plat. Aceasta se datorește faptului că privim cu doi ochi. Dacă am privi cu un singur ochi impresia de distanță și relief ar scădea simțitor. Vederea monoculară percepe aspectele reale ale obiectelor din spațiu, dar aplatizate și fără diferențieri de planuri. Deci, nepercepînd adîncimile, vederea monoculară este incompletă. Sistemul celor doi ochi formează o triangulație, ce are ca bază distanța dintre centrele globurilor oculare (circa 6...7 cm). Pentru a localiza un obiect din spațiu cei doi ochi trebuie să realizeze o convergență a axelor lor optice către acest obiect. Unghiul format de axele optice este mare, dacă obiectul este situat mai aproape și descrește odată cu depărtarea lui față de ochi. Sistemul nervos înregistrează modificările de tensiune din mușchii oculari și le corelează cu distanța. Acest lucru face posibilă localizarea în spațiu a unor puncte ce se află pe aceeași rază vizuală a unuia dintre ochi, dar la distanță mare de ochi (fig. 9.2.6).

Pentru distanțe apropiate imaginile fiecărui ochi în parte sînt diferite. Prin contopirea la nivelul scoarței cerebrale a celor două imagini se creează impresia de relief, volum, depărtare. Această diferențiere a imaginilor celor doi ochi scade odată cu depărtarea față de ochi a obiectelor ce sînt observate. La distanțe mai mari de 4...500 m,



imaginile nu mai au adîncime, cei doi ochi funcționînd ca unul singur.
Această proprietate, de a percepe imaginile în relief, este dobîndită în timp și prin experiența trăită. Se știe că la nou-născuți imaginile vizuale nu sînt însoțite de la început de perceperea spațialității. Ei cred că toate obiectele pe care le văd pot să le și atingă cu mîna. Pentru a pune mai bine în evidență diferența dintre vederea cu un ochi și cea cu doi ochi, amintim cîteva experiențe de percepție vizuală, binecunoscute:
a) Dacă privim cu un singur ochi două fire de ață de aceeași culoare, care trec unul pe lîngă altul și sînt situate la 1...2 m distanță de ochi, nu putem spune cu precizie care este mai în față.
b) Privind cu un singur ochi crengile desfrunzite ale unui copac, acestea ne apar suprapuse într-un singur plan (la fel ca într-un desen). Numai cu doi ochi reușim să distingem care sînt mai în față și care sînt mai depărtate de noi.
c) Închizînd un ochi, să încercăm să aducem cu ambele mîini două creioane, vîrf la vîrf, fără să le atingem. Cînd vom privi cu amîndoi ochii vom avea surpriza să constatăm diferența de depărtare a celor două vîrfuri față de ochi.
Cîmpul vizual al unui ochi completează cîmpul vizual al celuilalt ochi. Acest lucru îl punem în evidență astfel: privind un obiect cu ambii ochi vom vedea întreaga imagine a obiectului, chiar dacă între ochi și obiectul privit interpunem un creion ținut vertical. Dacă închidem un ochi creionul va acoperi o parte din imaginea obiectului privit, la fel ca într-un desen (fig. 9.2.7); deci, ce nu vedem cu un ochi vedem cu celălalt.
Pe proprietatea vederii binoculare se bazează construcția stereoscopului, atît ca aparat de fotografiat, cît și ca aparat de vizionat fotografii stereoscopice. Cele două imagini stereoscopice sînt percepute separat de fiecare ochi, dînd senzația de adîncime; este ceea ce se întîmplă cînd privim într-o oglindă. Fiecare ochi vede pe suprafața ei imaginea care, prin reflectare, se formează anume pentru el. Nu avem senzația că imaginea se formează pe suprafața oglinzii și sîntem tentați să întindem mîna spre obiectele ce ne apar dincolo de suprafața ei.

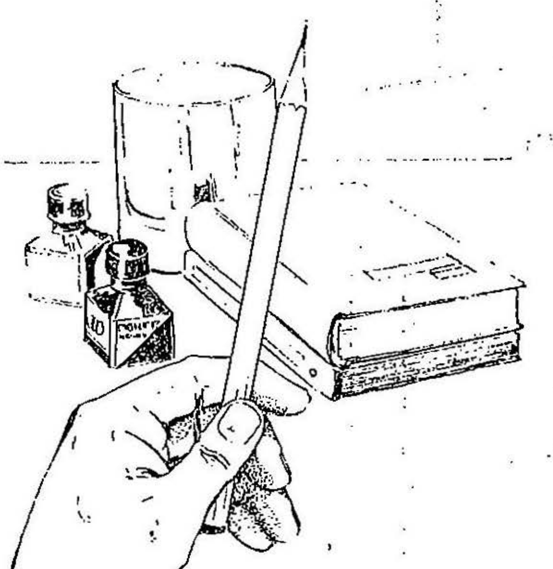


fig. 9.2.7

FENOMENE SUBIECTIVE ALE VEDERII UMANE

Pe lîngă fenomenele de optică fiziologică, perfect măsurabile, vederea umană prezintă o serie de fenomene subiective care sînt numai în parte măsurabile. Aceste fenomene se bazează în special pe relațiile care se stabilesc între excitanții externi, recepționați de ochi, și senzațiile vizuale ce se formează la nivelul scoarței cerebrale. Dacă forma, mărimea sau culoarea imaginii pe care o vedem diferă de cea a proiecției pe retină, înseamnă că stimulii ce ne parvin sînt modificați la nivelul sistemului nervos. Apar așa-numitele *„iluzii optice"*. O mare importanță în formarea senzațiilor vizuale o are experiența trăită. Se știe că orbii din naștere, vindecați, au la început senzația că ating obiectele cu ochii.
Cînd percepem obiecte foarte luminoase sînt excitate pe retină și celulele din jur. Apare un fenomen de iradiere. Astfel o pată albă pe un fond negru apare mai mare decît o pată neagră pe un fond alb, deși cele două pete au aceleași dimensiuni (fig. 9.2.8). La trecerea de la o imagine luminoasă la un fond întunecat, imaginea persistă un timp apoi se întunecă treptat. Aceasta înseamnă că efectul produs de lumină asupra retinei nu dispare în

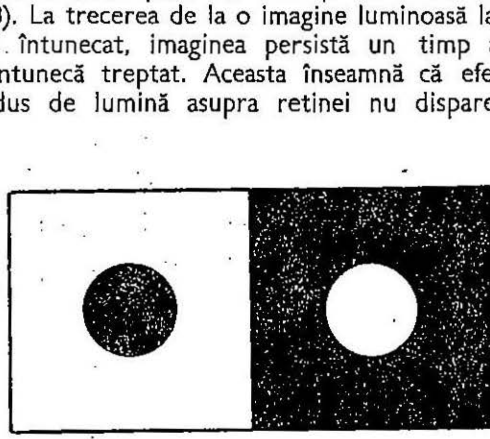


fig. 9.2.8

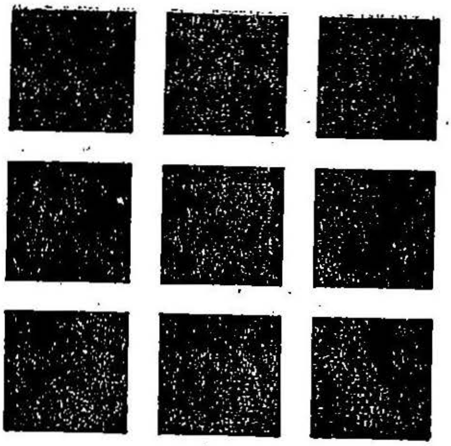


fig. 9.2.9

același timp cu întreruperea stimulului, ci mai durează 1/15...1/20 dintr-o secundă. Persistența imaginilor creează senzația de mișcare continuă și face posibilă vizionarea proiecțiilor cinematografice. În figura 9.2.9 este pus în evidență acest fenomen de persistență, care apare atunci cînd recepționăm o succesiune de tonuri contrastante. La intersecția liniilor albe pe fondul negru apar niște pătrate cenușii.

Rudolf Arnheim arată că „pînă și o configurație vizuală foarte simplă este afectată fundamental de structura ambianței spațiale". În spațiul vizual se creează o serie de relații între elementele sale componente, care fac ca în anumite condiții să avem așa-numitele iluzii optice. În figura 9.2.10, care ilustrează o variantă a iluziei Ponzo, cele două linii verticale par inegale, deoarece noi rămînem în afara sistemului spațial din desen. Să includem aceste două verticale într-o perspectivă (fig. 9.2.11). De data aceasta pătrundem suficient de mult în sistemul spațial creat în desen și vedem cele două verticale egale.

Două linii paralele par curbe dacă se suprapune peste ele un fascicul de drepte convergente într-un punct situat între aceste paralele (fig. 9.2.12). În figura 9.2.13 aceleași linii par frînte.

Cele două segmente egale par a avea mărimi diferite în figura 9.2.14. Cele două cercuri egale din figura 9.2.15 dau impresia că nu au același diametru, dacă unul este înconjurat de un cerc puțin mai mare, iar celălalt de un cerc cu raza de 3...4 ori mai mare. Un spațiu urban nemobilat și pustiu pare mai mic decît același spațiu prevăzut cu o serie de elemente de mobilier urban, pe care să se oprească privirea și să stabilească comparații de mărime și distanță.

Spațiul vizual este considerat anizotrop — același segment de dreaptă pare mai lung în poziție verticală decît în poziție orizontală. Aceasta pentru că

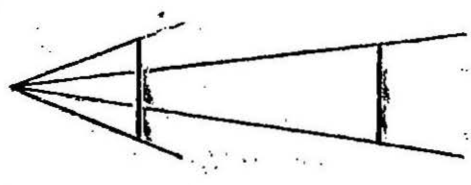


fig. 9.2.10

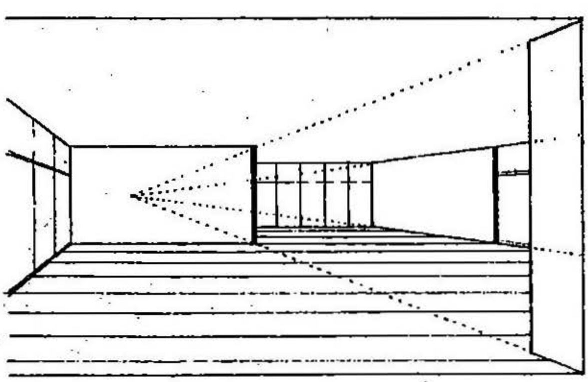


fig. 9.2.11

ochiul are o mai mare mobilitate pe orizontală decît pe verticală.

Desenul și fotografia se deosebesc chiar și de vederea monoculară, cu care sînt comparate. Pentru distanțe apropiate, imaginea realizată cu un singur ochi are un plus de relief față de desen și fotografie, deoarece tensiunea mușchilor ciliari, ce controlează curbura cristalinului, este folosită de sistemul nervos ca indicator al distanței.

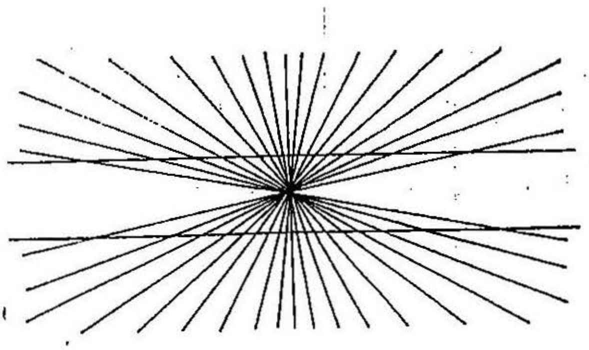


fig. 9.2.12

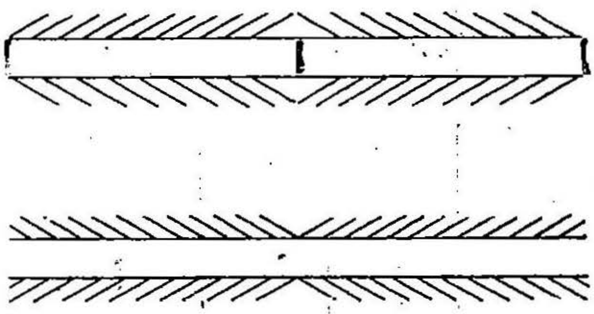


fig. 9.2.13

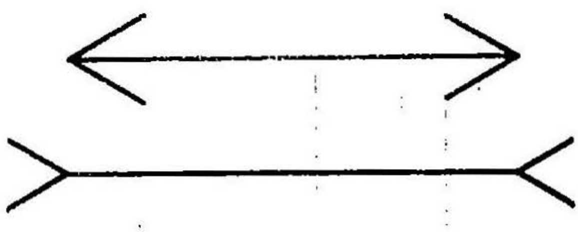


fig. 9.2.14

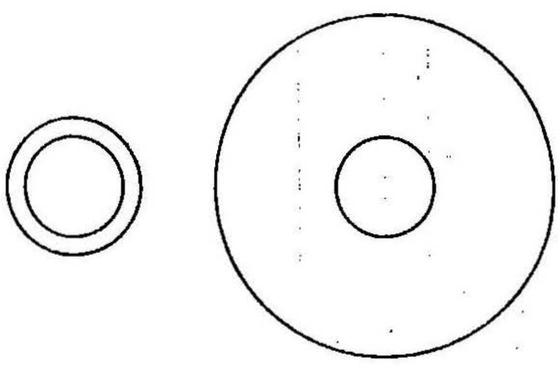


fig. 9.2.15

9.3. GEOMETRIZAREA SIMȚULUI VEDERII

SCURT ISTORIC

Încă din cele mai vechi timpuri omul a încercat să redea prin desen obiectele și ființele din jurul său. La început s-au folosit procedeele cele mai simple de redare a spațiului, cum este metoda bidimensională egipteană sau diferite metode axonometrice. Dacă aceste metode au fost descoperite independent în întreaga lume, la niveluri primitive de concepție vizuală, perspectiva ca proiecție conică a fost descoperită într-un singur loc și într-un singur moment în întreaga istorie — Renașterea. Perspectiva a apărut ca rezultat a unor explorări îndelungi și, așa cum arată R. Arnheim, ea este departe de modul cel mai realist de redare a spațiului vizual.

Spațiul mergînd în profunzime este divizat într-o serie de pătrate care descresc odată cu depărtarea. Pe acest caroiaj sînt desenate obiectele, adaptînd proporțiile lor la dimensiunile descrescînde ale pătratelor. Metoda caroiajelor datează din vremea lui Alberti (1435), a lui Leonardo da Vinci (1492) și a lui Viator (1505), fiind reluată de Vignola (1530—1540) în a doua regulă a sa și apoi apare în majoritatea manualelor pentru artiști.

În figura 9.3.1 este înfățișat mecanismul folosit de Albrecht Dürer în tratatul său despre măsurători. După cum se vede, desenatorul privește printr-un orificiu care îi asigură un punct de observație fix și trasează contururile modelului pe placa verticală. Leonardo da Vinci recomandă pictorilor „metoda vitroului cadrilat", care nu este altceva decît un geam divizat în pătrate, așezat vertical între obiect și desenator. Albrecht Dürer în „Desenatorul alăutei" (1525) ilustrează mecanismul metodei lui Leonardo da Vinci (fig. 9.3.2). Razele vizuale sînt materializate prin diferitele poziții ale unui fir petrecut printr-un inel fix (centrul de proiecție) și care este ținut întins de o greutate. Un desenator urmărește cu cealaltă extremitate a firului diferitele puncte ale obiectului, care sînt rapor-

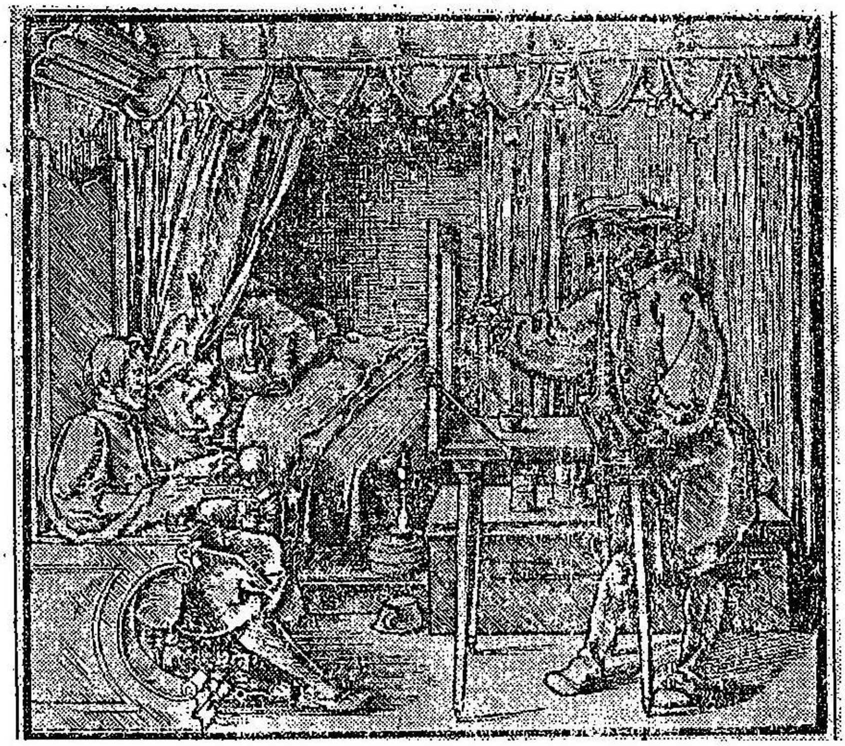


fig. 9.3.1

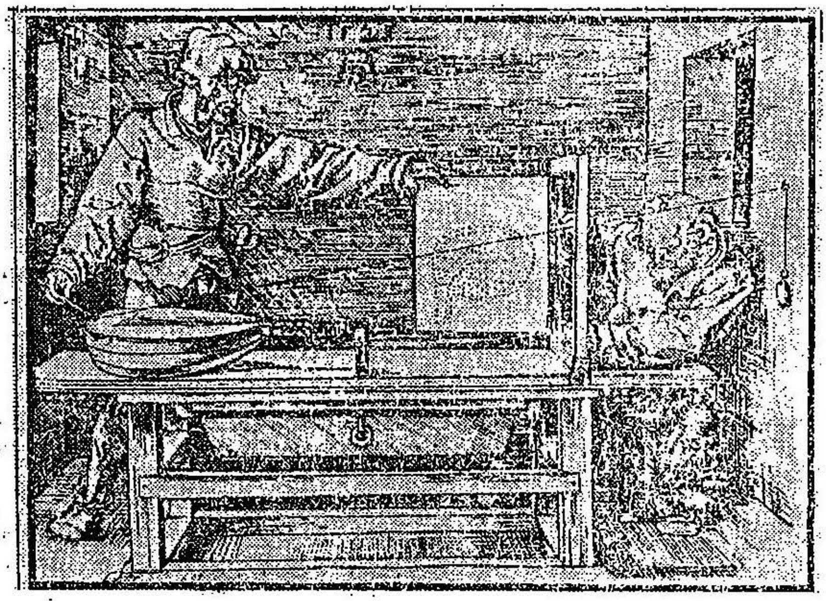


fig. 9.3.2

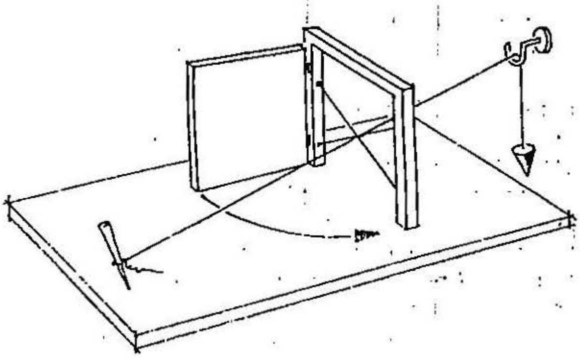


fig. 9.3.3

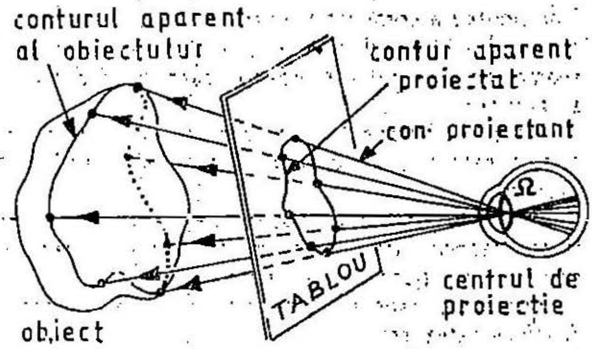


fig. 9.3.4

tate la două din laturile cadrului, situat vertical între centrul de proiecție și obiect. Legat de acest cadru, ca o portiță, este tabloul pe care se trec punctele componente ale obiectului desenat (fig. 9.3.3). Această metodă constituie o primă schemă de construcție geometrică a perspectivei. Preferința către reproducerea mecanică și pentru construcții geometrice a fost dublată, la artiștii Renașterii și la cei ce le-au urmat, de o imaginație creatoare, ca rod al spiritului uman. Chiar și în epoca fotografiei, imaginația este cea care își subordonează mașina și nu invers (*R. Arnheim 1979*).

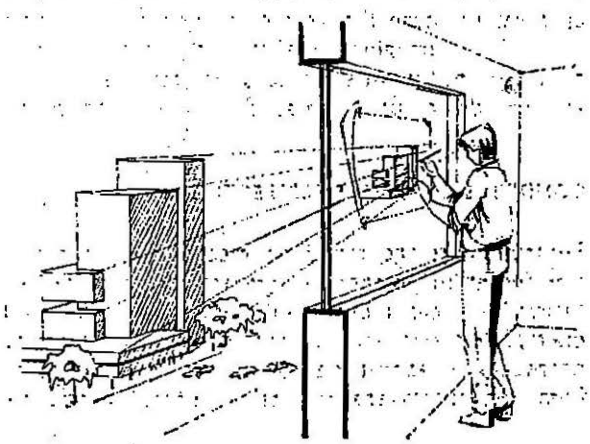


fig. 9.3.5

SCHEMATIZAREA PROCESULUI PERCEPȚIEI VIZUALE

Dacă se consideră ochiul un punct, razele vizuale ca raze proiectante, iar retina se aproximează cu un plan de proiecție, se poate spune că vederea umană funcționează ca un sistem de proiecție conică (proiecție centrală). Razele vizuale ce pornesc din ochi și ating obiectul vizat formează un con vizual (con proiectant). Locul geometric al tuturor punctelor tangente dintre razele vizuale și obiect se numește *conturul aparent al obiectului*. Conturul aparent, împreună cu totalitatea punctelor din interiorul său, formează partea văzută a obiectului vizat din punctul de observație ales (fig. 9.3.4). Intersectînd conul vizual cu un plan (tabloul pictorului) se obține pe el desenul perspectiv al obiectului. Un astfel de desen se poate realiza foarte ușor, desenînd pe geamul unei ferestre obiectele ce se văd prin ea (fig. 9.3.5). Se observă că obiectele desenate nu au forma reală din spațiu, ci proiecția ce se obține pe un plan. Astfel, dreptele paralele din spațiu devin concurente într-un punct numit *punct de fugă*, iar punctele de fugă ale tuturor dreptelor orizontale sînt situate pe o dreaptă numită *linia orizontului*. Linia orizontului este deci dreapta de fugă a tuturor planelor orizontale și o întîlnim atunci cînd privim marea, orizontul fiind linia după care marea „se întîlnește" cu cerul (fig. 9.3.6). Pe tablou linia orizontului desparte perspectiva planului orizontal, ce se întinde în fața observatorului, de perspectiva bolții cerești.

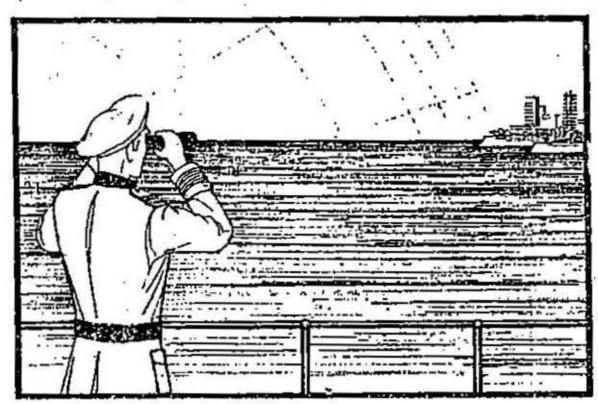


fig. 9.3.6

Dar pentru a compara vederea umană cu o proiecție conică (desenul perspectiv) trebuie să se țină seama de o serie de aspecte care le deosebesc, și anume:

— desenul perspectiv ca rezultat al proiecției conice este fix, vederea umană este în continuă mișcare;

— desenul perspectiv reduce vederea binoculară la cea monoculară și, mai mult decît atît, reduce ochiul la un punct fix — centrul de proiecție;

— desenul perspectiv este plan și nu ține seama de sfericitatea retinei.

Toate acestea fac ca desenul perspectiv să se deosebească de percepția vizuală, de aceea în decursul timpului au existat preocupări intense pentru a le apropia. O parte din aceste metode de a apropia desenul de imaginea realității percepute vor fi amintite în lucrarea de față, în măsura în care acestea devin utile perspectivei de arhitectură.

CONDIȚIILE UNEI BUNE PERSPECTIVE

Pentru a înțelege mai bine mecanismul construcției desenului perspectiv vom arăta cum se petrec lucrurile în cazul desenului după natură, folosind exemplul fotografiei și socotind că ochiul funcționează ca un aparat de fotografiat. Cînd fotografiem, îndreptăm aparatul către centrul geometric al obiectului și ne apropiem sau ne depărtăm de el astfel încît să-l putem cuprinde în cadrul obiectivului. La fel se procedează și în cazul desenului după natură. Pentru a desena un obiect, trebuie să ne îndreptăm direcția privirii către centrul său geometric și să ne situăm la o distanță de el, astfel ca imaginea obiectului să se formeze în întregime pe retină și să fie suficient de clară. Distanța față de obiect dă de fapt unghiul sub care trebuie privit obiectul. Acest unghi se măsoară la vîrful conului de viziune foarte precisă. Pentru a ușura înțelegerea formării conului de viziune clară și precisă se desenează pe un geam un cerc. În funcție de distanța de privire față de geam, se pun în evidență cîmpurile de viziune clară (fig. 9.3.7). La o distanță de geam de patru raze, unghiul la vîrf al conului este de 28°, la trei raze, unghiul este de 37°, iar la două raze, acest unghi este de 53°. Ținînd seama de forma de elipsă a petei galbene și de unghiul de circa 35° corespunzător acuității vizuale maxime, vom adopta pentru construcția perspectivei unghiul de 37° pe orizontală și de 28° pe verticală. La unghiul de 53°, cîmpul se mărește, iar claritatea imaginii scade către marginile ei. În unele cazuri, acest unghi se folosește pentru a putea extinde mai mult perspectiva. Pentru a ne forma obișnuința de a aprecia din ochi distanța la care trebuie să ne plasăm față de obiectul pe care vrem să-l desenăm, Horia Teodoru propune exercițiul cu

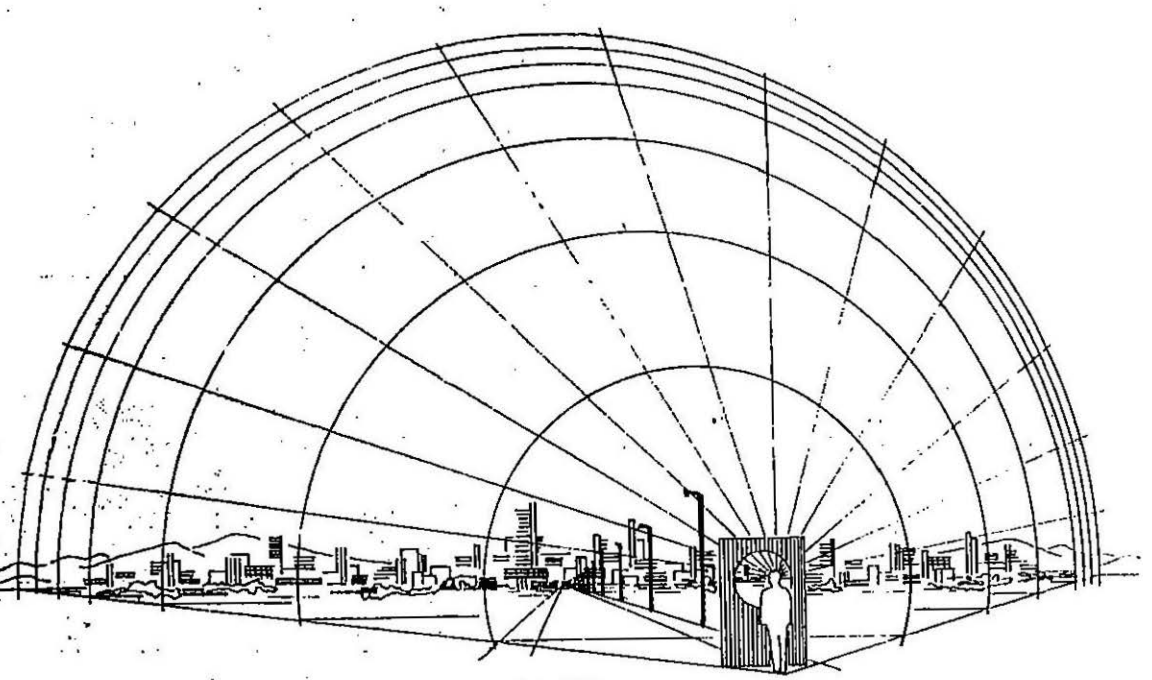


fig. 9.3.7

vizorul perspector (fig. 9.3.8). Acest vizor poate fi confecționat foarte ușor din carton. Are decupat un cerc cu diametrul de 3 cm și un călcîi tangent la cerc pe care sînt marcate distanțele față de centru (2 raze, 3 raze, 4 raze). Extremitatea călcîiului se fixează la baza ochiului și privind prin vizor vom avea certitudinea unui bun plasament față de obiectul de desenat. Dacă schimbăm poziția tabloului, lăsînd fixe obiectul și centrul de proiecție (punctul de observație), vom obține pentru fiecare poziție o nouă perspectivă (fig. 9.3.9). Dar pentru a obține pe tablou o imagine asemănătoare cu cea a obiectului văzut din punctul de observație ales, tabloul trebuie așezat perpendicular pe direcția principală de privire.

Deci, *condițiile unei bune perspective* sînt:

— unghiul sub care este privit obiectul trebuie să fie de 37° pe orizontală și de 28° pe verticală;

— direcția principală de privire va fi îndreptată către centrul geometric al obiectului sau al ansamblului;

— tabloul se va lua totdeauna perpendicular pe direcția principală de privire.

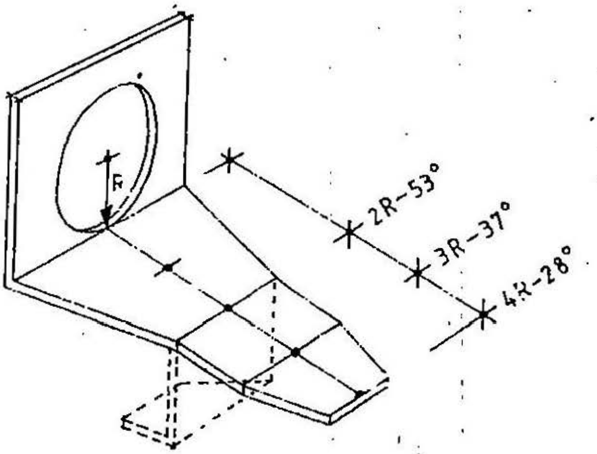


fig. 9.3.8

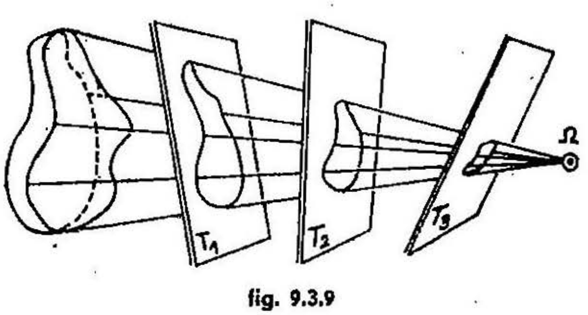


fig. 9.3.9

ANAMORFOZELE

Dacă tabloul nu este perpendicular pe direcția principală de privire, imaginea perspectivei va fi deformată; rezultînd așa-numitele *efecte excesive de perspectivă — anamorfozele*. Același efect se obține dacă se proiectează niște diapozitive pe un ecran ce nu este așezat perpendicular pe direcția de proiecție a aparatului. Efecte excesive de perspectivă apar și atunci cînd unghiul de proiecție este cu mult mai mare decît cel stabilit pentru o bună perspectivă. Pozele făcute cu obiective de deschideri foarte mari prezintă astfel de efecte.

Este sigur că cei care au descoperit perspectiva, în Renaștere, au descoperit și efectele ei excesive. Extinzînd foarte mult grătarul perspectiv au rezultat acele desene deformate, care însă puteau fi redresate optic. Descoperind mecanismul de construcție al anamorfozelor, ei au căutat să le amplifice efectele, exagerînd proporțiile pînă la absurd, acestea devenind o preocupare predilectă a epocii. Termenul de anamorfoză a fost adoptat mai tîrziu, mai întîi în Germania și după un secol și în Franța. I. Baltrušaidis citează lucrarea matematicianului și filozofului german Wolf (1715) în care perspectiva este împărțită în trei părți: obișnuită, militară și ciudată. Enciclopedia lui Diderot și d'Alembert (1751) impune termenul pe care îl și explică: „În pictură, se spune anamorfoză despre o proiecție monstruoasă sau despre o reprezentare denaturată a unei imagini care este făcută pe o suprafață plană și care, dintr-un punct anumit de vizionare, pare totuși naturală și redată în proporții juste". S-au folosit două metode de construcție a anamorfozelor:

— m e c a n i c ă, în care un desen corect era perforat cu acul și luminat cu o lampă, anamorfoza obținîndu-se pe un plan ce nu era paralel cu planul desenului perforat (fig. 9.3.10);

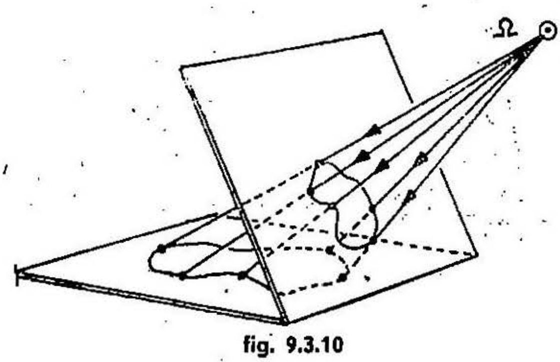


fig. 9.3.10

— g r a f i c ă, în care desenele se executau pe un grătar perspectiv deformat, redresarea optică făcîndu-se prin vizionarea lor dintr-un punct fix dinainte stabilit (fig. 9.3.11 şi 9.3.12).

De multe ori anamorfozele se dovedesc necesare, de exemplu în picturile murale aşezate la mari înălţimi sau pe bolţi, în decorurile de teatru şi în arhitectură. În arhitectură anamorfoza este realizată spaţial, creînd senzaţii de accelerare a perspectivei sau de încetinire a ei.

Prin *perspectiva accelerată*, arhitecţii Renaşterii amplificau senzaţia de spaţiu arhitectural, deformînd în mod voit senzaţia de perspectivă. Un exemplu mult citat în tratatele de specialitate este cel al Vilei Spada din Roma construită de Francesco Borromini (1635). Arhitectul a reuşit aici să realizeze o perspectivă arhitecturală adîncă într-un spaţiu relativ mic, îngustînd spre profunzime o colonadă boltită. Dacă priveşti spre colonadă vezi un tunel lung flancat de coloane, care te conduce către statuia relativ mare a unui luptător. În interiorul colonadei privitorul este complet derutat. Colonada are doar 8,5 m lungime, primul arc este înalt de circa 6 m şi lat de 3 m, ultimul arc este

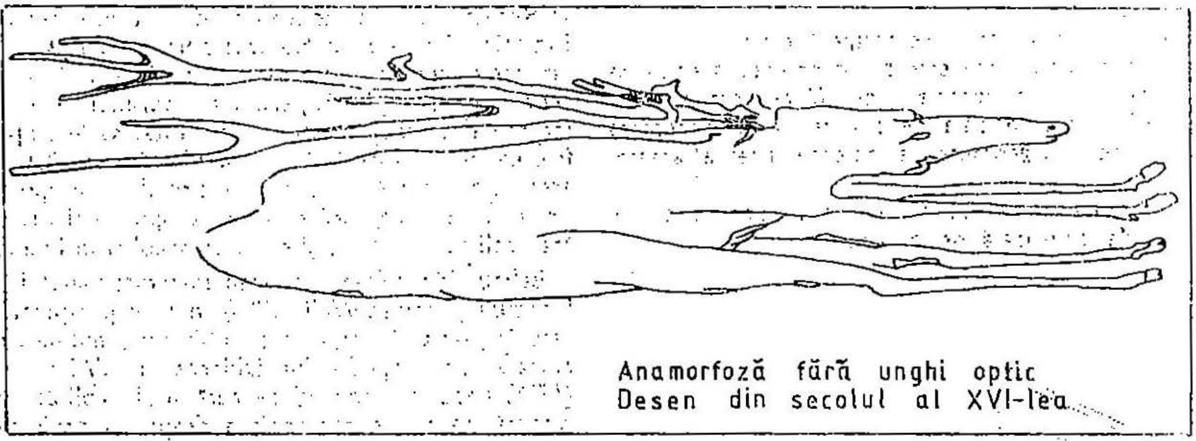


fig. 9.3.11

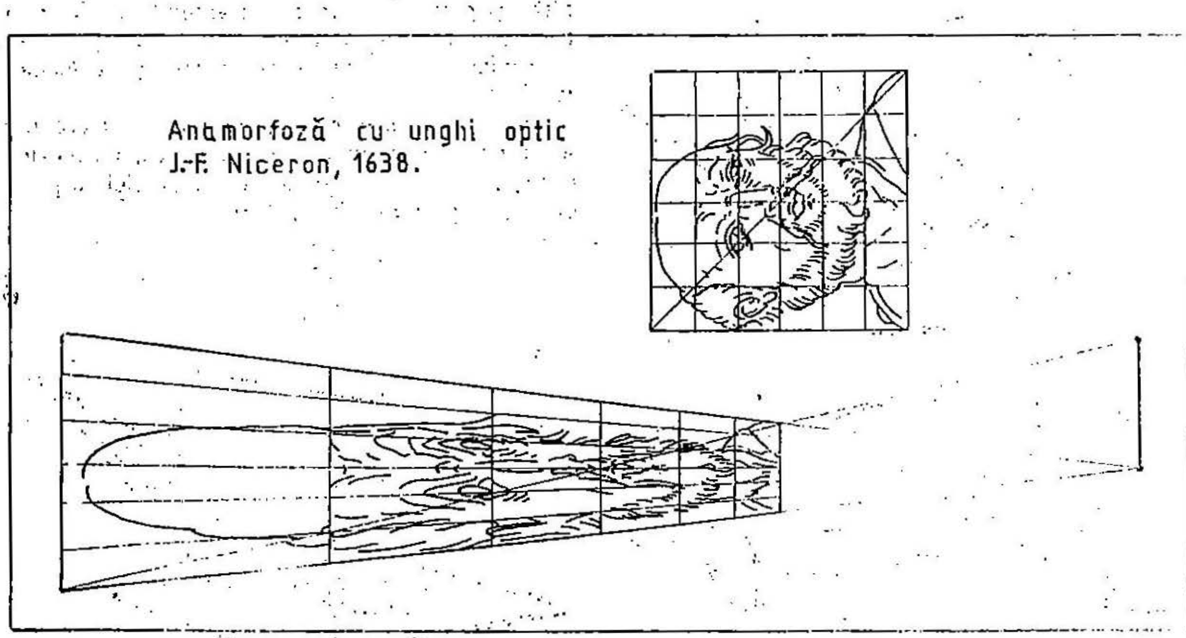


fig. 9.3.12

înalt de numai 2,4 m și lat de 1 m, de asemenea pardoseala se înalță, iar intervalul dintre coloane se micșorează. Odată ajunși lîngă statuia luptătorului se constată că aceasta este destul de mică. Procedeul contrar duce la obținerea unei *perspective încetinite*. Mărind dimensiunile obiectelor depărtate, acestea par mai aproape decît sînt. Această metodă este explicată în toate tratatele de perspectivă. Dürer (1545) o explică pentru coloane și pentru litere, Serlio (1545) pentru apareajul zidăriei. Referitor la această perspectivă Baltrušaidis amintește o istorioară privind pe Fidias. Cu ocazia unui concurs pentru o statuie a Minervei, ce trebuia să fie așezată pe un pilastru, Alcamene a sculptat o statuie armonioasă, iar Fidias una cu membrele diforme, cu gura căscată și nasul alungit. În ziua expoziției primul a fost lăudat, iar al doilea a fost luat în rîs. Situația s-a inversat odată cu punerea statuilor la locul stabilit. R. Arnheim îl citează pe Vasari care în perioada Renașterii spunea că atunci cînd statuile urmează să fie puse pe un loc înalt și nu este suficient spațiu sub ele, pentru a le privi, acestea trebuie executate cu un cap sau două mai înalte.
La colonada din Piața San Pietro din Roma, Bernini folosește, de asemenea, perspectiva încetinită creînd acel trapez cu latura mică către privitor, iar Michelangelo uzează de același procedeu la Piața Capitoliului.

CORECȚII OPTICE

Efectele de perspectivă pot deveni uneori supărătoare în perceperea unor elemente de arhitectură. Dacă de cele mai multe ori perspectiva ajută la orientarea în spațiu și la perceperea corectă a distanțelor, de multe ori efectele ei fac ca să nu se mai perceapă elementele ca avînd proporțiile cunoscute. Vechii greci au cunoscut foarte bine toate acestea și, deși nu au folosit perspectiva în reprezentările grafice, au recurs adesea la o serie de artificii care să corecteze unele efecte supărătoare ale ei, în domeniul arhitecturii. Aceste metode de corectare a defectelor de percepere a elementelor de arhitectură sînt adesea semnalate în tratatele de specialitate sub denumirea de *corecții optice*. Arhitecții antici au ajuns la rafinamente deosebite în acest domeniu, fapt care a făcut ca realizările lor de arhitectură să fie de o inegalabilă frumusețe.
Coloana de colț ce se profilează pe gol pare mai subțire decît cele profilate pe plin (pe clădire), de aceea grecii o îngroșau cu a 50-a parte din diametrul ei (fig. 9.3.13). Ochiul percepe coloanele frontale cilindrice ca fiind concurente într-un punct situat deasupra. Pentru a corecta acest defect optic grecii îngroșau coloanele în partea de jos, prin operația numită galbare.

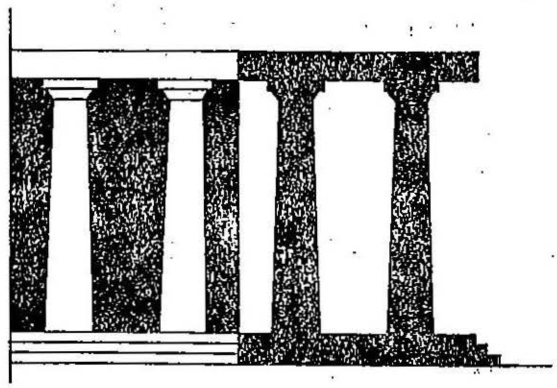


fig. 9.3.13

Frontonul, care așezat vertical pare înclinat pe spate, era așezat puțin înclinat spre față, iar arhitravele erau scoase cu a 20-a parte din înălțimea lor. Liniile orizontale ale fațadelor erau în proiecție hiperbole, pentru a anula curbura ce rezulta din percepția vizuală. Această curbură de corecție era aplicată și suprafețelor, astfel o pardoseală dalată era executată cu o umflătură ușoară în centru, fiind știut faptul că un caroiaj plan este perceput cu o mică depresiune în mijloc.
La Panteonul din Roma casetele de pe cupolă sînt astfel construite pentru a se vedea la fel, indiferent de poziția lor pe curba cupolei. Valabilitatea acestor procedee a fost probată atunci cînd, în epoca modernă, s-a încercat copierea fidelă a o serie de monumente ale Antichității, fără să se țină seama de corecțiile optice. Deși au folosit proporțiile antice, copiile moderne au dezamăgit, neridicîndu-se la frumusețea celor dintîi.

COMPARAREA MĂRIMILOR ÎN PERSPECTIVĂ

În perspectiva de observație, cît și în perspectiva după natură sau construită, este foarte greu să se aprecieze cu exactitate distanțele, lungimile sau mărimile unghiulare, fără să existe elemente de dimensiuni cunoscute, cu ajutorul cărora să se măsoare în perspectivă. Această măsurare se face cu ușurință în planele frontale și cu oarecare dificultate în profunzime. Elementul de dimensiuni cunoscute poate deveni modulul cu ajutorul căruia se poate măsura.
Astfel, lungimea unei străzi poate fi măsurată cu privirea, numărînd intervalele dintre stîlpii de ilu-

minat. Aceste intervale de dimensiuni cunoscute servesc drept modul de apreciere a lungimilor. De asemenea, înălţimea unui bloc de locuit se poate afla numărînd nivelele şi înmulţind cu înălţimea de etaj cunoscută.

Pe o mare foarte liniştită, un vas pare mult mai aproape decît în condiţiile unei mări plină de talazuri. Valurile constituie termen de comparaţie, care redă mult mai bine profunzimea. Cine nu a privit cerul într-o noapte cu lună plină? Cînd este la orizont luna pare enormă, în timp ce dimensiunile ei scad apreciabil pe măsură ce urcă pe bolta cerească. La orizont casele, copacii, relieful constituie tot atîtea elemente de comparaţie. Tot atît de greu este de apreciat pe boltă distanţa dintre două avioane sau altitudinea la care se găsesc. Se ştie că, cu cît obiectele sînt mai depărtate, cu atît se văd mai mici. Un caz paradoxal îl constituie aprecierea mărimii unei sfere. Văzută de aproape, sfera pare mai mică decît de la depărtare. Geometric, de la depărtare se vede o porţiune mai mare de calotă (fig. 9.3.14). Dacă privim munţii, de la depărtare par mai înalţi, deoarece le descoperim şi părţile ascunse (în cazul perspectivei pe tablou vertical). La aprecierea mărimii valurilor, lucrurile se petrec invers (creîndu-se o perspectivă pe tabloul înclinat). Văzut de aproape, un bloc-turn pare mult mai înalt (perspectivă pe tablou înclinat), văzut de departe putem să-i apreciem adevărata mărime (perspectivă pe tablou vertical). „Concluzia celor spuse mai înainte este că, în majoritatea cazurilor, evaluarea mărimilor în spaţiu are loc printr-o serie de comparaţii cu mărimi şi calităţi ale lucrurilor deja cunoscute, iar determinarea unei mărimi necunoscute este cu atît mai sigură cu cît ea este înscrisă într-un context cunoscut" (*Corado Malteze*, 1979).

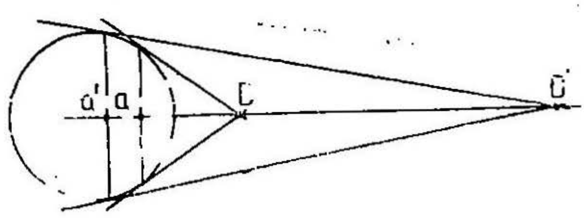


fig. 9.3.14

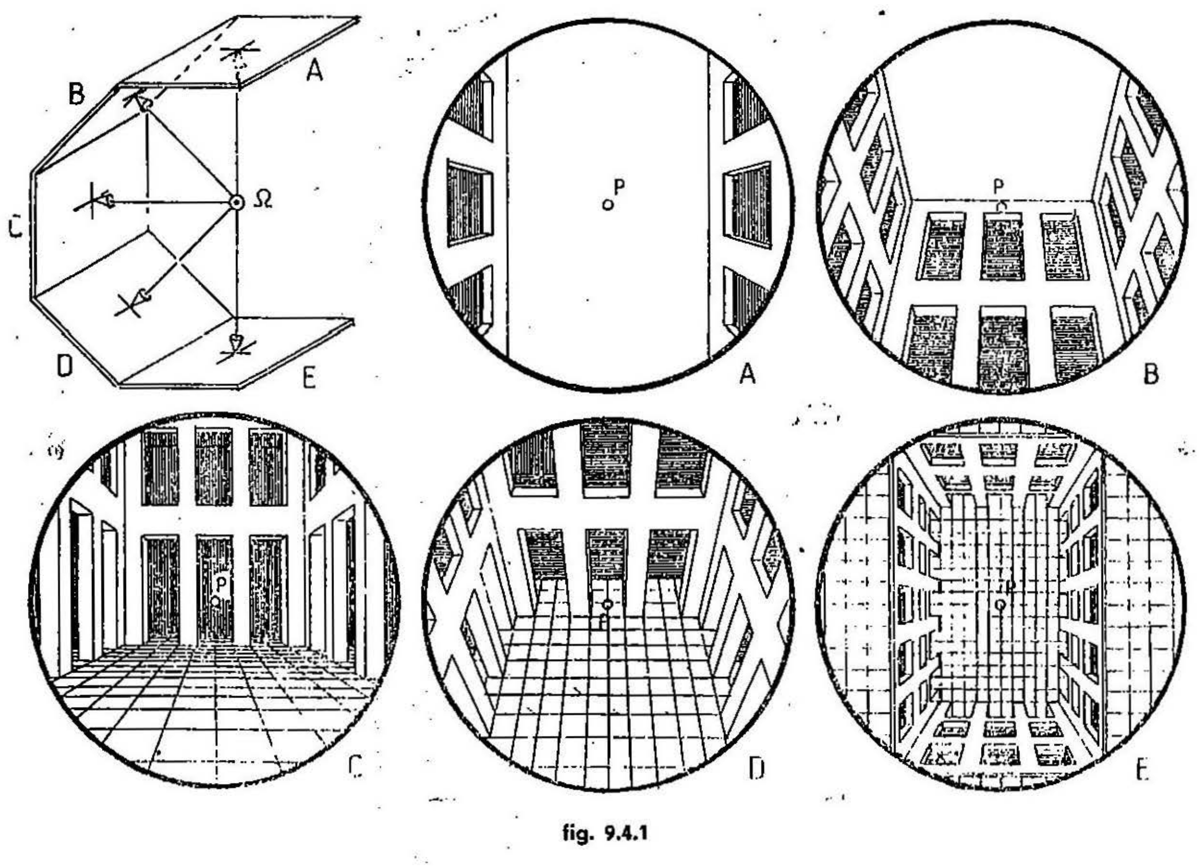


fig. 9.4.1

9.4. CLASIFICĂRILE PERSPECTIVEI

Perspectiva a fost împărțită de Leonardo da Vinci în două mari capitole:
— *perspectiva liniară*, care are ca scop determinarea urmei fiecărei raze vizuale pe tabloul de perspectivă, prin construcții geometrice de proiecție conică. Pe lîngă punerea în perspectivă a diferitelor obiecte, perspectiva liniară se mai ocupă și cu construcția umbrelor și a oglindirilor;
— *perspectiva aeriană*, care se ocupă cu modelarea perspectivei liniare, adică cu gradația umbrei și a luminii, cu gradația culorilor în funcție de distanță și de reflexe. Deoarece toate aceste operații nu pot fi prinse în formule și trasee geometrice, perspectiva aeriană se bazează foarte mult pe experiența perspectivei de observație (desenul după natură).

CLASIFICĂRILE PERSPECTIVEI LINIARE

1) După poziția direcției principale de privire
În funcție de direcția privirii, tabloul poate să ia poziții diferite, după cum se vede în figura 9.4.1. În pozițiile A și E tabloul este orizontal, în poziția C tabloul este vertical, iar în pozițiile B și D tabloul este înclinat. Se observă foarte ușor că pozițiile A și E dau imagini asemănătoare cu cea din poziția C sau, mai exact, formează același tip de perspectivă; acestea fiind mai rar folosite în construcția perspectivei de arhitectură, se vor studia în continuare doar două tipuri de perspectivă: pe tablou vertical și pe tablou înclinat.
a) *Perspectiva pe tablou vertical.* Direcția principală de privire este orizontală, iar tabloul este vertical deoarece este perpendicular pe direcția principală de privire. Această perspectivă păstrează verticalele din spațiu și în tabloul de perspectivă, iar pe aceste verticale se păstrează aceeași unitate de măsură. Perspectiva pe tablou vertical este și ea de trei tipuri:
— perspectivă frontală centrală (fig. 9.4.2, a);
— perspectivă frontală laterală (fig. 9.4.2, b);
— perspectivă de colț sau la 2 puncte de fugă (fig. 9.4.2, c).
Toate aceste trei tipuri pot fi construite fiecare în trei moduri diferite, și anume:
— perspectiva la nivelul ochilor — linia orizontului este la înălțimea omului — H = 1,80 m (fig. 9.4.3).
— perspectiva cu orizont supraînălțat — linia orizontului este mai sus decît cota celui mai înalt obiect pus în perspectivă (fig. 9.4.4);

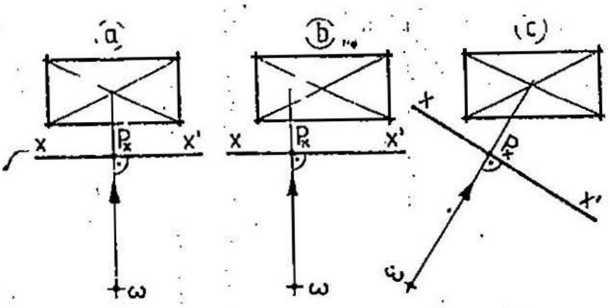


fig. 9.4.2

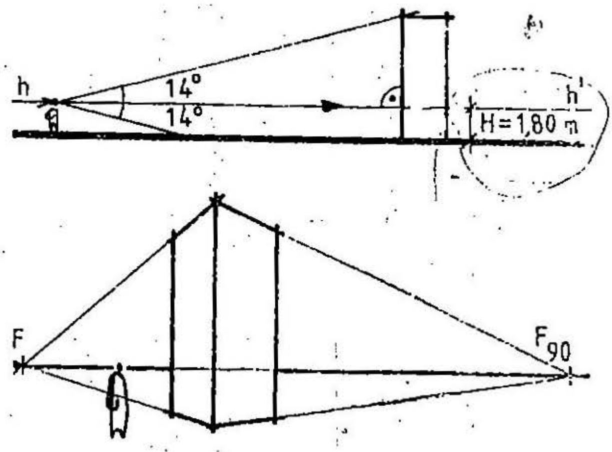


fig. 9.4.3

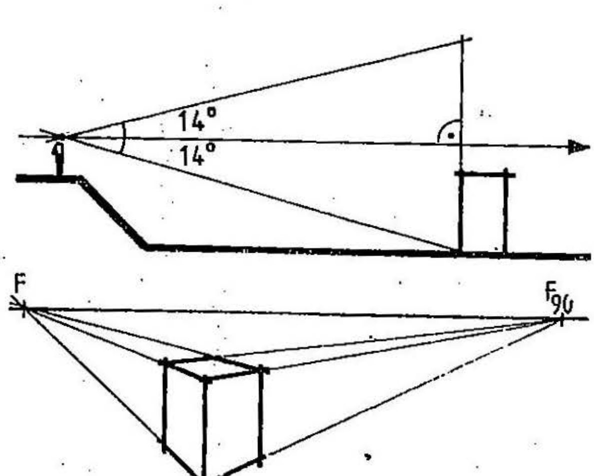


fig. 9.4.4

— perspectiva cu orizont coborît — linia orizontului este mai jos decît cota $\pm 0,00$ a obiectului pus în perspectivă (fig. 9.4.5).

b) *Perspectiva pe tablou înclinat.* Verticalele din spaţiu sînt concurente în perspectiva pe tablou înclinat, iar unităţile de măsură se micşorează pe verticală. Perspectiva pe tablou înclinat este de două feluri:

— perspectivă ascendentă — direcţia principală de privire este ascendentă; este utilizată la perspectiva obiectelor de arhitectură foarte înalte sau la perspectiva de interior a plafoanelor (fig. 9.4.6);

— perspectivă descendentă — direcţia principală de privire este descendentă; este utilizată în perspectiva ansamblurilor văzute de la mari înălţimi (fig. 9.4.7).

2) **După forma tabloului**

a) *Perspectiva pe tablou cilindric cu axa verticală.* Se introduce un unghi vizual mai mare decît unghiul optim pe orizontală. Este tabloul utilizat în vederile panoramice (la ansamblurile de obiecte de mică înălţime şi de mare desfăşurare orizontală). Acest tablou se poate desfăşura pe un tablou plan (fig. 9.4.8).

b) *Perspectiva pe tablou cilindric cu axa fronto-orizontală.* Se introduce un unghi vizual vertical mai mare decît unghiul optim perspectiv de 28°. Acest tablou se utilizează în cazul unui obiect cu o înălţime foarte mare, aproximînd mai bine decît tabloul înclinat, perspectiva acelui obiect. Şi acest tablou cilindric se poate desfăşura pe un tablou plan (fig. 9.4.9).

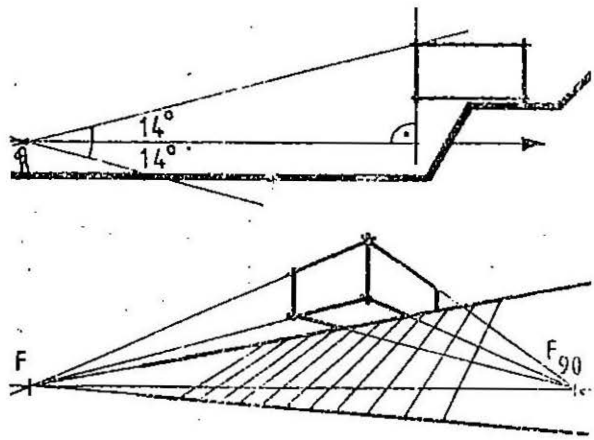


fig. 9.4.5

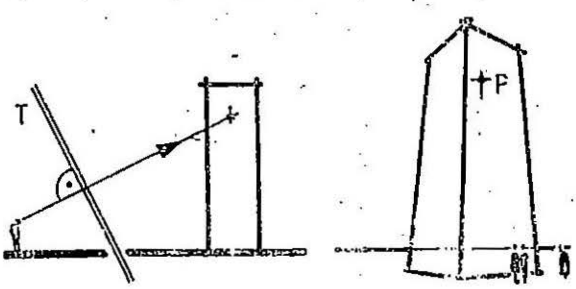


fig. 9.4.6

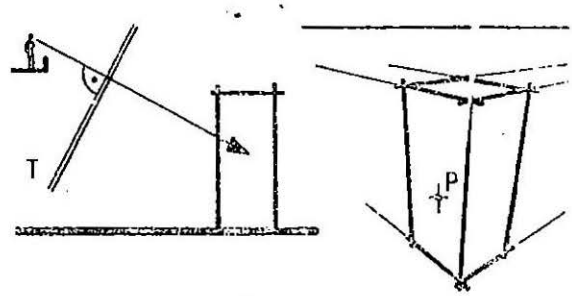


fig. 9.4.7

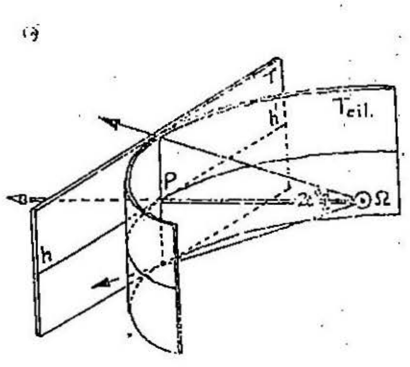


fig. 9.4.8

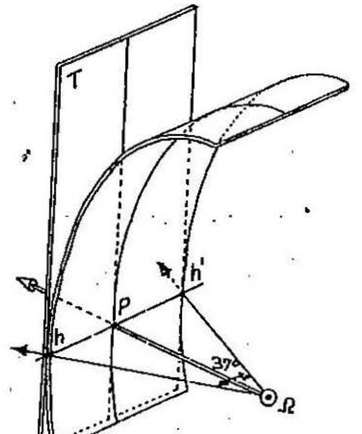


fig. 9.4.9

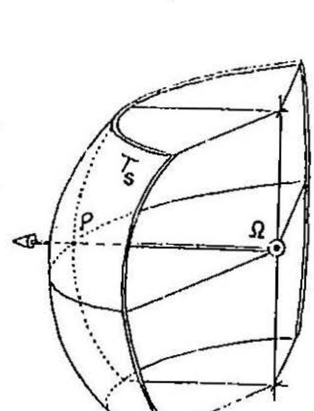


fig. 9.4.10

c) *Perspectiva pe tablou sferic.* La această perspectivă punctul de vedere este centrul sferei respective Ω, corespunzînd unei vederi care depășește în toate direcțiile unghiul de valabilitate al proiecției conice în perspectivă. Un asemenea tablou nu se mai poate desfășura pe un tablou plan tangent sferei (fig. 9.4.10).
Toate aceste tipuri de perspectivă care înlocuiesc tabloul plan cu unul curb încearcă să se apropie cît mai mult de realitate, dar folosirea lor este anevoioasă și nu se dovedește utilă decît în cazuri cu totul izolate. Cinematograful modern încearcă tot mai mult utilizarea unor astfel de ecrane, pentru a crea spectatorului senzația de real.

9.5. ELEMENTELE SISTEMULUI PERSPECTIV

Sistemul perspectiv este un sistem de proiecție centrală (proiecție conică). După cum s-a văzut în capitolul introductiv, orice sistem de proiecție centrală se compune dintr-un centru de proiecție, razele proiectante și planul de proiecție. Centrul de proiecție se numește *punct de vedere* Ω (punct de observație), planul de proiecție — *tabloul de perspectivă* T, iar razele proiectante — *raze vizuale*. Raza vizuală principală se numește *direcție principală de privire*. Locul unde direcția principală de privire înțeapă tabloul este *punctul principal de privire* P. În figura 9.5.1 este ilustrat sistemul perspectiv cu tabloul vertical (deci direcția principală de privire este orizontală). Tabloul este perpendicular pe planul orizontal pe care stau obiectele și care aproximează pămîntul. Planul vederii este paralel cu planul pămîntului și se mai numește și planul orizontului. El intersectează tabloul după *linia orizontului* (h, h'). Intersecția tabloului cu planul pămîntului se numește *baza tabloului*. *Planul neutru* este planul ce trece prin punctul de vedere și este paralel cu tabloul. Intersecția lui cu planul pămîntului se face după *linia neutră*. Proiecția punctului de vedere pe planul pămîntului constituie *poziția observatorului* ω și se citește numai în proiecție orizontală. Rabătînd punctul de vedere Ω pe linia orizontului se obține *punctul de distanță* D, în dreapta și în stînga punctului principal de privire P.
Tabloul de perspectivă și planul neutru împart spațiul în trei părți:
— *spațiul real*, de la tablou către infinit;
— *spațiul intermediar*, între tablou și planul neutru;
— *spațiul virtual*, în spatele planului neutru, deci în spatele observatorului.
În spațiul real se află majoritatea obiectelor văzute din punctul de vedere ales. Reprezentările perspective sînt mai mici decît obiectele situate în spațiul

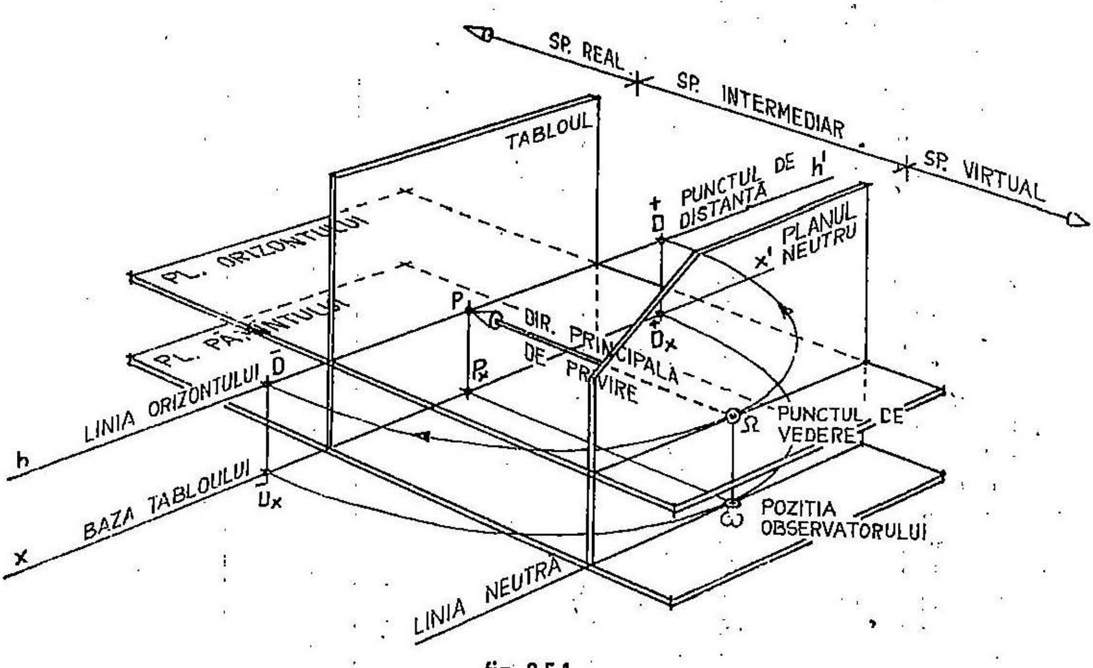


fig. 9.5.1

real. Ori de cîte ori reprezentările obiectelor pe tablou sînt mai mari decît obiectele din spaţiu, acestea din urmă se găsesc în spaţiul intermediar. Obiectele situate în spaţiul virtual, deci în spatele observatorului, nu pot fi reprezentate decît prin oglindire.

Odată cu schimbarea direcţiei privirii desenatorului, se schimbă şi direcţia planului tabloului şi a planului neutru spre a rămîne perpendiculare pe direcţia principală de privire. Se schimbă totodată şi poziţia şi numărul obiectelor ce intră în cîmpul vizual. Cînd se construieşte o perspectivă, direcţia principală de privire rămîne fixă, iar dacă se doreşte să se cuprindă în tablou cît mai multe obiecte, se măreşte de fapt unghiul optim pentru obţinerea unei bune perspective. Se vor studia toate acestea mai pe larg la alegerea punctului de vedere.

La un desen perspectiv punctul de vedere este unic. Fac excepţie vastele compoziţii cu o mare desfăşurare, care nu pot fi cuprinse dintr-o singură privire nici de creator nici de privitor. Aceste compoziţii pot avea mai multe puncte de vedere.

9.6. MECANISMUL PERSPECTIVEI CONICE PE TABLOU VERTICAL

Se ştie din experienţa vizuală că dacă se priveşte în lungul unei căi ferate se observă convergenţa şinelor într-un punct situat pe linia orizontului. În figura 9.6.1 este greu de spus pe care linie vine trenul. Aceeaşi convergenţă a liniilor se observă şi în cazul unei prisme drepte dreptunghiulare. Privită de la o distanţă relativ mică în raport cu dimensiunile ei, convergenţa muchiilor este mai accentuată. Odată cu depărtarea, obiectul se apropie de linia orizontului, iar convergenţa muchiilor sale scade (fig. 9.6.2).

În perspectiva conică se observă că dreptele paralele din spaţiu sînt concurente pe tabloul de perspectivă într-un punct, numit *punct de fugă*, care se notează cu F. Dacă cele două drepte sînt paralele cu planul orizontal (drepte de nivel), atunci punctul lor de fugă F este situat pe linia orizontului (fig. 9.6.3). Segmentul AB cu punctul Ω formează planul [P_1], iar segmentul CD cu punctul Ω formează planul [P_2]. Cele două planuri [P_1] şi [P_2], avînd un punct comun (punctul de vedere Ω), au o dreaptă comună — dreapta lor de intersecţie ΩF, care este paralelă cu AB şi CD. Intersectînd cele două planuri [P_1] şi [P_2] cu un al treilea plan [T] — tabloul vertical, rezultă două drepte de intersecţie A*B* şi C*D* concurente pe dreapta de intersecţie a planelor [P_1] şi [P_2] în punctul F (punctul lor de fugă pe tabloul vertical T).

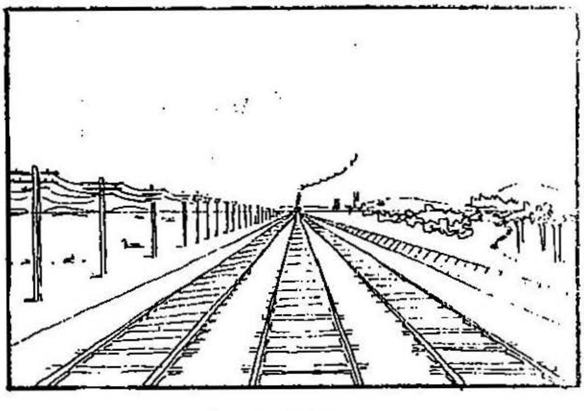


fig. 9.6.1

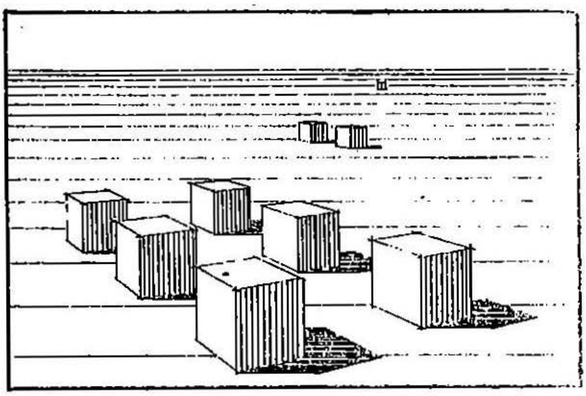


fig. 9.6.2

Figura 9.6.4 ilustrează axonometric mecanismul de construcţie a perspectivei pentru o prismă dreaptă dreptunghiulară ce are o poziţie în unghi faţă de tablou, iar punctul de vedere este situat deasupra ei. Rezultă perspectiva de colţ a prismei (la două puncte de fugă). Principiul constă în a intersecta fiecare rază vizuală cu tabloul, acesta fiind obiectul perspectivei liniare. Această operaţie se poate face pe două căi:

— folosind razele vizuale directe şi proiecţiile lor pe planul orizontal;

— folosind razele vizuale directe şi punctele de fugă, după ce s-a determinat înainte un punct de intersecţie prin prima metodă. Punctul de fugă se află ducînd din Ω paralele la muchiile prismei.

Acest procedeu stă la baza construcţiei perspectivei prin metoda dependentă.

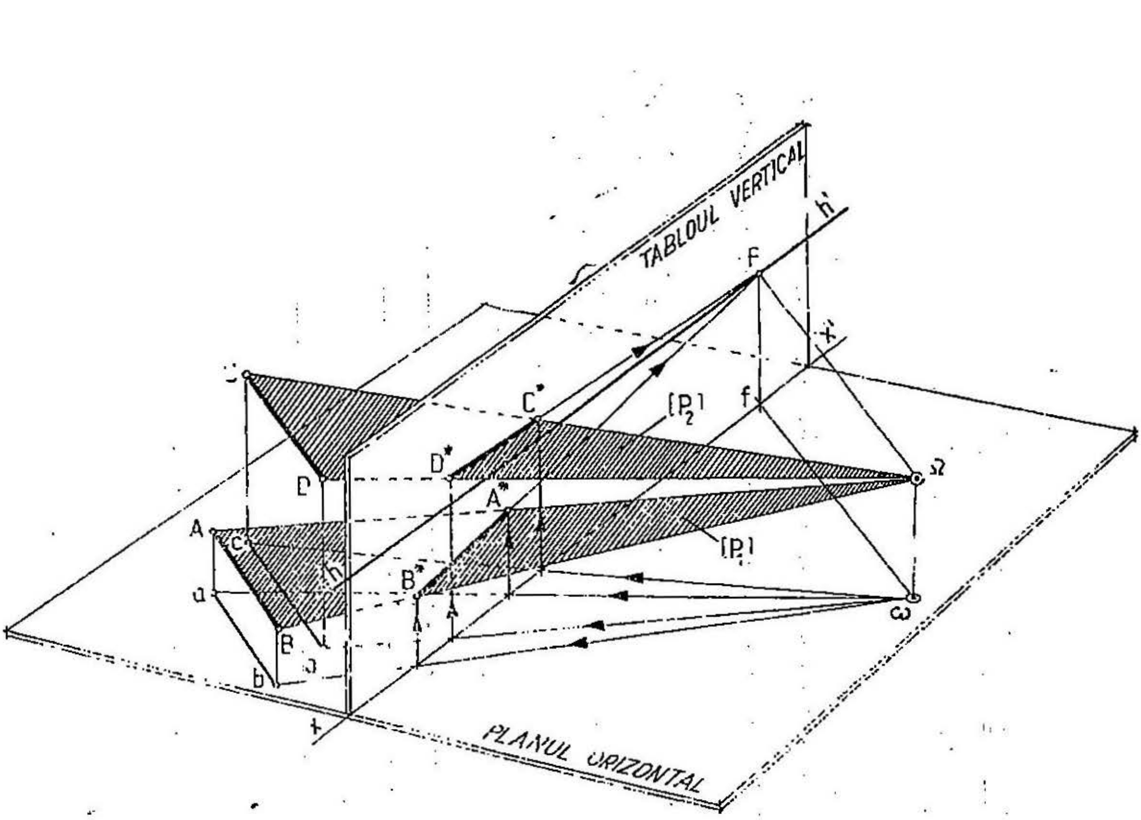


fig. 9.6.3

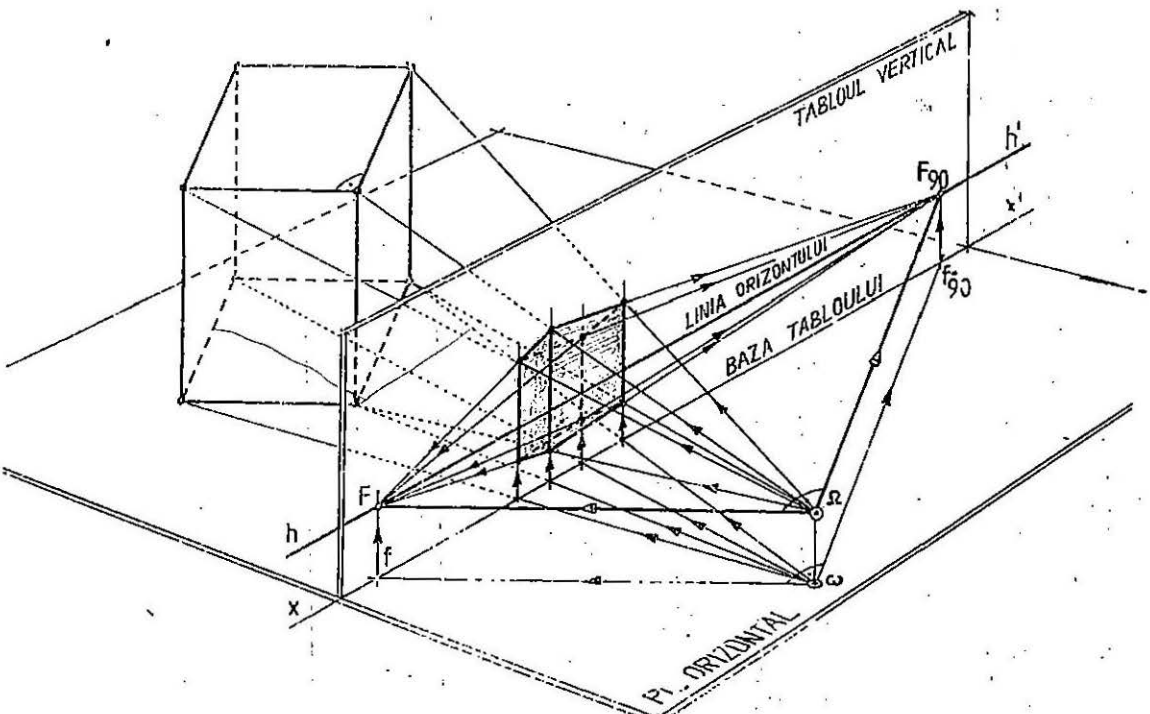


fig. 9.6.4

9.7. PROPRIETĂȚILE GEOMETRICE ALE PERSPECTIVEI

Așa cum s-a arătat în capitolul introductiv, perspectiva ca rezultat al proiecției conice are următoarele proprietăți geometrice:
— păstrează punctul, dreapta și intersecția;
— păstrează relațiile de incidență — coliniaritatea și concurența dreptelor;
— păstrează biraportul a patru puncte coliniare;
— raportul a trei puncte nu se păstrează în perspectivă;
— dreptele paralele din spațiu apar în perspectivă concurente în punctul de fugă;
— în perspectivă nu se păstrează relațiile metrice — dimensiunile liniare, suprafețele și unghiurile;
— curbele își păstrează gradul și tangența.

9.8. METODELE DE CONSTRUCȚIE ALE PERSPECTIVEI

Studiul teoretic al perspectivei și practica de proiectare au evidențiat patru metode distincte de construcție a perspectivei.
Metoda descriptivă sau dependentă recurge la epura de geometrie descriptivă (plan — vedere) și constă în a determina punctele de intersecție ale razelor vizuale cu tabloul. A fost inițiată și dezvoltată de Brunelleschi, Leonardo da Vinci, Monge. Este o metodă exactă, dar anevoioasă și neintuitivă.
Metoda liberă sau directă permite construcția perspectivei fără a folosi direct dubla proiecție ortogonală, bazîndu-se pe invarianții proiecției conice. Este o metodă intuitivă, deoarece toate operațiile se rezolvă direct în tabloul de perspectivă. Cei care au inițiat-o și dezvoltat-o au fost Desargues, Lambert, Poncelet.
Metoda axonometrică constă în trasarea desenului direct pe o rețea perspectivă dinainte construită pe tablou. Rețeaua conține și unitatea de măsură pe cele trei direcții, materializate de obicei prin rețele pătratice. Inițiată de pictorii Renașterii italiene, această metodă a fost dezvoltată de Desargues, Abraham Bosse și Pierre Olmer.
Perspectiva de observație este metoda desenului după natură și practicarea ei poate duce la descoperirea legilor perspectivei, formînd și o bună vedere în spațiu. Studiul perspectivei de observație apropie desenul de realitatea văzută.
În practica curentă, aceste metode se întrepătrund, lăsînd perspectivei dependente sarcina de a pune în mare volumele în perspectivă, după care prin perspectiva liberă sînt finisate detaliile. În lucrarea de față se dezvoltă o *metodă mixtă* care să permită o construcție intuitivă, exactă și rapidă a perspectivei.

9.9. RECOMANDĂRI ÎN PRACTICA DESENULUI PERSPECTIV

Pentru a obține rapid o perspectivă bine construită și expresivă, trebuie să se țină seama de următoarele:
— metoda de construcție a perspectivei se alege în funcție de tipul perspectivei și de obiectele ce compun ansamblul de desenat;
— traseele geometrice și succesiunea lor să reprezinte clar fenomenul geometric din spațiu. Pentru aceasta se recomandă să nu se folosească construcții geometrice abstracte;
— metoda de construcție aleasă trebuie să creeze o imagine spațială care să permită desenatorului să-și controleze desenul încă de la primele linii,
— construcțiile grafice să nu depășească cu mult tabloul de perspectivă și, în orice caz, să se poată executa în cadrul planșetei;
—metoda de construcție folosită trebuie să conducă la dimensiunile finale ale perspectivei, fără să mai necesite măriri sau micșorări ulterioare;
— este de dorit să se folosească construcții grafice cît mai simple, cu o liniatură cît mai discretă, pentru a nu încărca desenul în mod inutil;
— se recomandă evitarea intersecțiilor la unghiuri prea ascuțite, acestea conducînd la construcții lipsite de precizie;
— dreptele trebuie determinate prin unirea a două puncte cît mai depărtate, pentru a evita deformările;
— pentru a mări precizia desenului se recomandă utilizarea multiplelor verificări;
— la punerea în perspectivă a unor ansambluri de volume complicate, acestea trebuie înscrise în volume simple ce sînt ușor de construit și controlat în perspectivă (de exemplu, prisma dreaptă dreptunghiulară).
— nu se vor pagina niciodată apropiat sau cuprinse în același cadru mai multe perspective, deoarece ele se influențează reciproc, distrugînd senzația de perspectivă.

10.

PERSPECTIVA DEPENDENTĂ PE TABLOU VERTICAL

10.1. GENERALITĂŢI

Perspectiva dependentă este metoda de a determina punctele de intersecţie a razelor vizuale cu tabloul de perspectivă. Dar folosind epura de geometrie descriptivă, se poate spune că perspectiva dependentă este „metoda razelor vizuale în dublă proiecţie ortogonală" (A. Gheorghiu, 1963).
Pentru a reprezenta în perspectivă un obiect, este suficient să se reprezinte muchiile şi vîrfurile din care este compus. Pentru a pune o muchie în perspectivă, este suficient să se reprezinte în perspectivă două puncte ale sale. Deci, pentru a reprezenta un obiect în perspectivă, este suficient să se reprezinte punctele principale din care este compus obiectul, ca apoi, prin unirea acestor puncte, să se pună în evidenţă muchiile, vîrfurile şi feţele obiectului.
Dacă Brunelleschi foloseşte, alături de epura de geometrie descriptivă, planul de profil drept tablou de perspectivă, Leonardo da Vinci este primul care suprapune tabloul peste planul vertical de proiecţie, făcînd în felul acesta o mare economie de linii de construcţie. Baza tabloului, numită linie de pămînt (xx'), a fost suprapusă peste axa OX din epura de geometrie descriptivă. Mecanismul vitroului lui Leonardo da Vinci este ilustrat în schiţa axonometrică din figura 10.1.1. Perspectiva punctului este totodată şi perspectiva verticalei. După cum se vede din schiţa axonometrică, prin acest procedeu perspectiva iese mai mică decît proiecţiile obţinute în epura de geometrie descriptivă, dezvoltîndu-se deasupra liniei de pămînt **xx'** (fig. 10.1.2).
Pentru a obţine o perspectivă suficient de mare, care să nu mai necesite măriri ulterioare, tabloul va fi plasat dincolo de proiecţia orizontală a obiectului.

10.2. PERSPECTIVA PUNCTULUI

Reprezentarea punctului în perspectivă se face intersectînd două drepte aşezate în poziţii particulare. După poziţia acestor două drepte (la intersecţia cărora se găseşte punctul), se pot distinge

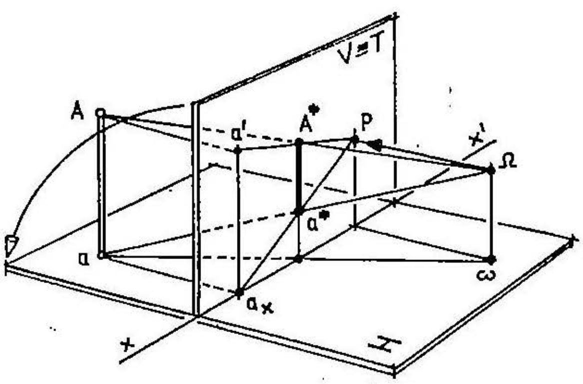


fig. 10.1.1

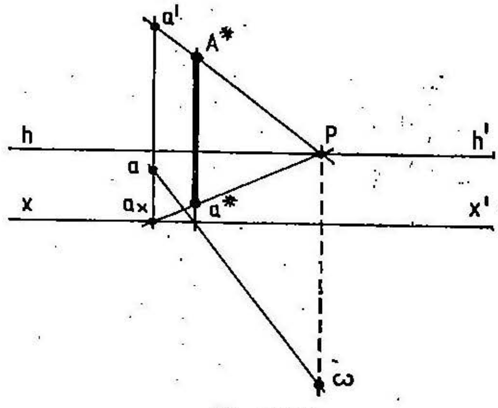


fig. 10.1.2

mai multe metode de construcție a perspectivei punctului.

Metoda dreaptă cu dreaptă (metoda celor două puncte de fugă) — F, F_{90}. Punctul se găsește la intersecția a două drepte orizontale, care în perspectivă fug la punctele de fugă F și F_{90} (fig. 10.2.1). Din a se duc paralele la adevăratele direcții de fugă (1) și (3), iar la intersecția cu tabloul (xx') se ridică verticale. Pe aceste verticale se iau cotele în adevărată mărime. Unind aceste cote cu cele două puncte de fugă obținem perspectiva punctului A*.

Metoda punct cu punct (ωP). Este metoda intersecției razei vizuale cu tabloul. Punctul se construiește la intersecția unei drepte de capăt (care în perspectivă fuge la P) cu planul vertical ce trece prin proiecția punctului de vedere ω și este orientat după direcția razei vizuale. Acest plan vertical ce conține raza vizuală intersectează tabloul după o verticală. Deci în perspectivă punctul se găsește la intersecția acestei verticale cu dreapta de capăt, care trece prin punct și fuge la P (fig. 10.2.2). Această metodă se folosește cînd punctele de fugă nu sînt accesibile.

Metoda ωF. Punctul se găsește la intersecția unei drepte orizontale (care în perspectivă fuge la punctul de fugă F) cu o dreaptă verticală, care este intersecția planului vertical (ce trece prin punct și prin ω) cu tabloul de perspectivă (fig. 10.2.3).

Metoda FP. Punctul se găsește la intersecția unei drepte orizontale (care în perspectivă fuge la F) cu o dreaptă de capăt care în perspectivă fuge la P (fig. 10.2.4).

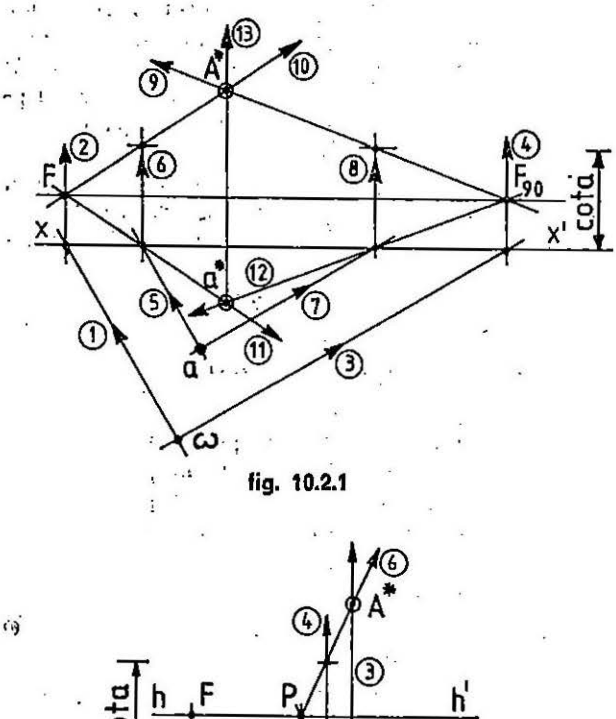


fig. 10.2.1

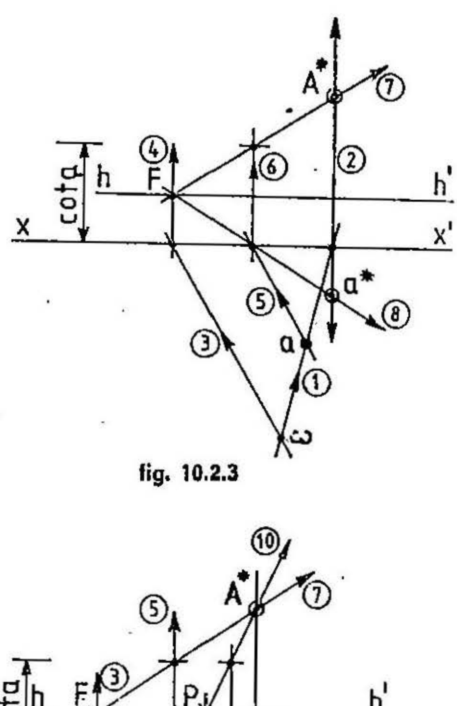


fig. 10.2.3

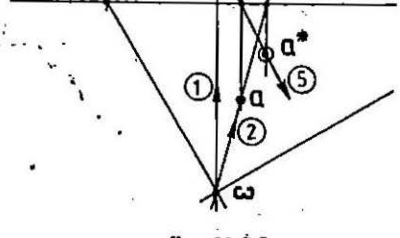


fig. 10.2.2

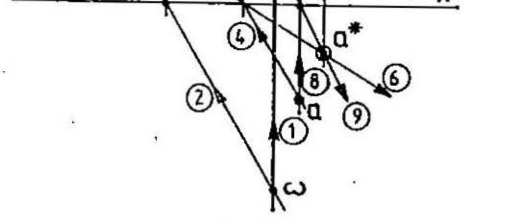


fig. 10.2.4

10.3. CONSTRUCȚIA VOLUMELOR

Pentru simplificarea problemei se va studia construcția perspectivei unei prisme drepte dreptunghiulare, în interiorul căreia se poate înscrie orice volum sau ansamblu de volume de arhitectură.

Metoda dreaptă cu dreapă (metoda F, F_{90}). Este metoda cea mai comodă, deoarece asigură în mod direct construcția orizontalelor la punctele de fugă, dar nu totdeauna poate fi folosită. Practica dovedește că, de cele mai multe ori, un punct de fugă este inaccesibil sau chiar amîndouă. Pentru a obține o perspectivă mai mare se plasează, în plan, obiectul între tablou și poziția observatorului — ω (fig. 10.3.1). Din ω se duc paralele la direcțiile dominante ale obiectului și se obțin punctele de fugă. Muchia cea mai avansată către privitor se obține prin procedeul arătat la perspectiva punctului, apoi se prelungește în plan cealaltă pereche de muchii perpendiculare pînă la intersecția cu tabloul; unind aceste intersecții cu punctele de fugă se delimitează fețele vizibile ale obiectului.

Metoda punct cu punct (ωP). Această metodă a razelor vizuale face abstracție de punctele de fugă și fără verificări suplimentare, poate să ducă la deformări destul de mari. La construcția perspectivei prin metoda punct cu punct se folosește și proiecția verticală a obiectului. Metoda constă practic în determinarea pe tablou a fiecărui punct important al obiectului (fig. 10.3.2). Pe lîngă imprecizie, această metodă mai are dezavantajul că aglomerează foarte mult centrul perspectivei cu linii de construcție.

Metoda ωF. Folosind un punct de fugă, se eliberează centrul perspectivei de liniile de construcție; rezultă deci o metodă combinată (fig. 10.3.3).

Metoda FP. Folosind punctul principal de privire, și această metodă aglomerează centrul perspectivei (fig. 10.3.4).

Aceste metode se folosesc după caz:

— în situația în care un punct de fugă sau amîndouă sînt inaccesibile;

— pentru ca intersecția din care rezultă punctul să se facă la un unghi cît mai aproape de 90°;

— pentru economie de linii de construcție;

— pentru verificări.

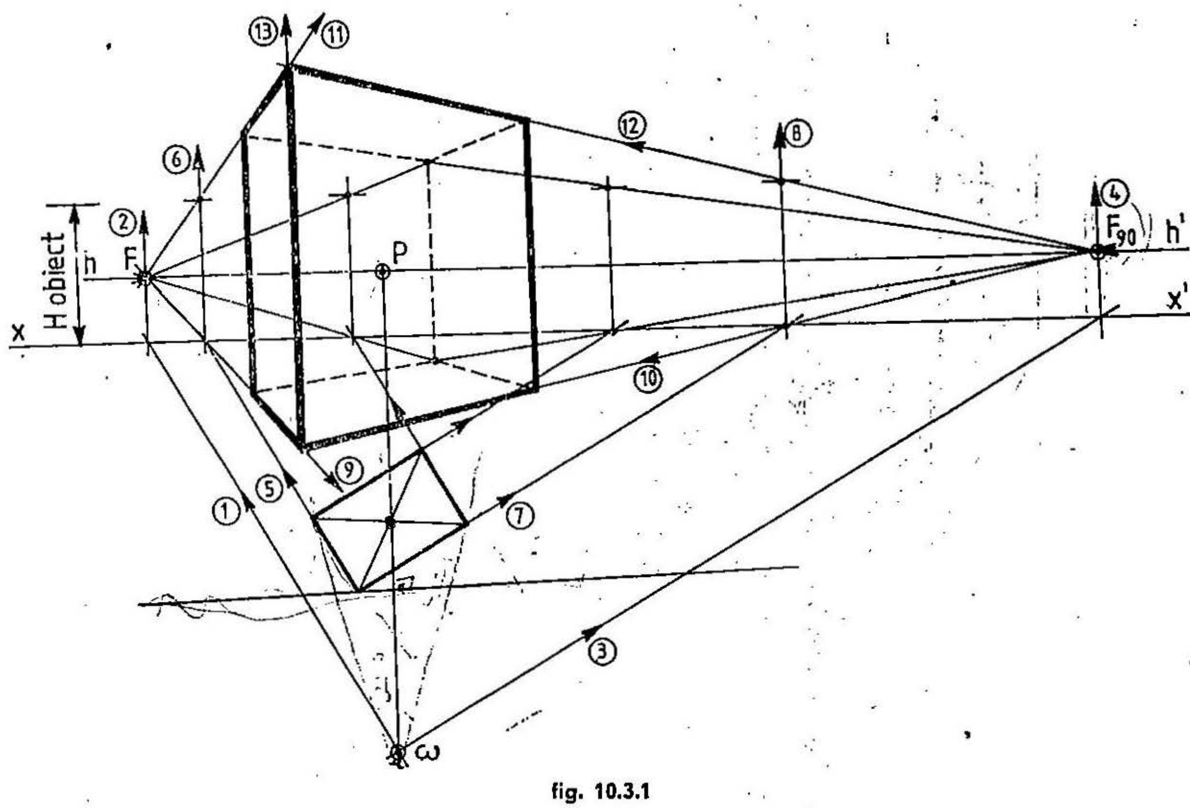


fig. 10.3.1

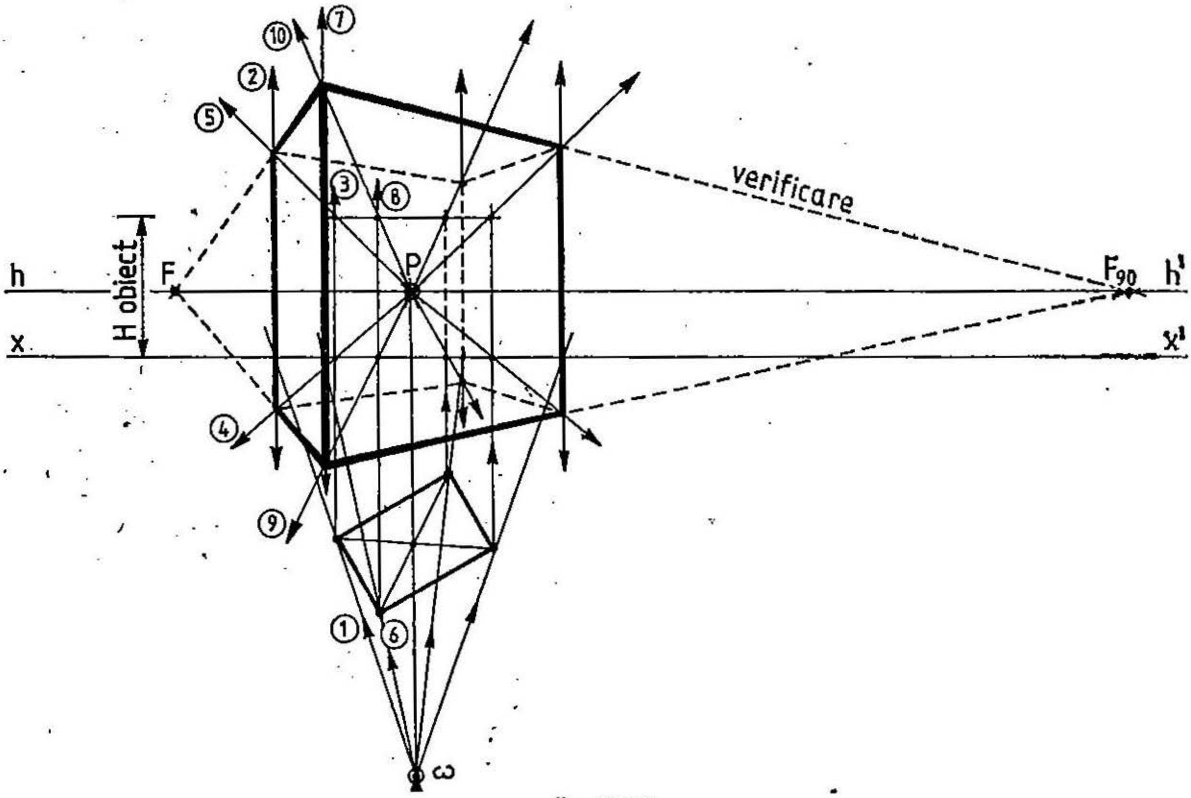


fig. 10.3.2

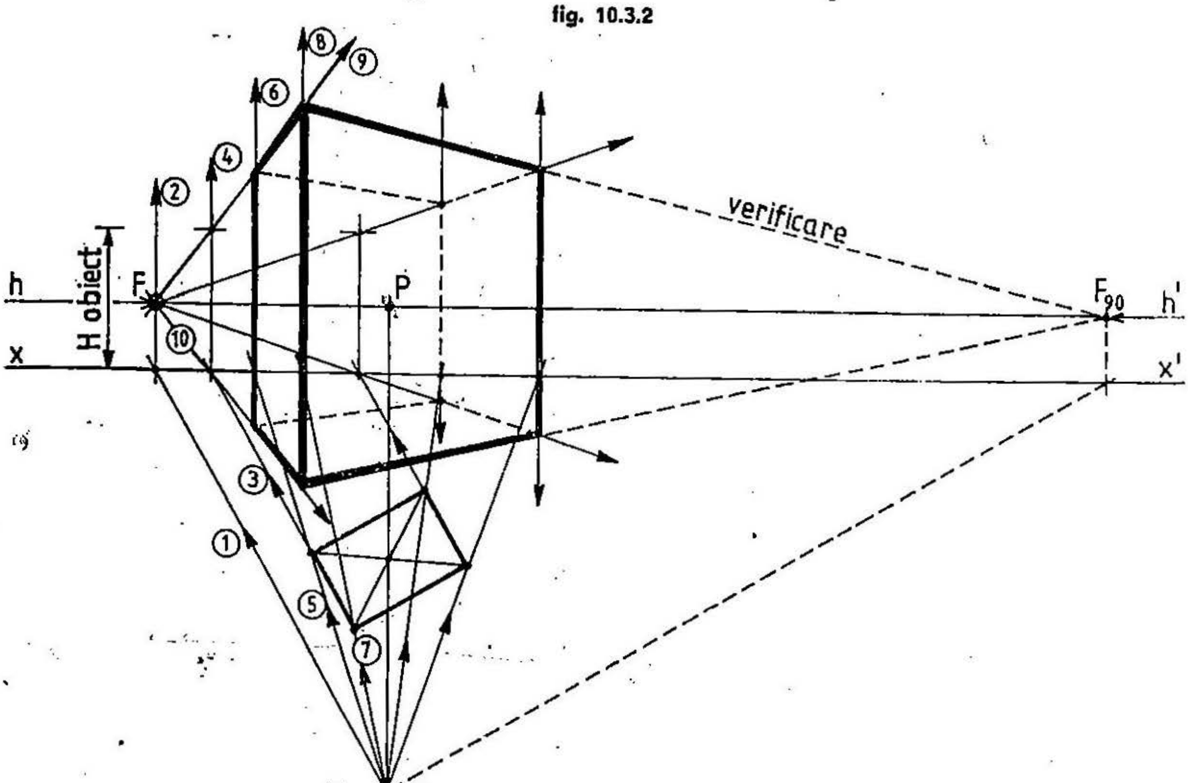


fig. 10.3.3

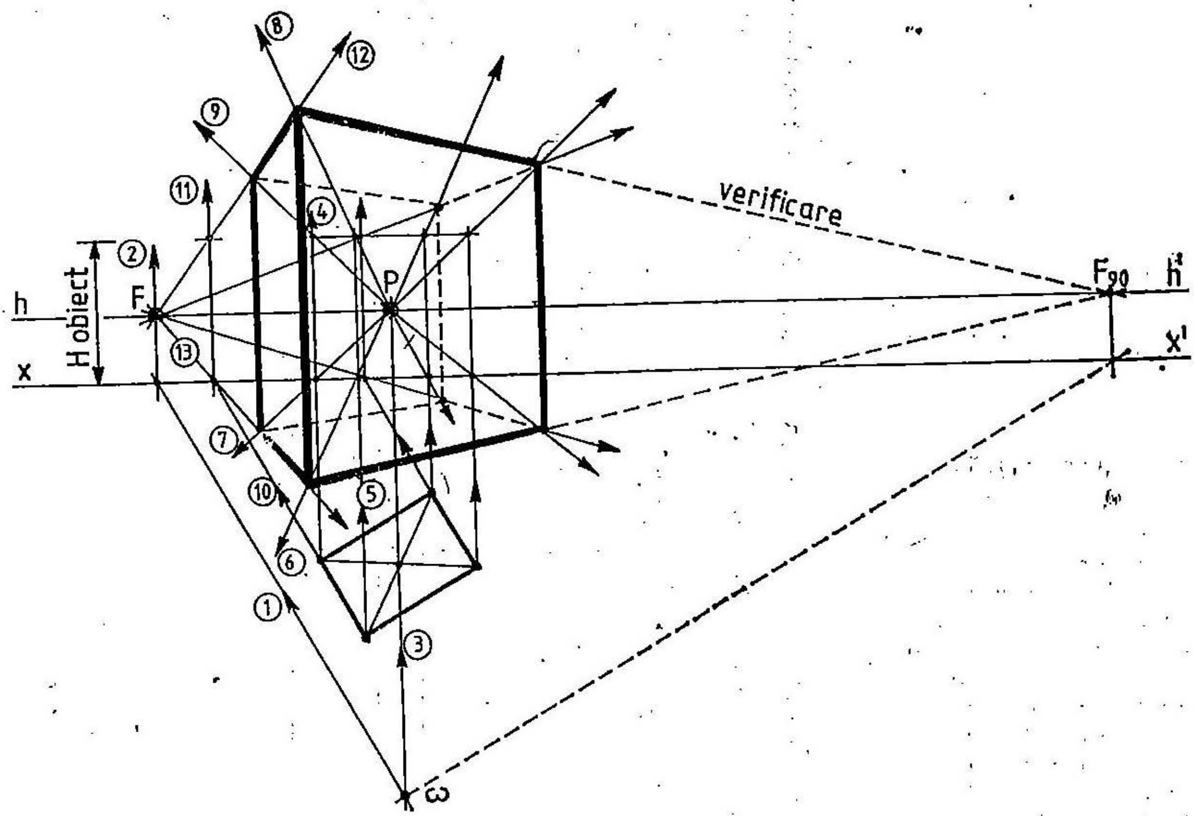


fig. 10.3.4

În general metodele perspectivei dependente necesită un volum mare de linii de construcţie, lucru care face ca în practică aceste metode să fie greu de folosit. De aceea, la construcţia perspectivei volumelor de arhitectură se folosesc metodele perspectivei dependente în combinaţie cu perspectiva liberă, care prezintă o serie de avantaje evidente.

11.

PERSPECTIVA LIBERĂ PE TABLOU VERTICAL

11.1. GENERALITĂŢI. DEFINIŢII

Matematicianul J. H. Lambert este primul care împarte metodele de construcţie a perspectivei în dependente şi libere. În anul 1759 îi apare cartea cu titlul „Perspectiva liberă, sau învăţătura de a compune de bună voie orice tablou perspectiv, fără proiecţia orizontală". După cum reiese din acest titlu, prin metoda perspectivei libere se poate construi un desen perspectiv fără să se folosească direct epura de geometrie descriptivă. Toate operaţiile se fac direct în tabloul de perspectivă. *Perspectiva liberă* este metoda de a obţine direct pe tablou perspectiva obiectelor date în spaţiu şi de a rezolva asupra lor orice problemă geometrică, pe baza invarianţilor proiecţiei conice. Prin perspectiva de observaţie se percep proprietăţile geometrice ale volumelor din spaţiu, iar cu ajutorul invarianţilor proiecţiei conice aceste proprietăţi pot fi redate în desenul perspectiv. Deci, şi desenul după natură poate să fie un desen exact, realizat prin riguroase construcţii geometrice.

Metoda perspectivei libere uşurează foarte mult folosirea desenului perspectiv ca mijloc de studiu în proiectare.

Perspectiva liberă prezintă următoarele avantaje faţă de metodele dependente de construcţia perspectivei:

— se apropie cel mai mult de procesul percepţiei vizuale şi prin aceasta este mai intuitivă;

— este mai rapidă decît perspectiva dependentă;

— perspectiva liberă permite un control al desenului perspectiv încă de la primele linii;

— permite construcţia perspectivei pornind de la elemente ce se fixează de la început în tablou, dînd posibilitate desenatorului să obţină efectul dorit fără să facă prea multe încercări.

Metodele perspectivei libere sînt folosite în finalizarea desenului perspectiv obţinut prin metode dependente — perspectiva detaliilor. Perspectiva liberă rezolvă direct pe tablou cele două categorii de probleme geometrice:

— probleme ce tratează relaţiile de poziţie (conţinere, intersecţie, coliniaritate, concurenţă, tangenţă, paralelism) independent de mărimile lor (lungimi şi unghiuri).

— probleme ce tratează relaţiile metrice (lungimi şi unghiuri) şi care se rezolvă în tabloul de perspectivă cu ajutorul invarianţilor proiecţiei conice, cunoscînd linia orizontului şi poziţia punctului de vedere.

„A rezolva probleme metrice pe tabloul de perspectivă înseamnă într-adevăr a face geometrie în peisaj" (*V. Gheorghiu*, 1963).

11.2. PUNCTUL ŞI COMPARAŢIA VERTICALELOR

În proiecţia paralelă punctul se reprezintă printr-un bipunct (punctul din spaţiu şi proiecţia sa) faţă de un plan de referinţă sau prin dreptunghiul de poziţie faţă de două plane de proiecţie (fig. 11.2.1). În perspectivă lucrurile se petrec asemănător, punctul putînd fi reprezentat printr-un bipunct în raport cu planul orizontal ce se întinde în faţa privitorului. Acest plan orizontal fiind reprezentat prin dreapta lui de fugă — linia orizontului, bipunctul se reprezintă deci în raport cu linia orizontului.

Luînd în tabloul de perspectivă un punct A în spaţiu şi proiecţia lui **a** pe planul orizontal, se poate localiza foarte uşor acest punct în spaţiu, raportîndu-l la linia orizontului (fig. 11.2.2). Punctul este mai depărtat de observator cu cît proiecţia sa pe planul orizontal este mai apropiată de linia orizontului. Punctul A cu proiecţia sa **a** formează o dreaptă

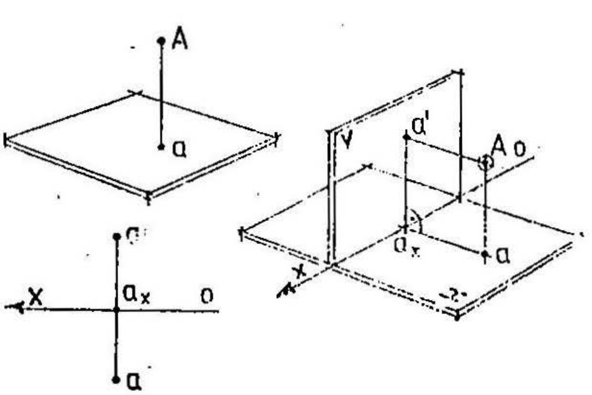


fig. 11.2.1

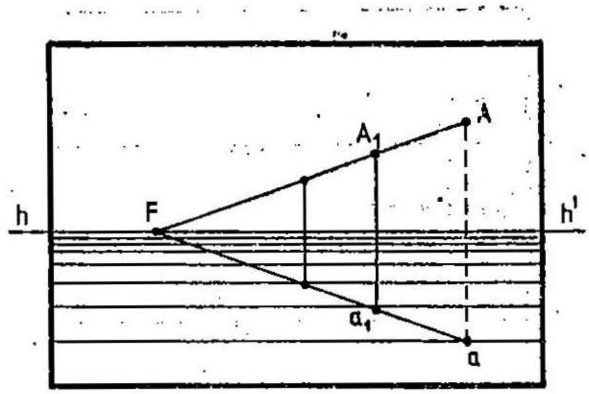


fig. 11.2.3

verticală; deci, în figura 11.2.2 s-a reprezentat şi verticala în perspectivă. Tot faţă de linia orizontului se compară în perspectivă înălţimile verticalelor. Dacă în tabloul de perspectivă există un segment de o lungime cunoscută, se pot măsura pe tablou toate segmentele verticale. Linia orizontului reprezintă pe tablou şi planul vederii (vezi sistemul perspectiv). Dar planul vederii şi planul orizontal de referinţă (planul pămîntului) fiind paralele, rezultă că segmentele verticale dintre ele sînt egale. Deci toate verticalele ce se sprijină pe pămînt au în tablou aceeaşi înălţime pînă la linia orizontului (înălţimea de la care este făcută perspectiva). Dacă se cunoaşte înălţimea de la care a fost făcută perspectiva se poate afla şi înălţimea întregului segment. Dacă nu se cunoaşte această înălţime se pot doar compara diferite verticale în tabloul de perspectivă, în raport cu linia orizontului (fig. 11.2.3). Comparînd cele trei verticale constatăm că verticala **B** este cea mai înaltă. Notînd cu **a** înălţimea orizontului, verticala **B** are 4a, verticala A are 2,5 **a**, iar verticala C are 2a.

Dacă se translatează un segment vertical către profunzime pe tablou el se micşorează, deşi în realitate nu-şi modifică dimensiunea. Unind punctele extreme a două poziţii succesive ale acestei verticale, se obţin două drepte concurente pe linia orizontului în punctul de fugă **F** (v. fig. 11.2.2). Dacă punctul de fugă iese deasupra liniei orizontului, segmentul din spate este mai înalt, iar dacă punctul de fugă iese sub linia orizontului, segmentul din spate este mai mic (fig. 11.2.4). Diferenţa dintre ele se poate afla refăcînd construcţia din figura 11.2.2.

Cînd se stă în picioare şi se priveşte o mulţime de oameni ce se află toţi pe un plan orizontal, aceştia au capul pe linia orizontului. Dacă unii sînt mai sus sau mai jos, aceştia stau respectiv pe o ridicătură sau pe o depresiune a planului orizontal. Diferenţa de înălţime se află imediat făcînd comparaţia cu linia orizontului, în locul respectiv (fig. 11.2.5). Făcînd perspectiva de la înălţime, oamenii care se află pe planul orizontal au capul mai jos decît linia orizontului, iar pentru a-i reprezenta corect

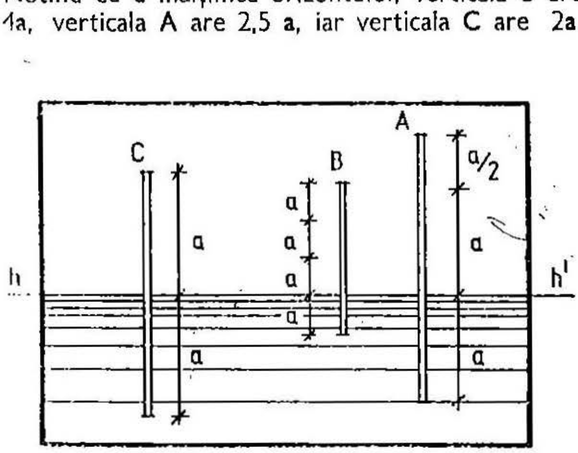


fig. 11.2.2

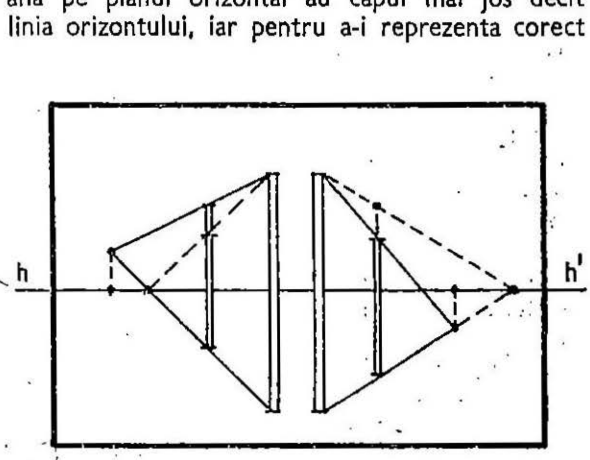


fig. 11.2.4

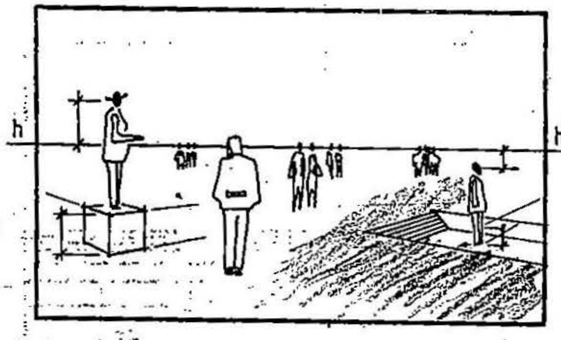


fig. 11.2.5

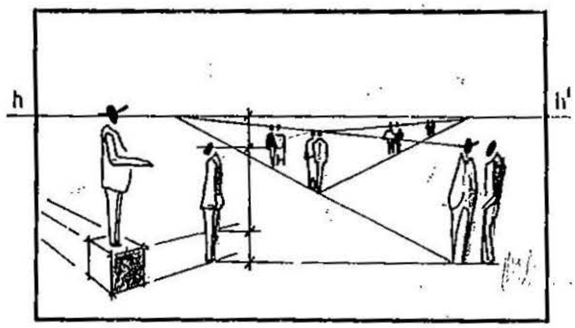


fig. 11.2.6

trebuie să se determine diferenţa de înălţime în fiecare loc în parte (fig. 11.2.6). Se poate spune deci de la ce înălţime a fost construită perspectiva, făcînd diferenţa pînă la linia orizontului şi comparînd-o cu înălţimea omului din punctul respectiv.

11.3. DREAPTA ŞI PLANUL ÎN PERSPECTIVĂ

DREPTE OARECARE

Unind două puncte din spaţiu A şi B se obţine o dreaptă, dar pentru a-i determina poziţia în spaţiu trebuie reprezentată şi proiecţia (ab) pe planul orizontal (fig. 11.3.1). Prelungind proiecţia pînă la linia orizontului se obţine punctul de fugă f al proiecţiei. Punctul unde dreapta din spaţiu se intersectează cu proiecţia ei pe planul orizontal este punctul unde acea dreaptă intersectează planul orizontal şi se notează cu **h**. Punctul de fugă **F** al dreptei (AB) din spaţiu este sub linia orizontului, la intersecţia cu verticala coborîtă din **f**. Dacă se consideră proiecţia drept umbra pe pămînt a dreptei, figura capătă mai multă spaţialitate. Se poate observa că dreapta ce trece prin punctele A şi B vine de deasupra privitorului şi coboară către profunzime, înţepînd pămîntul în **h**. În schiţa axonometrică din figura 11.3.2 sînt arătate diferitele poziţii pe care poate să le aibă o dreaptă oarecare în raport cu privitorul. Sînt drepte care înţeapă planul orizontal în faţa observatorului şi drepte care înţeapă planul orizontal în spatele acestuia. Reprezentările perspective ale acestor drepte sînt arătate în figura 11.3.3. Dreptele din poziţiile **a** şi **b** înţeapă pămîntul în faţa observatorului, iar punctul **h** este reprezentat sub linia orizontului în spaţiul vizibil (spaţiul real). Dreptele din poziţiile **c** şi **d** înţeapă pămîntul în spatele observatorului, iar punctul **h** se află deasupra liniei orizontului (în spaţiul virtual).

Luînd ca sens direcţia principală de privire se poate spune că: dreptele din poziţiile **b** şi **c** sînt drepte ascendente şi au punctul de fugă **F** deasupra liniei orizontului, iar dreptele din poziţiile **a** şi **d** sînt drepte descendente şi au punctul de fugă **F** sub linia orizontului.

DREPTE PARTICULARE

În figura 11.3.4 sînt reprezentate poziţiile particulare pe care pot să le aibă dreptele în raport cu planul neutru şi deci în raport cu tabloul de perspectivă. Numai dreapta orizontală are o poziţie oarecare faţă de planul neutru. Cînd această dreaptă este perpendiculară pe planul neutru (pe tablou) se numeşte dreaptă de capăt şi este paralelă cu direcţia principală de privire.

Dreapta frontală se găseşte într-un plan paralel cu planul neutru şi are proiecţia paralelă cu linia neutră. Dreapta fronto-orizontală este paralelă cu linia neutră.

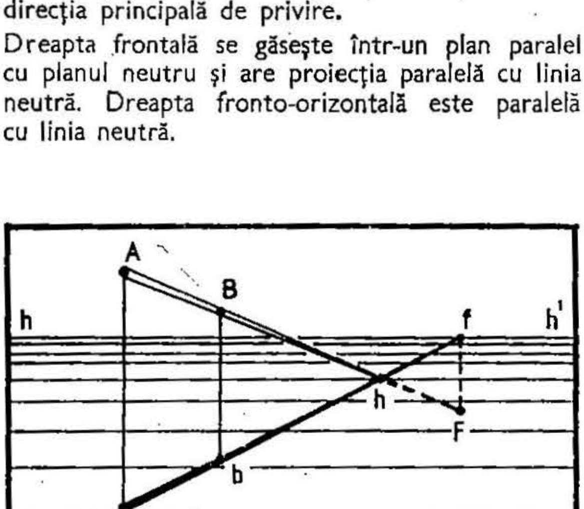


fig. 11.3.1

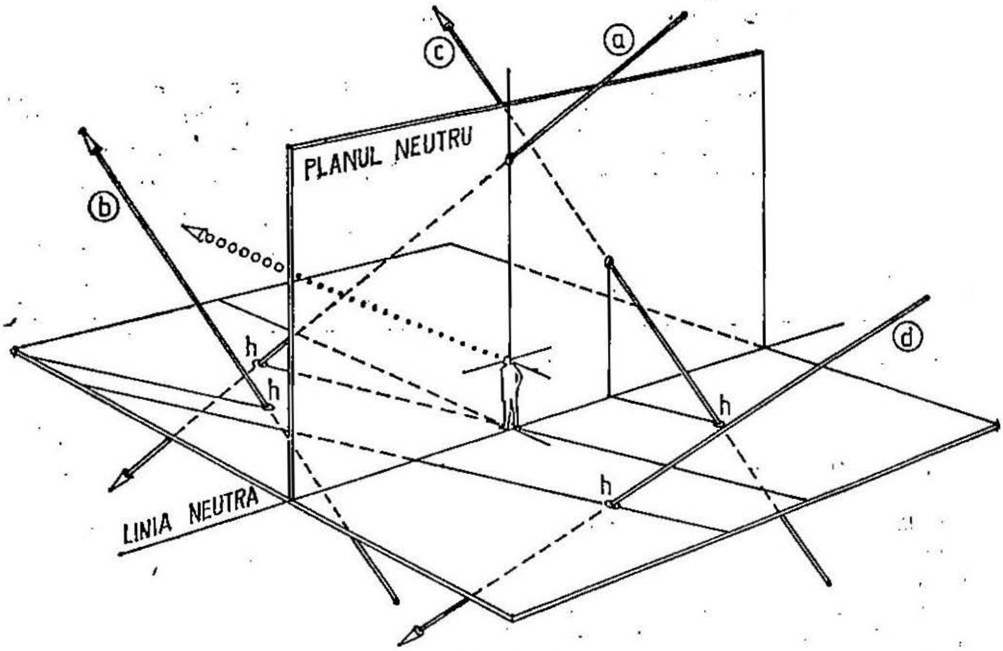


fig. 11.3.2

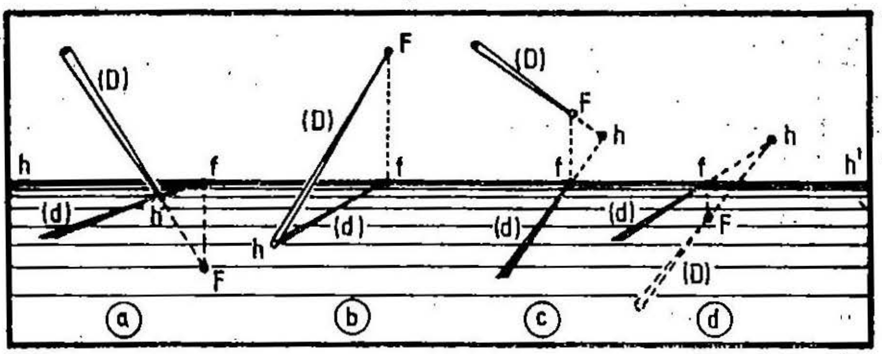


fig. 11.3.3

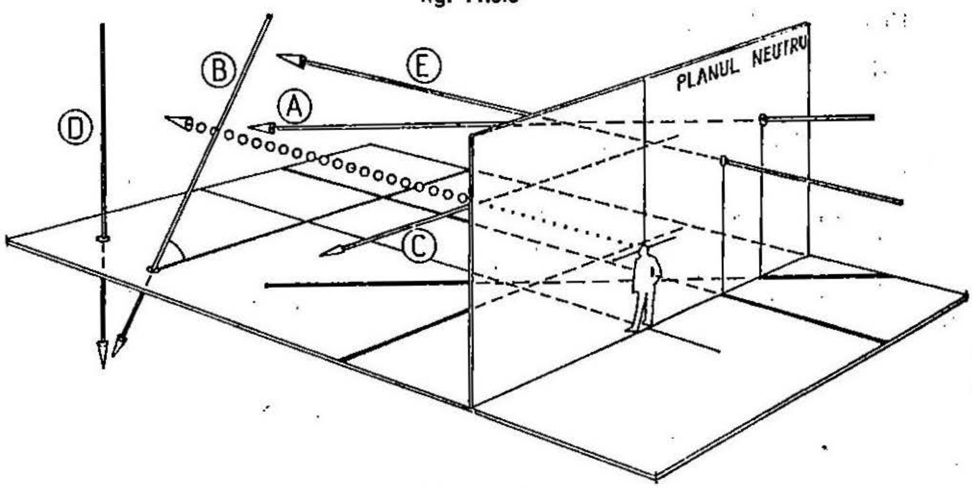


fig. 11.3.4

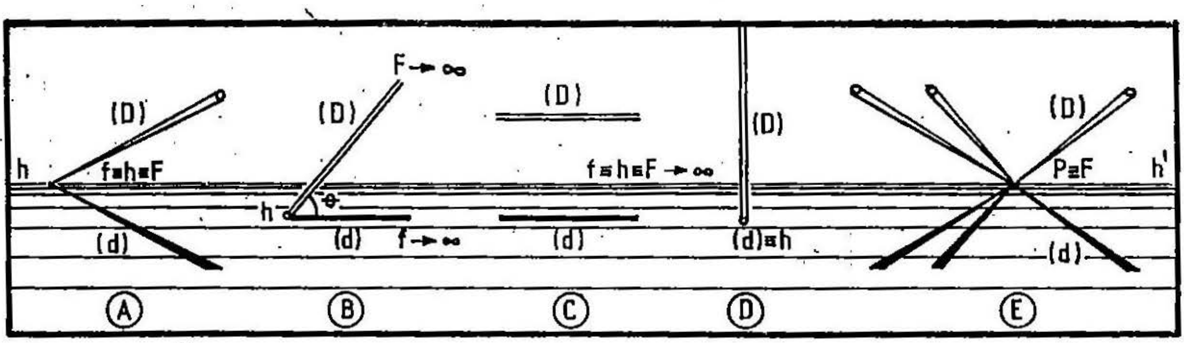


fig. 11.3.5

În tabloul de perspectivă, dreptele particulare au reprezentările din figura 11.3.5 Se observă că dreapta orizontală din poziția **A** și proiecția ei se întîlnesc pe linia orizontului și se comportă ca două drepte orizontale. În tabloul de perspectivă se poate citi direct unghiul pe care îl face dreapta frontală din poziția **B** cu planul orizontal. Aceasta are proiecția paralelă cu linia orizontului. Dreapta fronto-orizontală din poziția **C** și proiecția ei sînt paralele în tabloul de perspectivă cu linia orizontului. Dreapta verticală din poziția **D** este perpendiculară pe linia orizontului și cînd se află la distanță finită are punctul **h** sub linia orizontului. Dreapta de capăt din poziția **E** are în perspectivă aceeași reprezentare cu cea a dreptelor orizontale, numai că ea are punctul de fugă în punctul principal de privire **P**.

PLANUL

Prima reprezentare a planului în perspectivă a fost cea a planului orizontal, ce s-a pus în evidență prin linia orizontului. Planele particulare sînt indicate în figura 11.3.6, care reprezintă perspectiva unei camere. Podeaua și tavanul sînt plane orizontale (**a**) și au ca dreaptă de fugă linia orizontului. Pereții laterali sînt plane verticale (**b**) care au ca dreaptă de fugă perpendiculara pe linia orizontului în **P**. Planul ferestrei este un plan frontal (**c**) și are dreapta de fugă aruncată la infinit. Planul diagonal al camerei este un plan înclinat (**d**), iar dreapta lui de fugă trece prin **P** și este paralelă cu diagonalele frontale ale camerei ce determină acest plan (fig. 11.3.7).

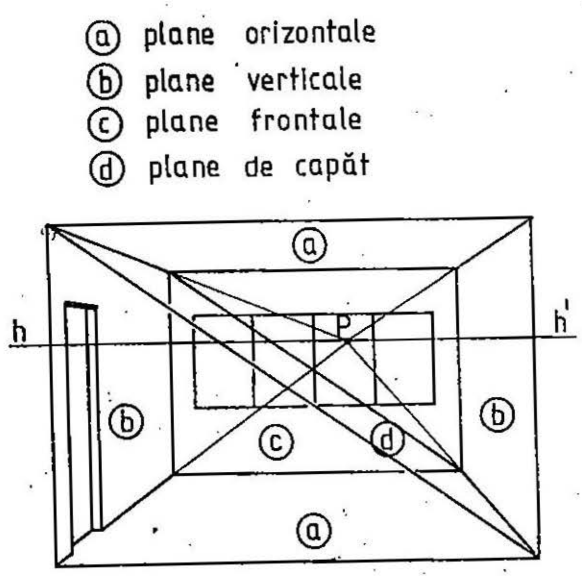


fig. 11.3.6

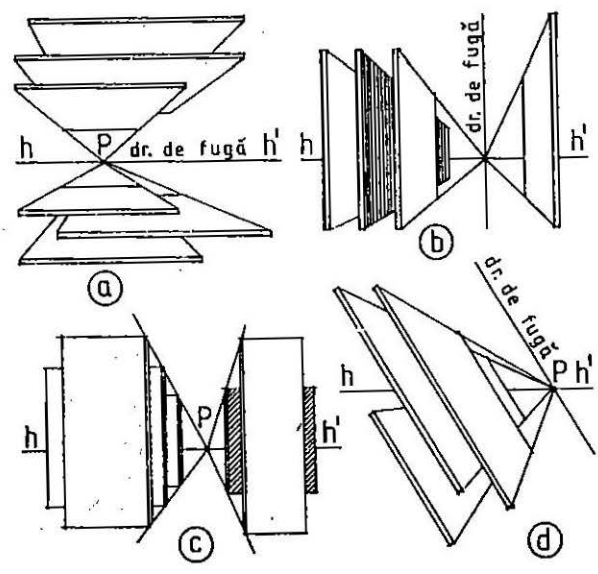


fig. 11.3.7

11.4. DREPTE CONCURENTE IN PUNCTE INACCESIBILE

PUNCTE DE CONCURENŢĂ OARECARE INACCESIBILE

Problema care se pune este: fiind date două drepte concurente (D_1) şi (D_2) într-un punct inaccesibil, să se ducă printr-un punct dat M o a treia dreaptă concurentă cu primele două. Această problemă are mai multe moduri de rezolvare.

a) În apropierea punctului M se duce o dreaptă care taie dreapta (D_1) în punctul B şi dreapta (D_2) în punctul D. Punctele B, D şi M formează un triunghi. La o distanţă oarecare se construieşte prin paralelism un triunghi asemenea — triunghiul ACN. Prin punctul N trece dreapta căutată (fig.11.4.1).

b) În figura 11.4.2 se duc prin punctul M perpendiculare la cele două drepte (D_1) şi (D_2); acestea taie dreptele opuse în punctele A şi B. Din punctul M se duce apoi o perpendiculară pe dreapta (AB). Aceasta este dreapta căutată. Punctul M este ortocentrul triunghiului format de punctele A, B şi punctul de concurenţă. Din punct de vedere grafic construcţia este mai puţin precisă pentru că, de cele mai multe ori, dreapta (AB) trece foarte aproape de punctul M.

c) Se duce prin punctul M o dreaptă oarecare care taie dreptele (D_1) şi (D_2) în punctele A şi B (fig: 11.4.3). O paralelă la dreapta (AB) taie cele două drepte date în punctele C şi D. Se duce diagonala patrulaterului format. Ducînd prin punctul M paralela la dreapta (D_2), se obţine pe diagonală punctul E. Din punctul E se duce paralela la dreapta (D_1) şi se obţine pe dreapta (CD) punctul N. Dreapta care trece prin punctele N şi M este concurentă cu cele două drepte date.

d) Prin punctul M se duce o dreaptă oarecare care taie pe (D_1) şi (D_2) în punctele A şi B. La o distanţă oarecare se duce o paralelă la dreapta (AB), care taie dreptele (D_1) şi (D_2) în punctele C şi D. Din punctul D se ia pe o dreaptă ajutătoare raportul A_0M_0, M_0B_n. Unind pe A_n cu C şi ducînd o paralelă din M_0 la dreapta (A_nC) se obţine punctul N căutat (fig. 11.4.4).

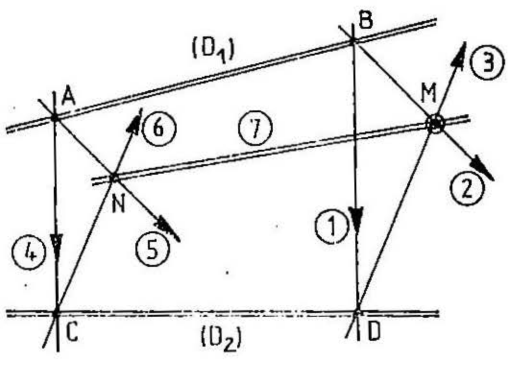


fig. 11.4.1

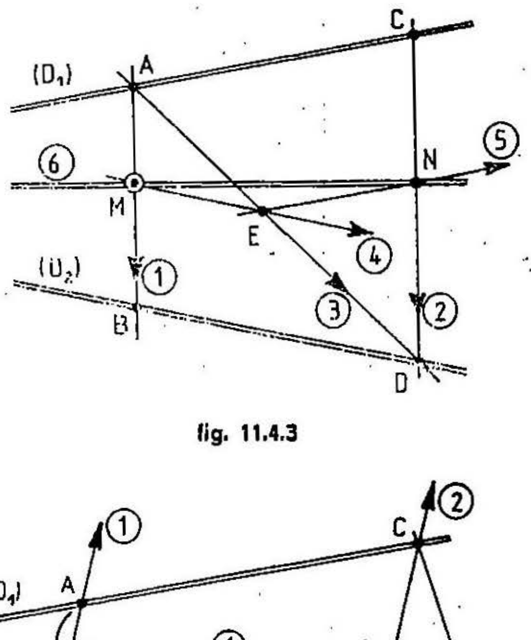


fig. 11.4.3

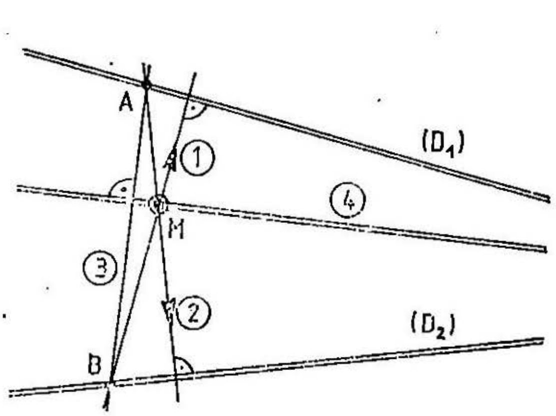


fig. 11.4.2

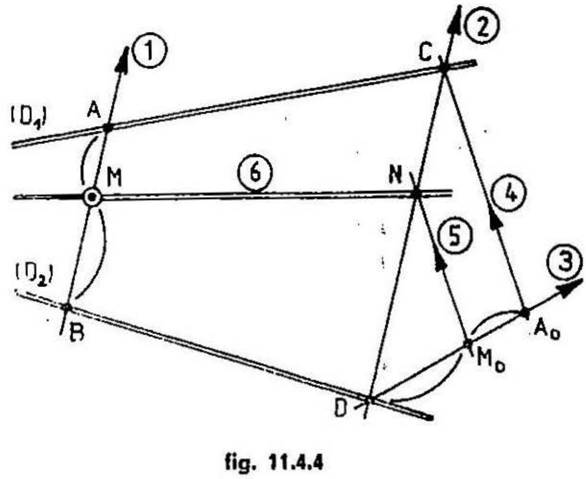


fig. 11.4.4

PUNCTE DE FUGĂ INACCESIBILE PE LINIA ORIZONTULUI

De cele mai multe ori, în construcţia perspectivei unul dintre punctele de fugă este inaccesibil. Se pune problema să se ducă drepte concurente în acest punct. Pentru rezolvarea problemei este necesar să se cunoască două drepte concurente în punctul de fugă inaccesibil. Una dintre ele este linia orizontului.

a) Avînd linia orizontului hh' şi dreapta (D) în perspectivă, să se ducă prin punctul M o dreaptă concurentă cu dreapta (D) pe linia orizontului (fig. 11.4.5). Prin punctul M şi în extremitatea din dreapta se duce cîte o perpendiculară pe linia orizontului. Acestea intersectează dreapta (D) în punctele A şi B care apoi se unesc cu un punct K pe linia orizontului. Din punctul B se duce o orizontală pînă la intersecţia cu dreapta (KA), iar din punctul de intersecţie se coboară o verticală. Din punctul de intersecţie cu dreapta (KM) se duce o paralelă la linia orizontului şi se obţine punctul căutat. Această construcţie ne ajută la trasarea etajelor unei faţade.

b) Fie ABCD o faţadă în perspectivă. Dacă se stabileşte înălţimea de etaj pe muchia cea mai apropiată, se poate împărţi faţada într-un număr de nivele, ca în figura 11.4.6. Mai simplu se poate rezolva problema împărţind în acelaşi număr de nivele muchiile AC şi BD.

c) Fie dreapta (D) în perspectivă. Să se ducă prin punctul M o dreaptă concurentă cu dreapta (D) pe linia orizontului. În general, în perspectivă se duc foarte multe drepte concurente în puncte de fugă inaccesibile, de aceea se recomandă construcţia din figura 11.4.7, care este mult mai rapidă şi

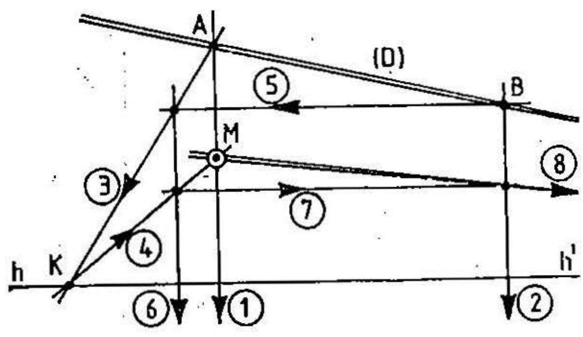


fig. 11.4.5

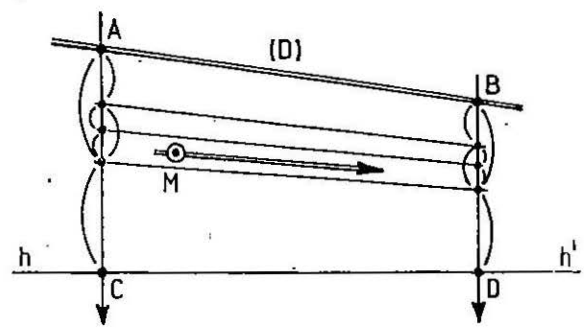


fig. 11.4.7

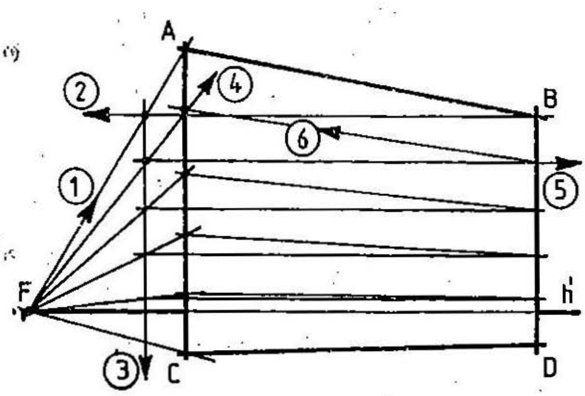


fig. 11.4.6

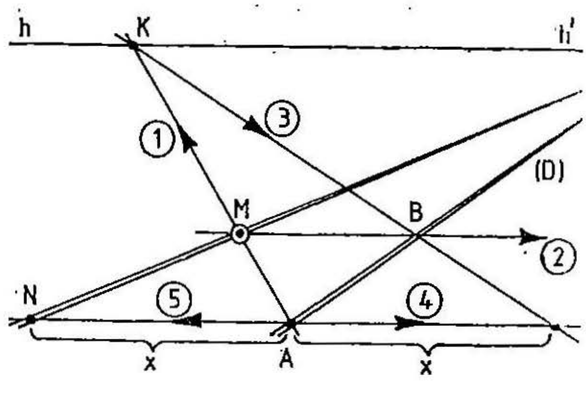


fig. 11.4.8

mai utilă. În extremitățile formatului tabloului se duc două drepte perpendiculare pe linia orizontului și se obține patrulaterul ABCD. Se împart succesiv în cîte două părți egale laturile AC și BD, pînă cînd dreptele concurente obținute se apropie de punctul dorit. Apoi se duce prin punctul M o paralelă la dreapta concurentă cea mai apropiată. Eroarea rezultată este neglijabilă în perspectivă.
d) Avînd în planul orizontal o dreaptă (D) în perspectivă, să se ducă prin punctul M, situat în același plan orizontal, o dreaptă paralelă cu dreapta (D), deci concurentă cu ea pe linia orizontului (fig. 11.4.8) Se ia un punct A pe dreapta (D) dată. Unind punctele A cu M se obține punctul de fugă K pe linia orizontului. Cu ajutorul punctului K translatăm segmentul MB din profunzime în planul punctului A. Luînd același segment și în stînga punctului A rezultă punctul căutat.

DREPTE CONCURENTE PE LINIA ORIZONTULUI INACCESIBILĂ

a) Se dau în planul orizontal două drepte (D_1) și (D_2) paralele. Să se traseze prin punctul M situat în același plan o dreaptă (D_3) paralelă cu (D_1) și (D_2) — (fig. 11.4.9). Construcția în perspectivă se bazează pe proprietatea a două dreptunghiuri în prelungire, care au centrele lor geometrice situate pe o dreaptă paralelă cu laturile. Dreptele (1), (2) și (5) sînt paralele cu linia orizontului.
b) Se dau în perspectivă două drepte paralele (D_1) și (D_2) și o dreaptă (D_3) care nu fuge la același punct de fugă cu primele două, toate conținute în planul orizontal. Să se ducă prin punctul M, aflat în planul orizontal, o dreaptă (D_4) paralelă cu dreapta (D_3). După cum se vede această problemă este foarte asemănătoare cu cea de mai sus și are același mod de rezolvare (fig. 11.4.10).

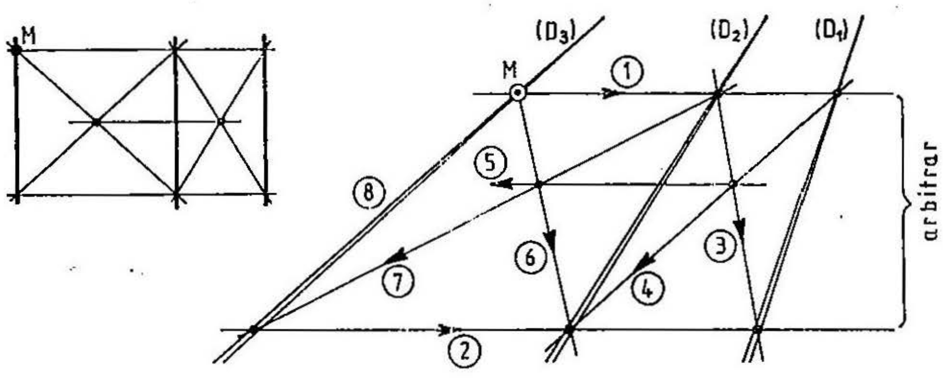


fig. 11.4.9

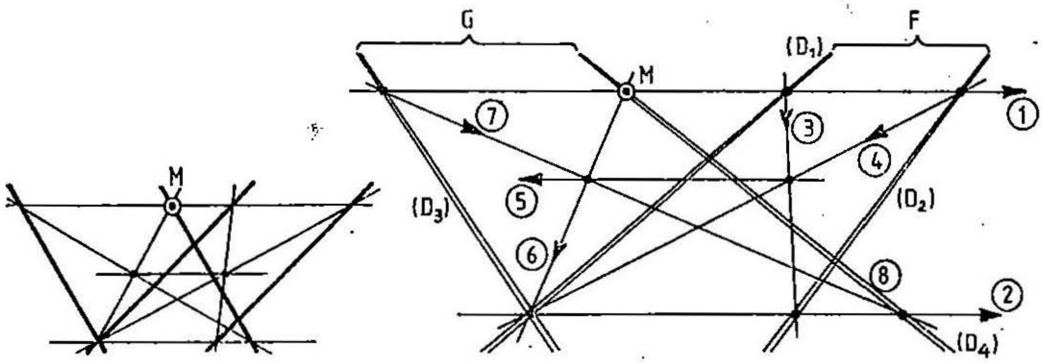


fig. 11.4.10

11.5. DIVIZIUNI PERSPECTIVE

ÎMPĂRȚIREA UNUI SEGMENT DE DREAPTĂ ÎN PĂRȚI EGALE SAU PROPORȚIONALE

Această operație grafică făcută în tablou se bazează pe transpunerea teoremei lui Thales în perspectivă. S-a arătat în capitolul 9 că diviziunile egale din spațiu descresc în perspectivă odată cu depărtarea. În același plan frontal unitatea de măsură rămîne aceeași în orice direcție (fig. 11.5.1), iar împărțirea unui segment în părți egale se face direct, ca într-o proiecție ortogonală. De la un plan frontal la altul unitatea de măsură se schimbă, micșorîndu-se în profunzime după legea descreșterilor perspective. În perspectiva pe tabloul vertical, pe fronto-orizontală sau pe verticală se operează cu aceeași unitate de măsură. Aceasta ajută la împărțirea în părți egale sau proporționale a oricărui segment de dreaptă în perspectivă.

a) Să se împartă segmentul orizontal AB, dat în perspectivă, în 6 părți egale. Se iau din punctul A pe o fronto-orizontală 6 unități egale. Unind extremitatea cu punctul B se află direcția după care se duc paralele în perspectivă. Dreapta (2) determină pe linia orizontului punctul K, care este punctul de fugă al acestor paralele (fig. 11.5.2).

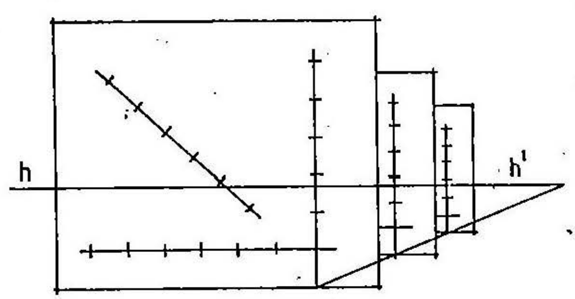


fig. 11.5.1

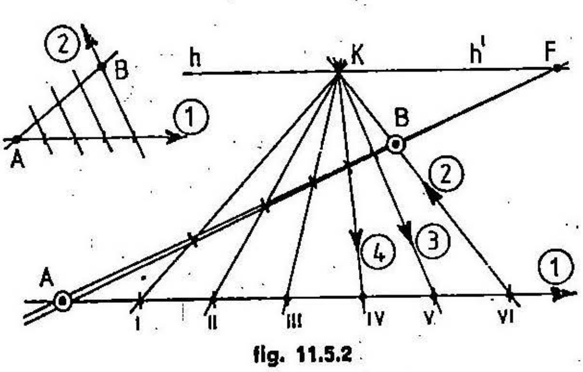


fig. 11.5.2

b) Împărțirea unui segment de dreaptă oarecare se poate face în două moduri. Utilizînd împărțirea pe verticală, problema se rezolvă mai rapid (fig. 11.5.3), dar pentru aceasta trebuie să fie accesibil punctul de fugă F al proiecției segmentului AB, dat în perspectivă; cînd acest lucru nu este posibil, se utilizează fronto-orizontala dusă din A. Se împarte mai întîi proiecția segmentului AB dat în perspectivă, utilizînd punctul de fugă ajutător K și apoi, ridicînd verticale, se împarte segmentul AB din spațiu (fig. 11.5.4). După cum se vede, în această construcție nu s-a utilizat punctul de fugă F al proiecției segmentului dat, deoarece acesta nu este totdeauna accesibil.

În același mod se poate împărți în perspectivă un segment dat în orice raport, cu condiția să se poată transpună grafic acest raport într-o proiecție ortogonală.

CONTINUAREA UNOR DIVIZIUNI PERSPECTIVE DATE

De cele mai multe ori formatul tabloului nu este suficient de mare pentru a permite să se ia pe o fronto-orizontală toate diviziunile necesare împărțirii unui segment din perspectivă. Foarte des poate să apară necesitatea continuării acelorași diviziuni pe o dreaptă pusă în perspectivă. Pentru rezolvarea problemei se poate proceda în două moduri:

a) se poate folosi același punct de fugă ajutător K de la construcțiile precedente (fig. 11.5.5). Se determină unitatea pe o fronto-orizontală cît mai aproape de punctul B. Pentru a rezulta o construcție cît mai precisă, trebuie să se determine cel puțin 2—3 unități cu care se va continua împărțirea în perspectivă. Se va repeta acest procedeu de cîte ori este nevoie;

b) se pot folosi două puncte de fugă ajutătoare K_1 și K_2 pe linia orizontului, dar trebuie în același timp să fie accesibil punctul de fugă F al dreptei date (D) în perspectivă (fig. 11.5.6). Construcția corespunde proiectiv unei construcții grafice din plan, bazată pe proprietățile paralelogramului. Pe dreapta (D) este translatată în profunzime unitatea **u** aleasă în perspectivă. În același mod se poate împărți o dreaptă din perspectivă într-un raport repetabil, cum ar fi, de exemplu, un șir de stîlpi. Se ia în perspectivă grosimea unui stîlp (ab) și intervalul dintre stîlpi (bc), iar prin procedeul arătat mai sus se translatează acest raport de cîte ori este nevoie (fig. 11.5.7).

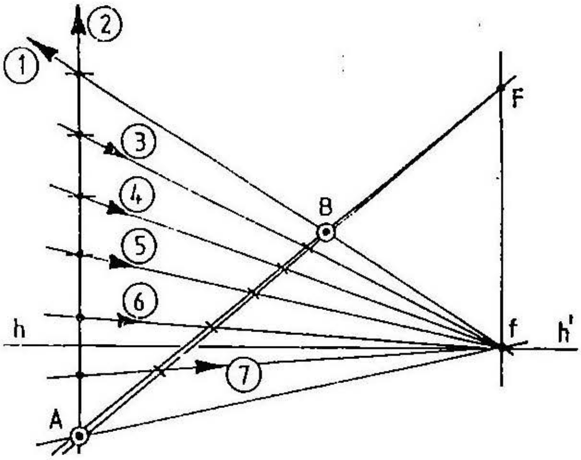


fig. 11.5.3

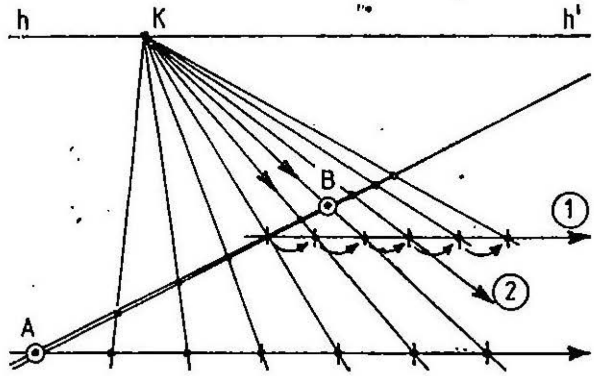


fig. 11.5.5

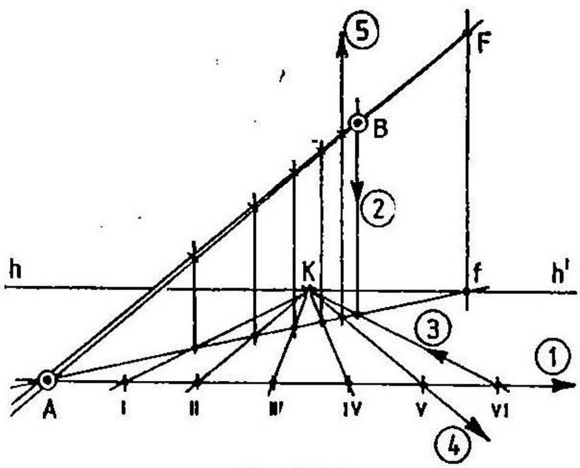


fig. 11.5.4

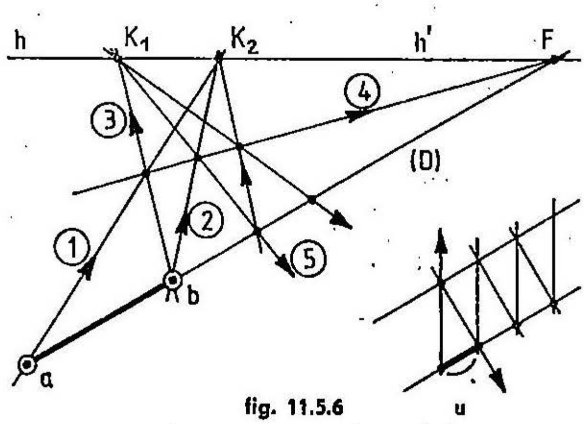


fig. 11.5.6

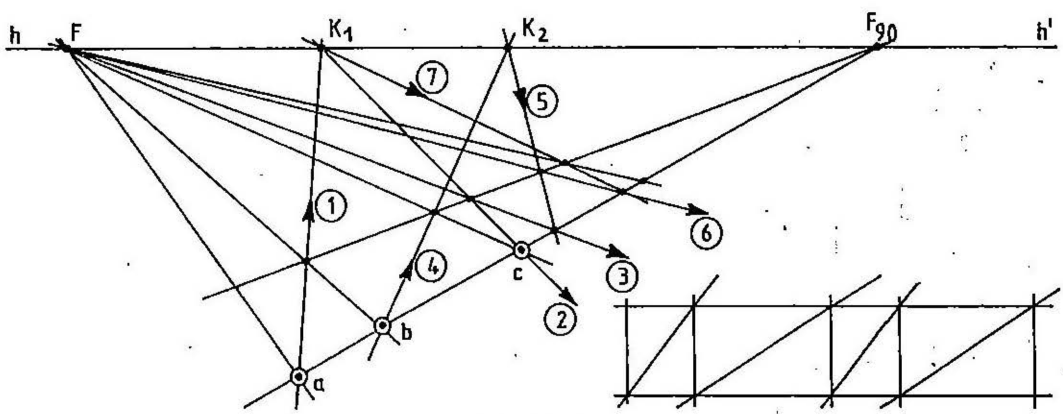


fig. 11.5.7

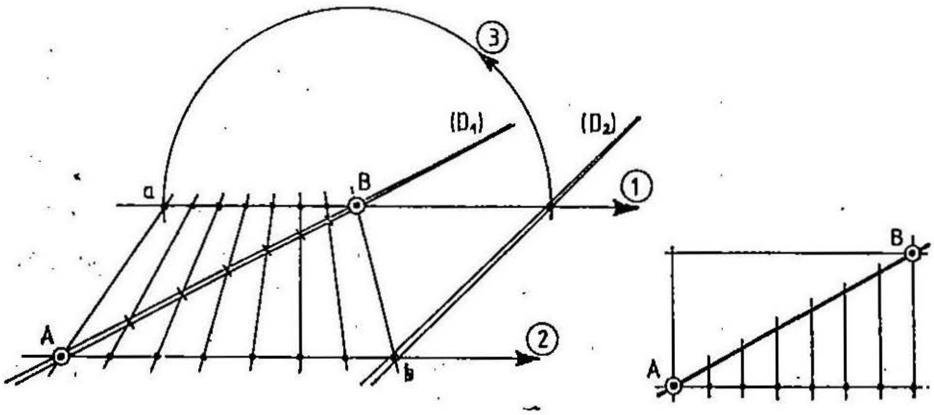


fig. 11.5.8

DIVIZIUNI PERSPECTIVE ÎN CAZUL LINIEI DE ORIZONT INACCESIBILĂ

Se dau două drepte orizontale (D_1) şi (D_2) paralele în perspectivă, deci concurente pe linia orizontului, care în cazul de faţă este inaccesibilă (fig. 11.5.8). Se cere să se împartă segmentul **AB** în 7 părţi egale. Rezolvarea problemei se bazează pe construcţia grafică din plan cu ajutorul căreia se împarte diagonala dreptunghiului în părţi egale. Se duce din **A** şi din **B** cîte o fronto-orizontală, iar apoi se transpune segmentul **Ab** în profunzime. Se obţine segmentul **aB** egal în perspectivă cu segmentul **Ab**. Se împart cele două segmente în cîte 7 părţi egale şi pe diagonala **AB** se obţin 7 diviziuni egale în perspectivă.

DIVIZIUNI PERSPECTIVE DE FIGURI PLANE

a) Împărţirea unei faţade în fîşii verticale egale sau proporţionale se poate face folosind metodele arătate la împărţirea unui segment în părţi egale sau proporţionale (fig. 11.5.9). Mai întîi se împarte dreapta de intersecţie a faţadei cu pămîntul şi apoi se ridică verticale. În general, această dreaptă fiind foarte aproape de linia orizontului se foloseşte orizontala de sus a faţadei. Se obţine astfel un desen mult mai precis.

b) La împărţirea într-un număr par de părţi se poate folosi metoda aflării mijlocului prin inter-

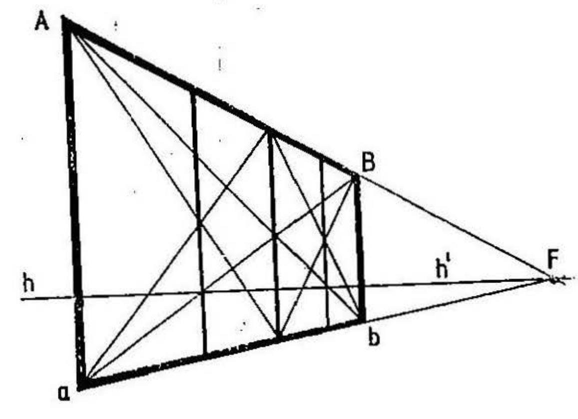


fig. 11.5.10

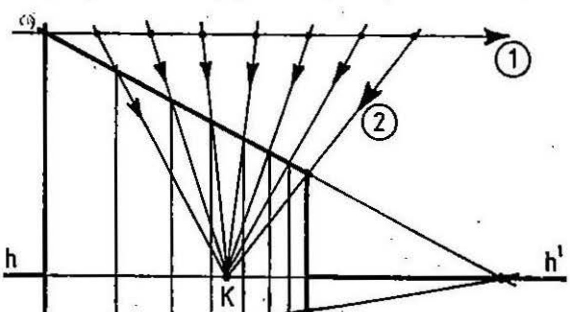


fig. 11.5.9

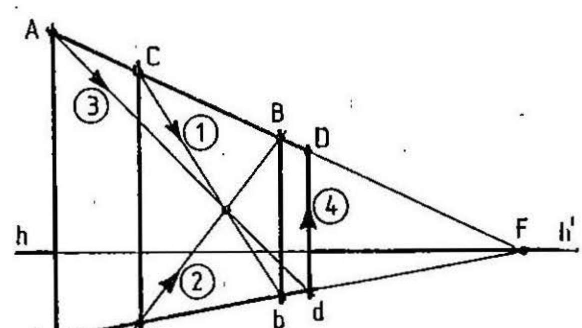


fig. 11.5.11

secția diagonalelor. Această metodă este mai rapidă și poate fi folosită și în cazul lui F inaccesibil (fig. 11.5.10). Același procedeu al intersecției diagonalelor servește și la împărțirea fațadei în raportul de plin și gol (stîlp — travee). Se pornește de la dreptunghiul în perspectivă AaBb, care este împărțit în raportul de plin-gol de verticala Cc (fig. 11.5.11). Prin simetrie perspectivă în raport cu centrul O al dreptunghiului CcBb se obține verticala Dd.

c) Împărțirea pe verticală a fațadei în perspectivă se poate face folosind punctul de fugă al diagonalei F_d ce se găsește pe dreapta de fugă a planului vertical (fig. 11.5.12).

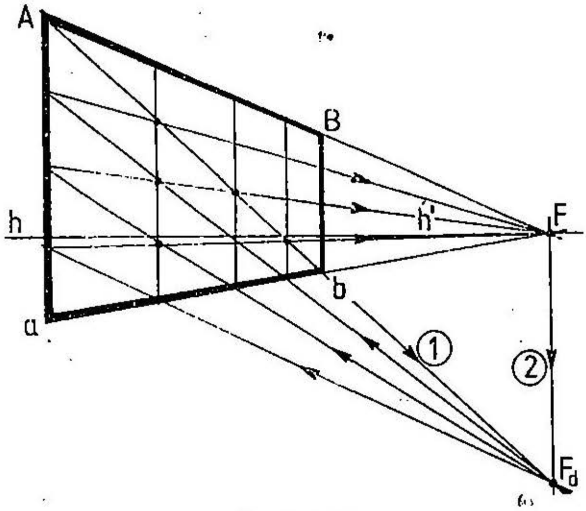


fig. 11.5.12

DIVIZIUNI PERSPECTIVE PE UN PLAN OARECARE

Pentru împărțirea planului [P] în părți egale se procedează astfel:

a) se împarte proiecția lui orizontală (folosind linia orizontului) și apoi se face ridicarea în planul [P];
b) se împarte direct planul [P], ducînd o paralelă la dreapta lui de fugă FG (fig. 11.5.13).

Cînd dreapta de fugă a planului oarecare [P] este inaccesibilă se poate afla direcția ei (fig. 11.5.14). Pe diagonala CA se ia un punct arbitrar M și se duc prin el paralele la CB și CD. Rezultă direcția căutată XY.

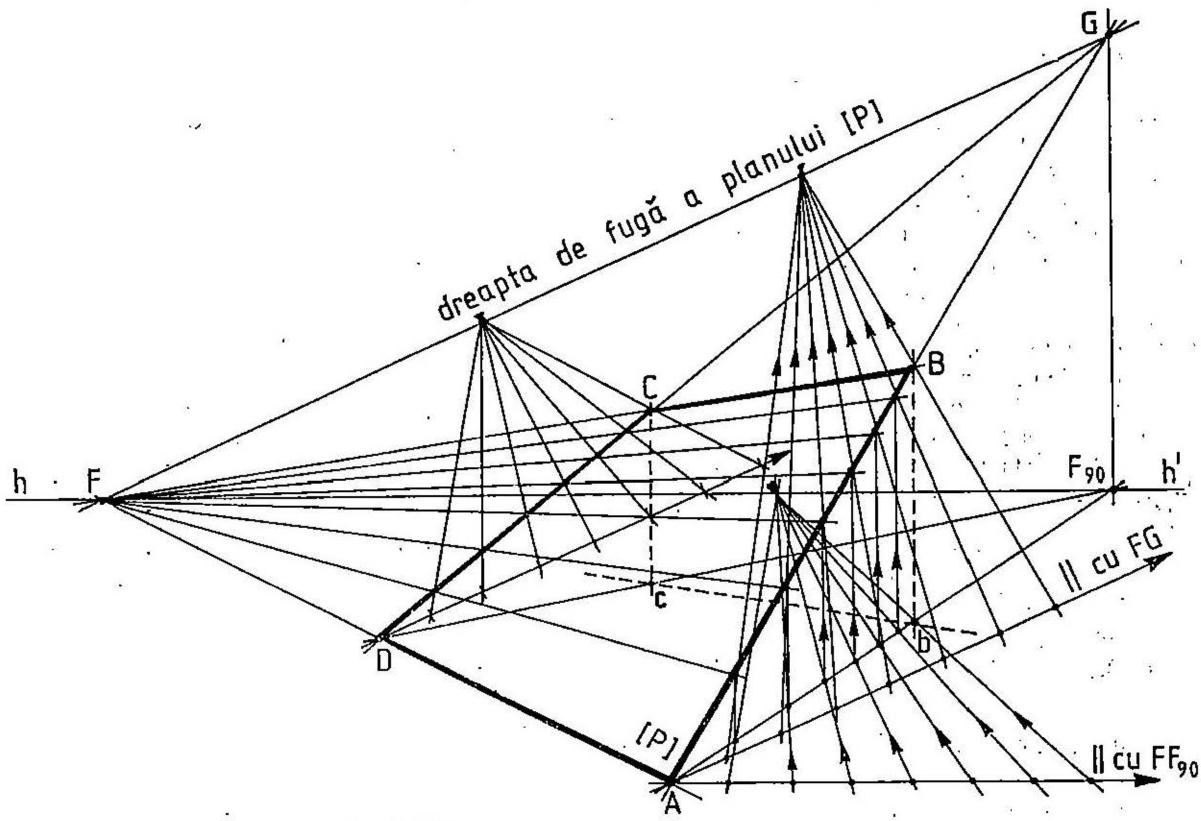


fig. 11.5.13

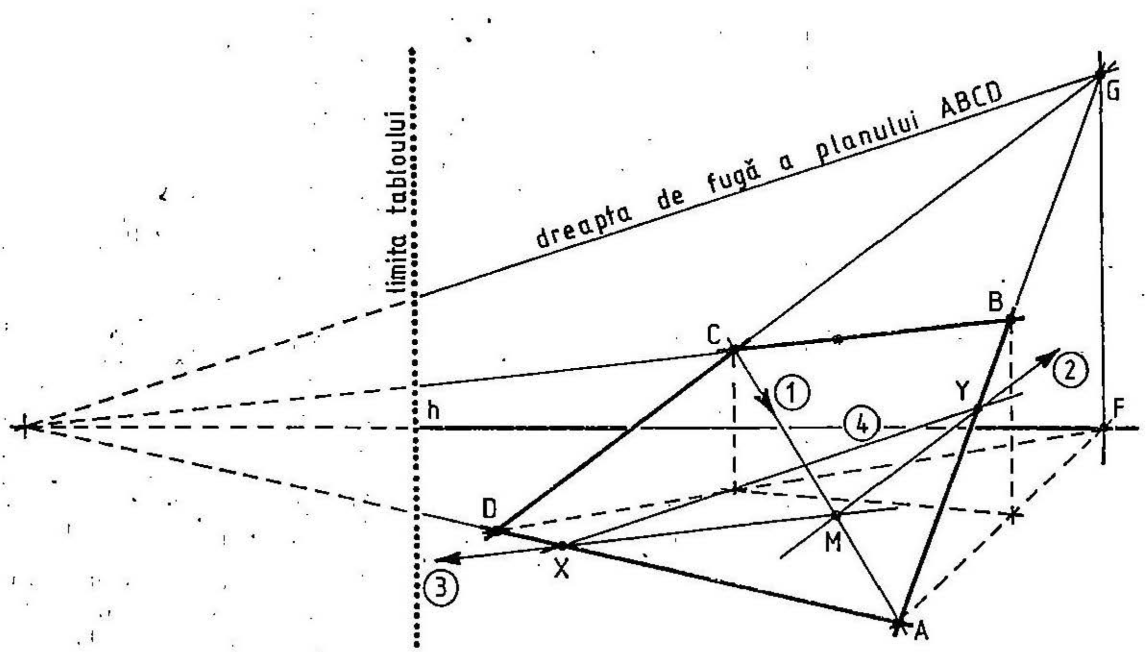


fig. 11.5.14

11.6. PUNCTE DE FUGĂ

GENERALITĂŢI

Primul care defineşte şi utilizează punctele de fugă este Guidobaldo del Monte (1545—1607), de la care ne-a rămas tratatul de perspectivă în 6 cărţi cu titlul „Perspectivae libri sex", Pesaro, 1600. Avantajul construcţiei perspectivei cu ajutorul punctelor de fugă apare mai ales în cazul mai multor drepte paralele. Perspectiva unei drepte este bine determinată de urma ei pe tablou, care este de fapt perspectiva ei, şi de perspectiva punctului ei de la infinit, numit punct de fugă al dreptei. Punctul de fugă se obţine ducînd din punctul de vedere o paralelă la direcţia dreptei respective, pînă cînd aceasta intersectează tabloul (v. subcap. 9.6. Mecanismul perspectivei). Dacă dreapta de pus în perspectivă este orizontală, punctul ei de fugă rezultă pe linia orizontului; dacă are o poziţie oarecare, punctul ei de fugă se află pe dreapta de fugă a planului în care este conţinută dreapta respectivă (v. subcap. 11.3. Drepte şi plane în perspectivă).

CONFIGURAŢIA PUNCTELOR DE FUGĂ F, F_{90}, F_{45}

S-a arătat că pentru a reda în perspectivă un ansamblu de volume sau un volum mai complicat, se înscrie totul într-un volum cît mai simplu, de preferinţă o prismă dreaptă dreptunghiulară. Această prismă, fiind formată din plane ce se intersectează numai după muchii orizontale şi verticale, este foarte simplu şi rapid de pus în perspectivă. Se ştie că omul nu poate să aprecieze cu exactitate, în spaţiu, decît unghiul drept. Celelalte unghiuri sînt apreciate în raport cu unghiul de 90°. De asemenea se ştie că unghiul de 90° subîntinde diametrul cercului, lucru care uşurează foarte mult studiul perspectivei. A transpune unghiul drept în perspectivă se reduce de fapt la a determina punctele de fugă a două direcţii ce fac în plan 90°. Trebuie deci ca din punctul de vedere Ω să se ducă paralele la aceste direcţii,

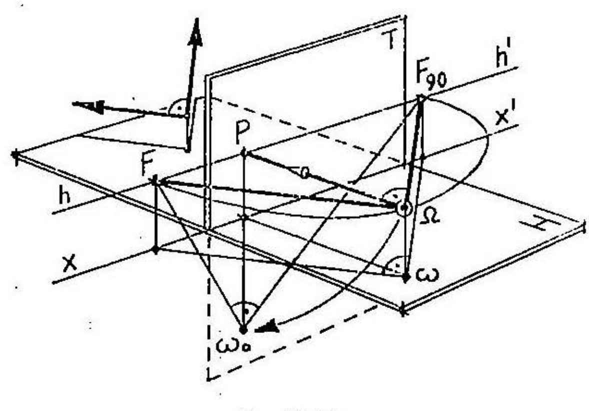


fig. 11.6.1

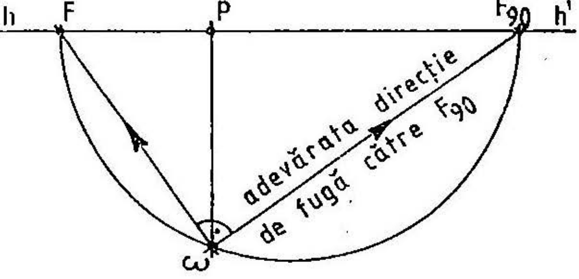


fig. 11.6.2

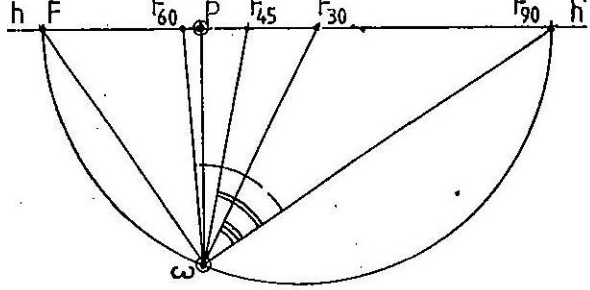


fig. 11.6.3

iar la intersecția cu tabloul rezultă punctele lor de fugă F și F_{90}. Se face acest studiu mai întîi într-o axonometrie (fig. 11.6.1). Rabătînd pe tablou punctul de vedere Ω, se obține poziția observatorului ω în tabloul de perspectivă liberă (fig. 11.6.2). Dreptele ωF și ωF_{90} constituie adevăratele direcții de fugă către F și F_{90}. Oricare altă dreaptă aflată în planul orizontal are punctul de fugă pe linia orizontului și face cu celelalte direcții un număr de grade. Pe linia orizontului pot fi determinate punctele de fugă ale tuturor direcțiilor de la 0° la 90° (de exemplu, F_{30}, F_{45}, F_{60} etc. — fig. 11.6.3); dintre toate acestea, mai important este F_{45}, deoarece acest punct este punctul de fugă al diagonalei pătratului, fiind des folosit ca punct de fugă ajutător în construcția perspectivei. Acest punct de fugă la 45° poate fi determinat foarte ușor și într-un plan vertical. Luînd un pătrat vertical în perspectivă, diagonalele lui dau direcțiile la 45° în plan vertical și totodată punctele lor de fugă pe dreapta de fugă a planului vertical (fig. 11.6.4). Diagonalele pătratului, făcînd același unghi cu planul orizontal, vor intersecta dreapta de fugă a planului vertical la distanțe egale de F. Rabătînd planul vertical al pătratului pe tabloul de perspectivă se obține poziția lui F_{45} vertical, în tabloul de perspectivă. Perpendiculara din F se intersectează cu dreapta la 45° dusă din ω, care este diagonala pătratului rabătut pe tablou (fig. 11.6.5). Cu piciorul compasului în F se aduce F_{45} pe dreapta de fugă a planului vertical. Deoarece triunghiul ωFF_{45} este dreptunghic isoscel, ω se află pe același cerc cu F_{45}; deci, $+F_{45}$ și $-F_{45}$ se pot obține foarte ușor aducînd pe ω cu compasul pe dreapta de fugă a planului vertical. Rezultă astfel configurația punctelor de fugă F, F_{90} și F_{45} în plan orizontal și vertical (fig. 11.6.6).

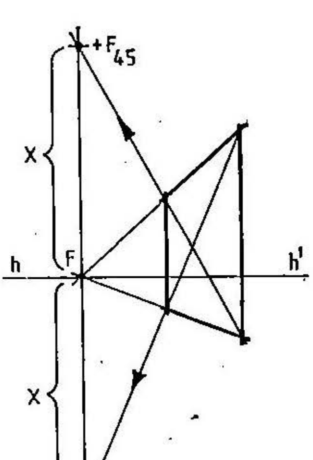


fig. 11.6.4

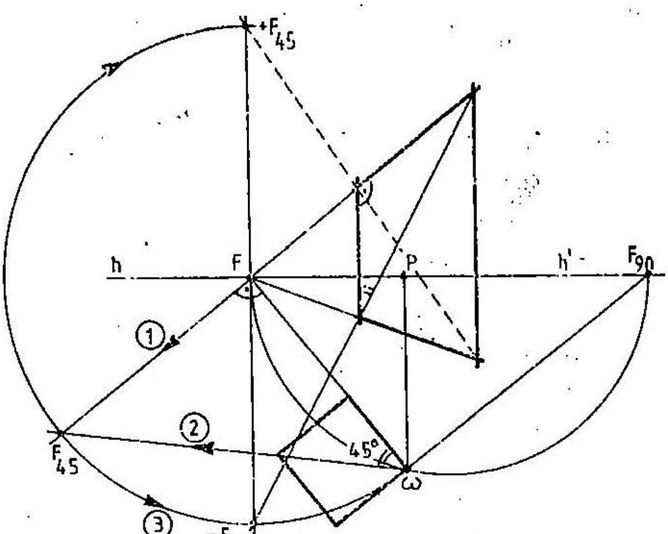


fig. 11.6.5

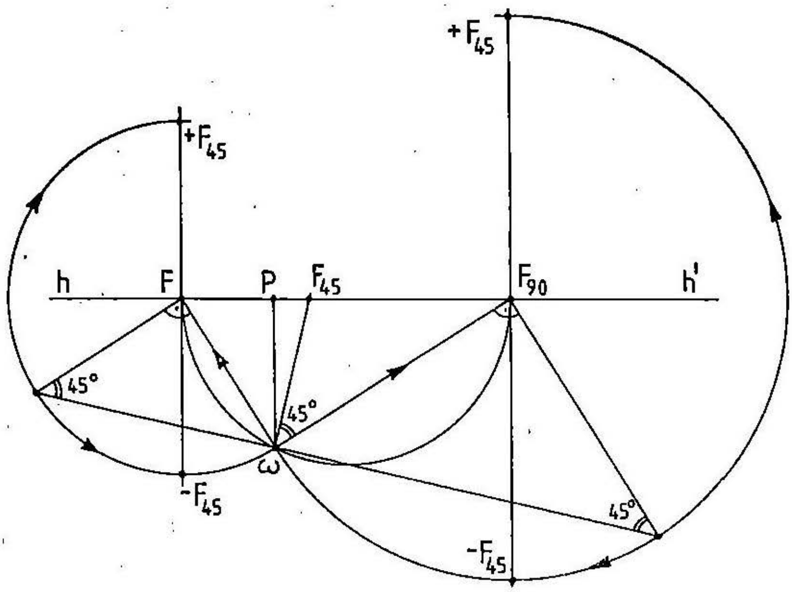


fig. 11.6.6.

AFLAREA UNEI DIRECŢII DE FUGĂ CÎND PUNCTUL DE FUGĂ ŞI POZIŢIA OBSERVATORULUI ω SÎNT INACCESIBILE

Ca să se poată construi drepte concurente într-un punct de fugă inaccesibil trebuie să se cunoască măcar două drepte concurente în el; una dintre ele este linia orizontului, cealaltă trebuie aflată. Cînd unul din cele două puncte de fugă nu este accesibil, se întîmplă foarte des ca şi ω să nu fie accesibil. Pentru a rezolva problema trebuie să se cunoască punctul principal de privire şi adevărata direcţie spre punctul de fugă accesibil (de exemplu spre F). Micşorînd configuraţia punctelor de fugă astfel ca ω şi F_{90} reduse să intre în pagină (fig. 11.6.7). Pentru aceasta se împarte segmentul **FP** în trei părţi egale şi se duce la o treime o paralelă la adevărata direcţie, obţinîndu-se punctul ω/3. În ω/3 se fixează unghiul drept şi se află F_{90} redus. Se împarte segmentul Pω/3 în trei părţi egale şi se uneşte treimea cu $F_{90}/3$. Ducînd din punctul ω/3 o paralelă la această dreaptă, se obţine direcţia către F_{90}. Au rezultat nişte triunghiuri asemenea. Avînd o direcţie către F_{90} şi linia orizontului se pot trasa oricîte drepte concurente în acest punct.

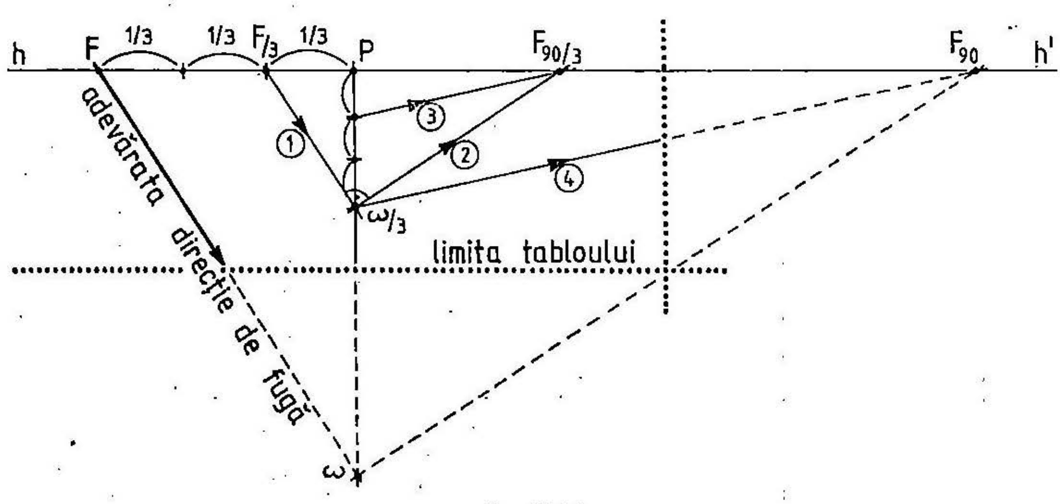


fig. 11.6.7

Ducîndu-se latura pătratului (ab) în perspectivă şi adevărata ei direcţie, să se construiască perspectiva pătratului pe planul orizontal. Se alege punctul principal de privire P, astfel ca privirea să fie îndreptată către latura pătratului. Cunoscînd una din adevăratele direcţii de fugă ale pătratului se poate afla foarte uşor şi cealaltă (fig. 11.6.8). Cu ajutorul lui F_{45} se transpune latura pătratului şi pe direcţia către F. Odată construit pătratul în planul orizontal, se poate construi şi perspectiva cubului (fig. 11.6.9). Utilizînd punctul $-F_{45}$ se construieşte mai întîi faţa stîngă a cubului, apoi cu ajutorul punctelor de fugă F şi F_{90} se construieşte întregul cub.

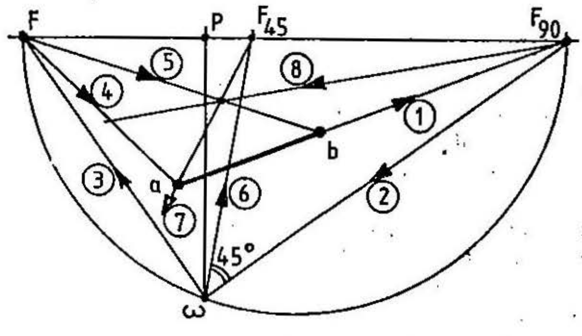


fig. 11.6.8

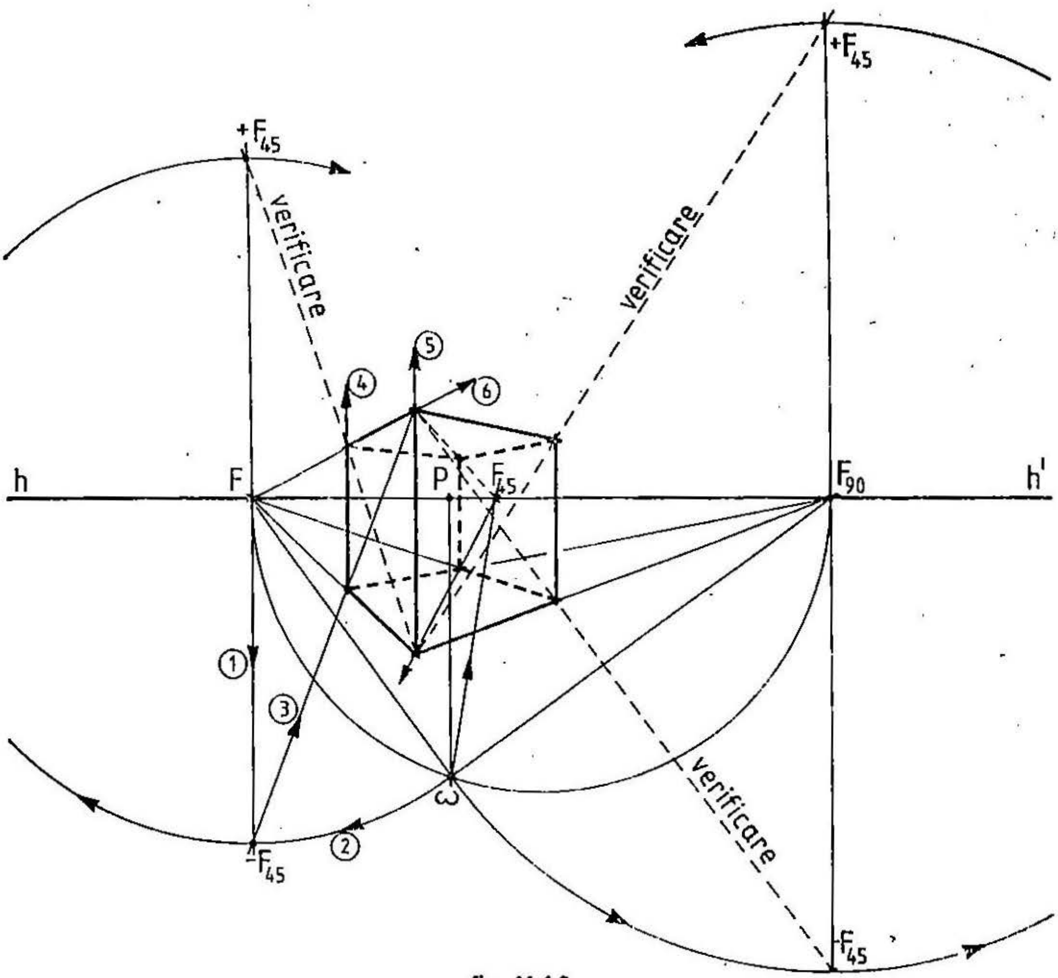


fig. 11.6.9

PUNCTE DE FUGĂ DIAGONALE

Orice direcție între F și F_{90} poate să fie diagonala unui dreptunghi pus în perspectivă și orientat după direcția punctelor de fugă (fig. 11.6.10). Pentru a afla punctul de fugă diagonal trebuie să se deseneze pe cele două direcții raportul laturilor dreptunghiului. Construcția dreptunghiului în perspectivă este asemănătoare cu cea a pătratului, numai că în loc să se folosească F_{45}, se folosește punctul de fugă diagonal $F_{n/m}$. Pornind de la perspectiva unei laturi se determină și cealaltă cu ajutorul lui $F_{n/m}$ (fig. 11.6.11).

UTILIZAREA PUNCTELOR DE FUGĂ DIAGONALE

Punctul de fugă diagonal se poate folosi la construcția unei prisme drepte dreptunghiulare căreia i se cunosc dimensiunile. Fie **m** și **l** dimensiunile în plan și **n** înălțimea acestei prisme. Se vor desena aceste dimensiuni reduse la scară în ω, obținînd planul și o față rabătută pe tablou (fig. 11.6.12). Pornind de la o latură aleasă în perspectivă (**ab**), se construiește mai întîi planul. Pentru a afla înălțimea muchiei, se determină punctul de fugă diagonal $F_{n/m}$ al feței rabătute. Acesta se obține intersectînd diagonala acestei fețe rabătute cu perpendiculara pe adevărata direcție în F și aducînd punctul de intersecție pe dreapta de fugă a feței verticale din stînga.

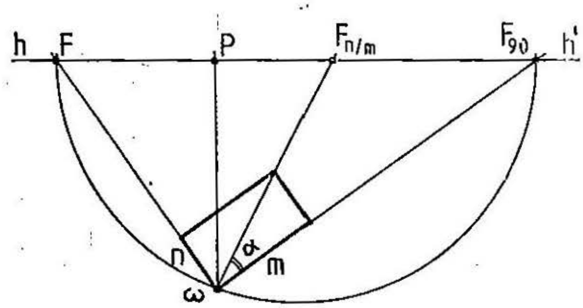


fig. 11.6.10

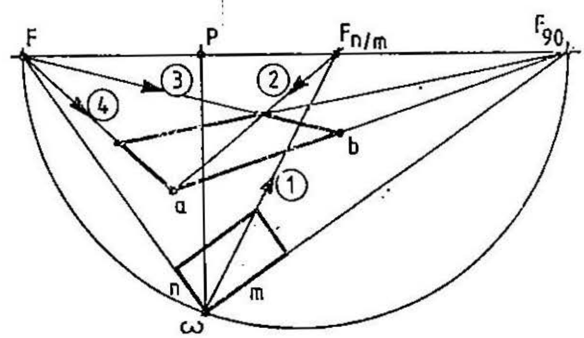


fig. 11.6.11

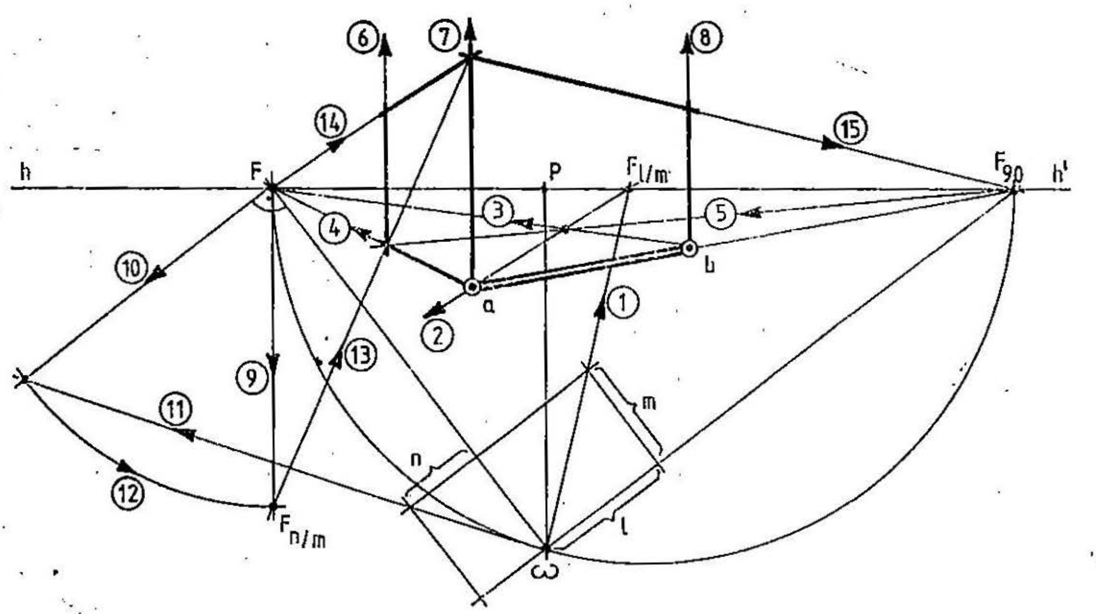


fig. 11.6.12

11. 7. PUNCTUL DE MĂSURĂ

DEFINIREA PUNCTULUI DE MĂSURĂ

Fiecărei direcţii în perspectivă îi corespunde pe linia orizontului un punct cu ajutorul căruia se poate măsura pe ea. Acest punct se numeşte *punctul de măsură* M al direcţiei respective. Se pune problema deci să se construiască în perspectivă un segment **ab** de o mărime dată, de exemplu, de 15 m (fig. 11.7.1). Pentru a rezolva această problemă metrică trebuie să se cunoască adevărata direcţie de fugă a segmentului dat şi înălţimea de la care este privit segmentul (de exemplu, H = = 5 m). Adevărata direcţie de fugă exprimă de fapt unghiul sub care este privit segmentul (este unghiul θ pe care îl face în plan segmentul cu tabloul). Înălţimea de la care se priveşte segmentul dă unitatea de măsură u = 5 m, cu care se operează în planul frontal ce trece prin punctul de unde a fost măsurată această înălţime H. Se alege dreapta în perspectivă pe care se va determina segmentul şi o extremitate a acestui segment, de exemplu punctul **a**. De asemenea, punctul principal de privire se alege astfel ca direcţia principală de privire să fie îndreptată către segment. Coborînd o verticală din P, la intersecţia cu adevărata direcţie de fugă a segmentului se găseşte poziţia observatorului ω.

Problema constă în a transpune cei 15 m din poziţia frontală (deci în adevărată mărime) în poziţia înclinată cu unghiul θ. În plan, această operaţie grafică se face cu un arc de cerc. În perspectivă trebuie să se ducă o paralelă la coarda subîntinsă de arcul de cerc din plan. Pentru aceasta trebuie să se afle care este punctul de fugă al acestei coarde. Punctul de fugă căutat se află ducînd din ω o paralelă la coarda din plan. Acest punct se notează cu M şi se numeşte *punct de măsură*. Unind cei 15 m determinaţi în planul frontal cu punctul de măsură M, se obţine punctul **b** căutat. *Punctul de măsură M al unei direcţii în perspectivă se află rotind punctul ω în jurul punctului de fugă pînă la linia orizontului.* Deci, celor două puncte de fugă F şi F_{90} le corespund pe linia orizontului două puncte de măsură M şi M_{90}. Aceste puncte de măsură sînt plasate de o parte şi de alta a punctului principal de privire P, rezultînd astfel configuraţia punctelor de fugă şi a punctelor de măsură (fig. 11.7.2).

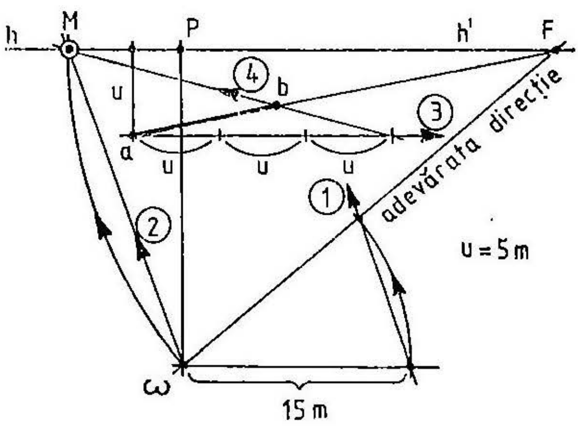


fig. 11.7.1

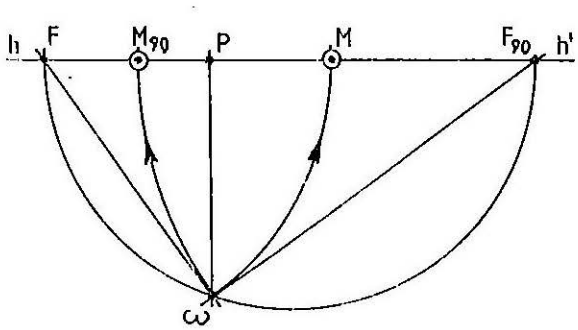


fig. 11.7.2

AFLAREA LUI M ŞI M_{90} CÎND F_{90} ŞI ω SÎNT INACCESIBILE

Trebuie să se cunoască adevărata direcţie de fugă către F şi poziţia punctului P pe linia orizontului (fig. 11.7.3). Se află punctele de fugă reduse, micşorînd întreaga configuraţie de un număr de ori, pentru a intra în formatul tabloului. În acest caz reducerea s-a făcut la jumătate. Se află punctele de măsură reduse m şi m_{90} şi apoi se revine, determinînd punctele M şi M_{90}.

CONSTRUCŢIA PERSPECTIVEI CU AJUTORUL PUNCTELOR DE MĂSURĂ

Să se construiască perspectiva unei prisme drepte dreptunghiulare la care se cunosc dimensiunile în plan l şi m şi înălţimea n, ştiind că este privită de la înălţimea H (fig. 11.7.4). Se fixează în tabloul de perspectivă muchia cea mai avansată a prismei Aa în stînga lui P. Se va ţine seama şi de înălţimea orizontului H. Prin această muchie Aa (muchia cea mai avansată către privitor), se ia planul frontal în care apar dimensiunile prismei în adevărată mărime. Unind extremităţile adevăratelor mărimi din planul frontal cu punctele de măsură, se delimitează cele două feţe verticale vizibile ale prismei.

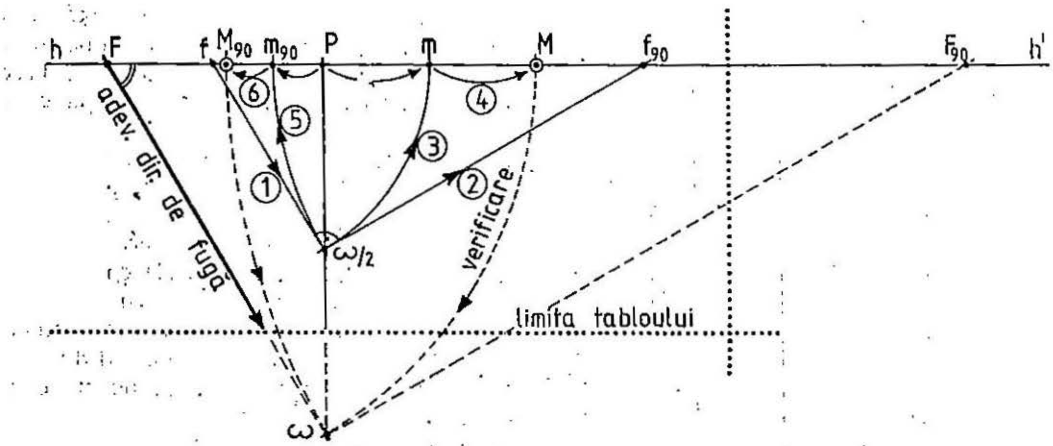


fig. 11.7.3

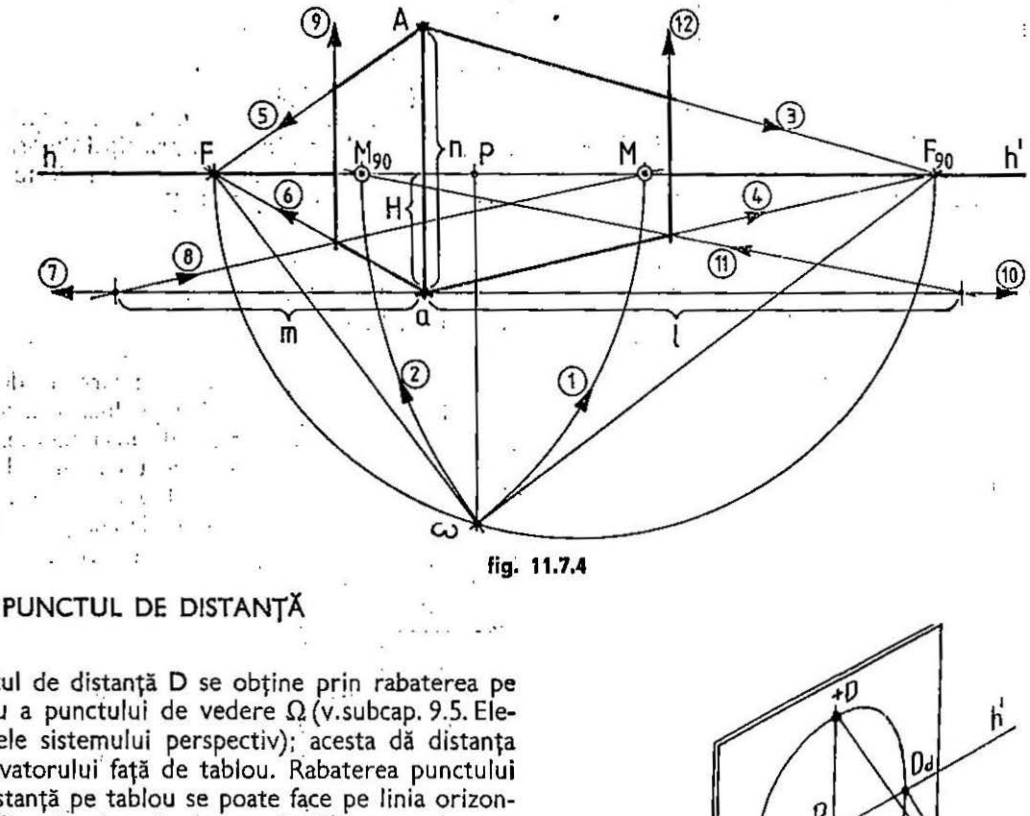


fig. 11.7.4

11.8. PUNCTUL DE DISTANȚĂ

Punctul de distanță D se obține prin rabaterea pe tablou a punctului de vedere Ω (v.subcap. 9.5. Elementele sistemului perspectiv); acesta dă distanța observatorului față de tablou. Rabaterea punctului de distanță pe tablou se poate face pe linia orizontului (în stînga sau în dreapta lui P) sau pe dreapta de fugă a planelor de capăt — verticala ce trece prin P (fig. 11.8.1). Punctul de distanță este utilizat în perspectiva frontală, unde el reprezintă punctul de fugă al direcțiilor la 45° (fig. 11.8.2). Cu ajutorul punctului de distanță se pot transpune unitățile de măsură din planul frontal pe dreptele ce fug

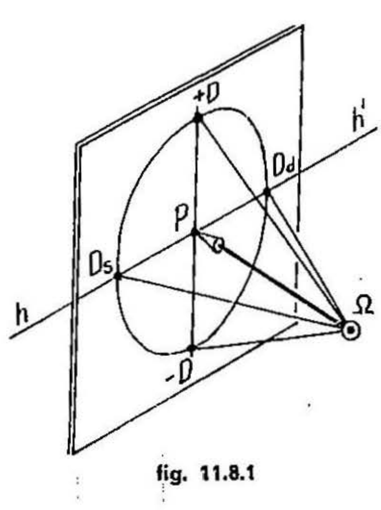


fig. 11.8.1

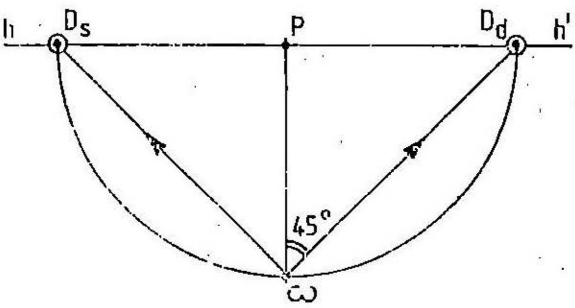


fig. 11.8.2

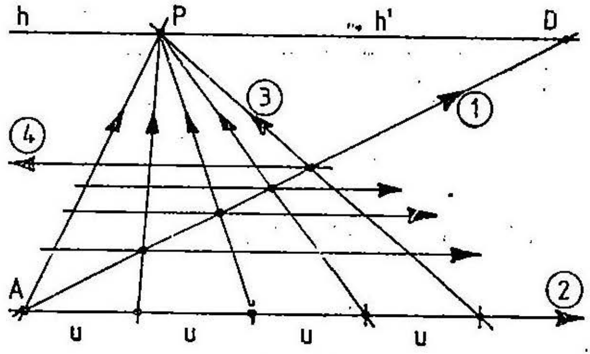


fig. 11.8.3

la P. Punctul principal de privire P este, în perspectiva frontală, punctul de fugă al tuturor dreptelor de capăt. Fiind punct de măsură și F_{45}, punctul de distanță D este folosit la împărțirea planului orizontal în pătrate egale cu unitatea (fig. 11.8.3). În desenul de perspectivă liberă, distanța lui D față de P se poate lua arbitrar, dar totuși între anumite limite. Dacă D este foarte departe de P, pătratele din planul orizontal rezultă foarte strînse, (fig. 11.8.4, a), iar dacă D este foarte aproape de P aceste pătrate rezultă mult mai deschise, chiar deformate (fig. 11.8.4, b). Păstrînd aceeași dimensiune frontală pe tablou, apropierea sau depărtarea lui D de P dă unghiul sub care se privește (v. subcap. 9.3. Condițiile unei bune perspective). Dintr-un studiu în plan se vede că se poate lua distanța PD egală cu lățimea perspectivei, deoarece această distanță corespunde conului vizual cu unghiul la vîrf de 53° (unde segmentul DP este egal cu diametrul cercului de bază al conului vizual — fig. 11.8.5). La distanțe mai mici apar deformări, iar la distanțe mai mari de P, perspectiva se aplatizează (unghiul vizual se micșorează). Precizări suplimentare vom face la studiul perspectivei frontale. Construcția cubului în perspectiva frontală cu ajutorul punctului de distanță este foarte simplă, deoarece două din fețele sale, fiind frontale, sînt pătrate (fig. 11.8.6). Cînd punctul de distanță

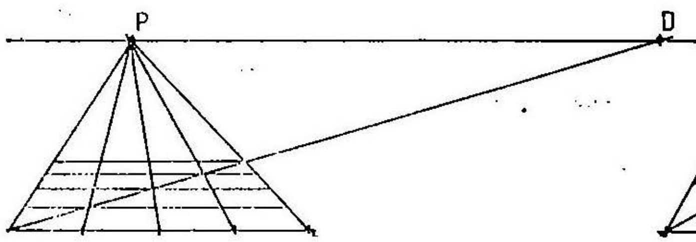


fig. 11.8.4, a

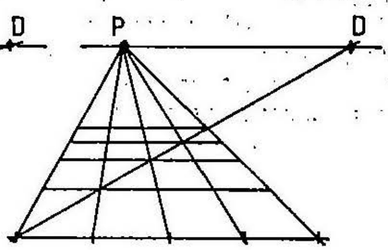


fig. 11.8.4, b

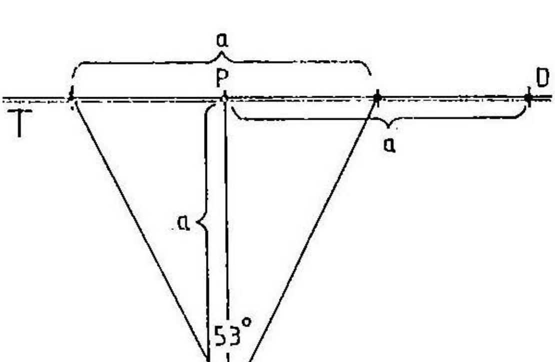


fig. 11.8.5

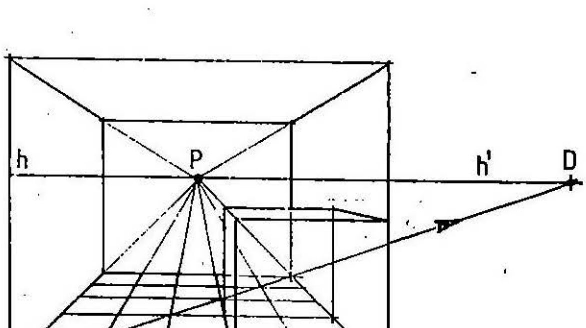


fig. 11.8.6

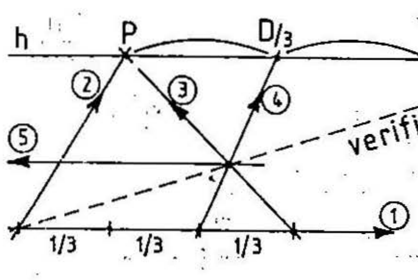


fig. 11.8.7

nu este accesibil se lucrează cu puncte de distanţă redusă. În figura 11.8.7, distanţa PD este redusă la o treime. Latura frontală a pătratului se împarte şi ea în trei părţi egale şi de la o treime din dreapta se uneşte cu punctul de distanţă redusă.

11.9. MĂRIREA PERSPECTIVEI DIRECT ÎN TABLOU

Socotind desenul perspectiv ca orice desen geometric, acesta poate fi mărit grafic. Această operaţie se dovedeşte necesară atunci cînd se doreşte ca o perspectivă, ce a rezultat prea mică, să fie mărită direct în tabloul de perspectivă fără să se reia întreaga construcţie de la început. Procedeul se bazează pe construcţia grafică din plan prin care un dreptunghi poate fi mărit cu ajutorul diagonalei. Printr-o asemănare de triunghiuri se obţine un desen asemenea cu cel dat (fig. 11.9.1). Totodată se amplifică şi sistemul perspectiv. Deci, prin acest procedeu se obţine acelaşi rezultat ca în cazul depărtării tabloului de poziţia observatorului. Se prelungeşte diagonala pînă în punctul dorit Q, iar apoi se duc paralele la muchii. Se observă că noile puncte de fugă sînt mai depărtate şi pe o linie de orizont mai sus. Pentru a păstra aceeaşi linie de orizont se măreşte perspectiva în raport cu aceasta, amplificînd separat, în sus şi în jos, fiecare parte a feţei volumului (fig. 11.9.2). Mărirea a două volume intersectate se face păstrînd la locul ei muchia lor de intersecţie (fig. 11.9.3). Se duce diagonala din punctul imaginar K unde această muchie, aparent, se intersectează cu linia orizontului. Se măresc mai întîi feţele ce se intersectează după muchia ce trece prin K, apoi prin paralelism se determină noile puncte de fugă. Pentru a determina şi celelalte două feţe se foloseşte acelaşi punct K. Această operaţie se poate face şi într-o fază iniţială de construcţie a perspectivei, mărindu-se numai perspectiva planului obiectului dat (fig. 11.9.4). Se alege un punct K pe linia orizontului şi se măreşte planul ducînd paralele la muchii, formînd cu acestea şi cu punctul K triunghiuri asemenea.

Se recomandă această metodă de a mări o perspectivă, direct în tablou, numai pentru volume foarte simple (de exemplu, volumul anvelopant al unui ansamblu de arhitectură). Pentru volume mai complicate este absolut necesară refacerea întregii construcţii.

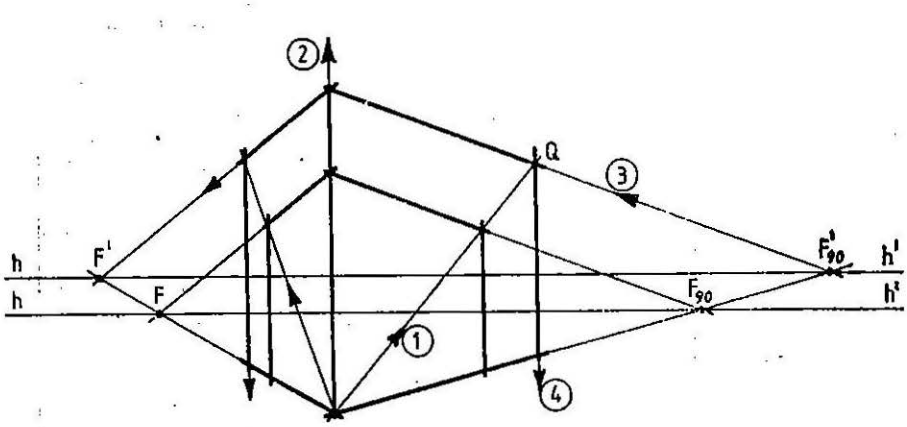


fig. 11.9.1

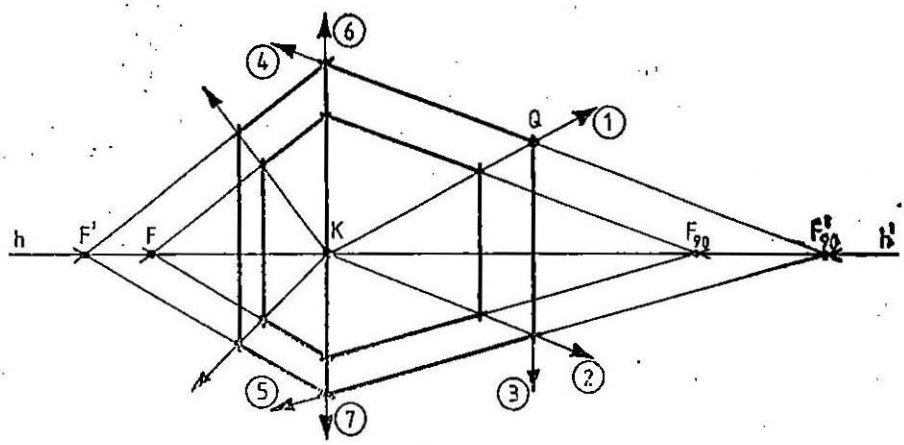


fig. 11.9.2

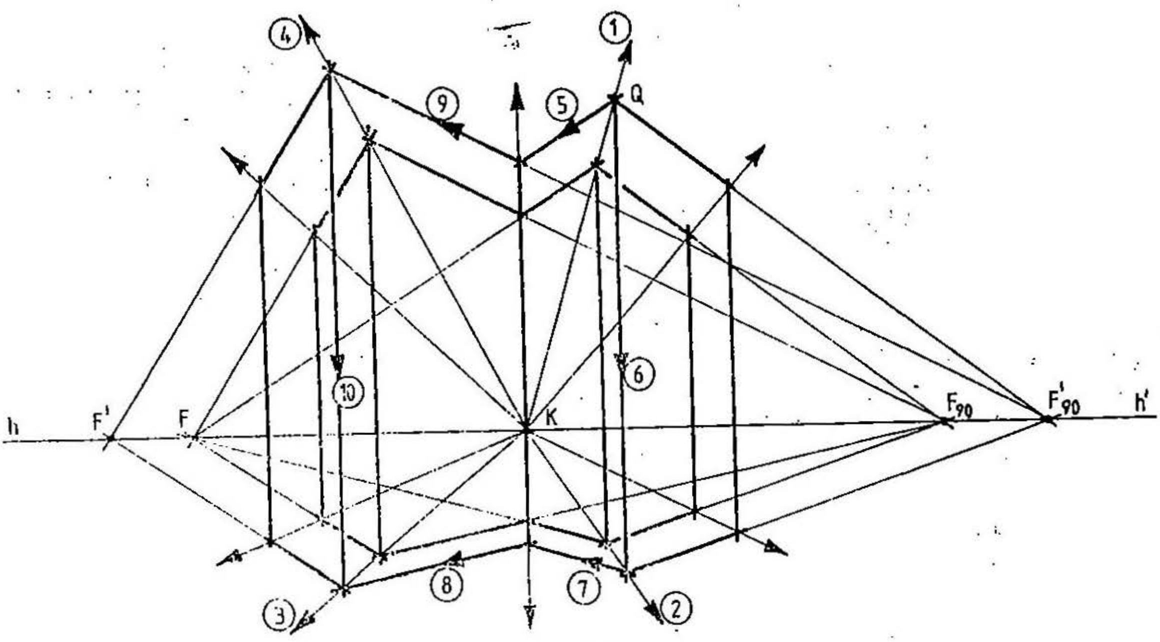


fig. 11.9.3

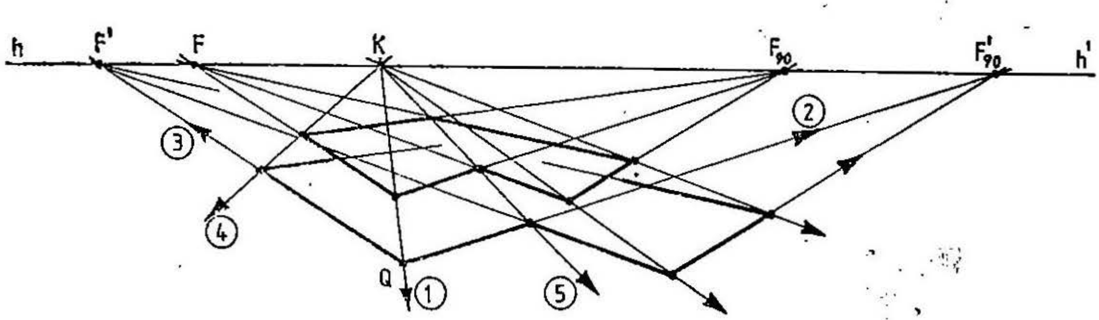


fig. 11.9.4

11.10. CERCUL ŞI SFERA ÎN PERSPECTIVĂ

IMAGINILE PERSPECTIVE ALE CERCULUI

Cercul din spaţiu determină cu punctul de vedere Ω un con — conul vizual. Tabloul joacă rol de plan de secţiune în acest con. Conform teoremei lui Dandelin (studiată în capitolul 6 la con şi cilindru), felul curbei de secţiune este dat de poziţia planului de secţiune. Cum tabloul este paralel cu planul neutru, se studiază perspectiva cercului în funcţie de poziţia planului neutru faţă de cercul din spaţiu (fig. 11.10.1). Dacă planul neutru taie cercul din spaţiu în:

a) zero puncte — cercul apare tot în cîmpul vizual, iar perspectiva lui este *elipsă*;

b) într-un punct (tangent) — cercul trece prin poziţia observatorului şi perspectiva lui este *parabolă*;

c) două puncte — observatorul se găseşte în interiorul cercului, iar perspectiva lui este *hiperbolă*.

În perspectiva de interior din figurile 11.10.2 şi 11.10.3 se citesc clar imaginile perspective ale unor cercuri concentrice. Cercurile ce se văd complet dau imagini-elipse, iar cele ce se închid în spatele privitorului, dau imagini-hiperbole. Parabolele nu pot fi determinate decît teoretic, cu ajutorul epurei de geometrie descriptivă. Perspectiva cercului se realizează înscriind cercul într-un pătrat. După cum pătratul este orientat frontal sau la două puncte de fugă, perspectiva cercului poate să fie frontală sau la două puncte de fugă. Pentru a mări exactitatea desenului, se construieşte elipsa prin 8 puncte, ţinînd seama de relaţiile ce există între pătrat şi cercul înscris în el: tangenţa la laturi şi raportul dintre diagonala pătratului şi raza cercului înscris în el (fig. 11.10.4).

CERCUL ÎN PERSPECTIVA FRONTALĂ

Se construieşte mai întîi perspectiva pătratului cu ajutorul punctului de distanţă, iar apoi se transpune raza cercului pe diagonala pătratului în perspectivă (fig. 11.10.5). Elipsa va fi tangentă la dreptele AD şi BD, aceste drepte fiind paralele cu diagonala pătratului.

CERCUL ÎN PERSPECTIVA LA DOUĂ PUNCTE DE FUGĂ

Problema este de a transpune raza cercului pe diagonala pătratului. Aceasta se rezolvă cu ajutorul lui F_{45} (fig. 11.10.6).

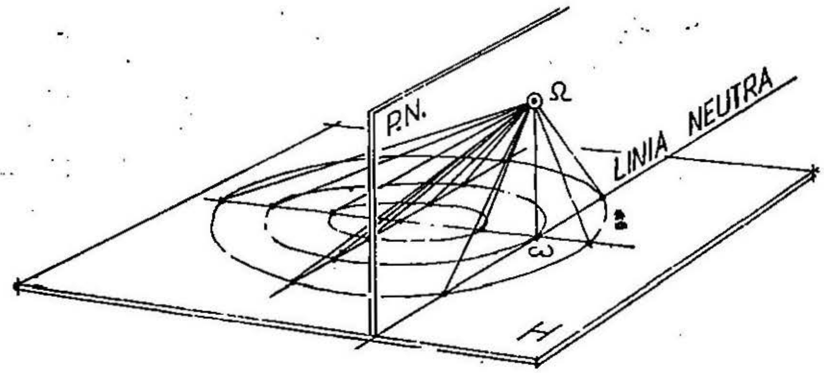


fig. 11.10.1

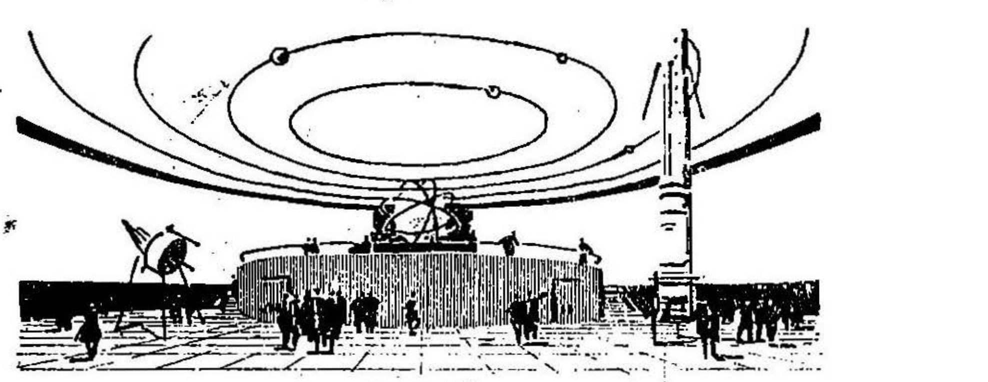


fig. 11.10.2

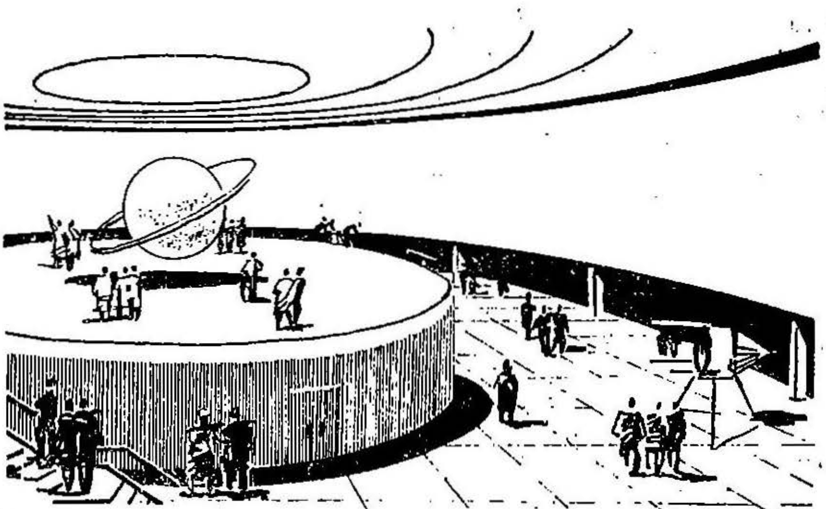


fig. 11.10.3

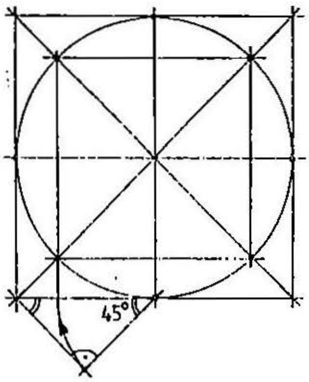


fig. 11.10.4

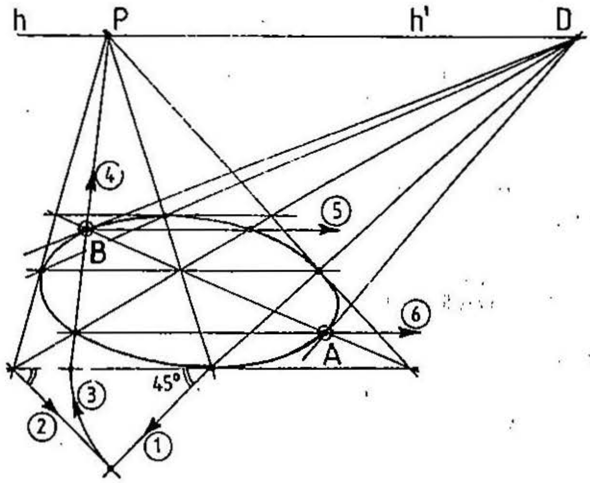


fig. 11.10.5

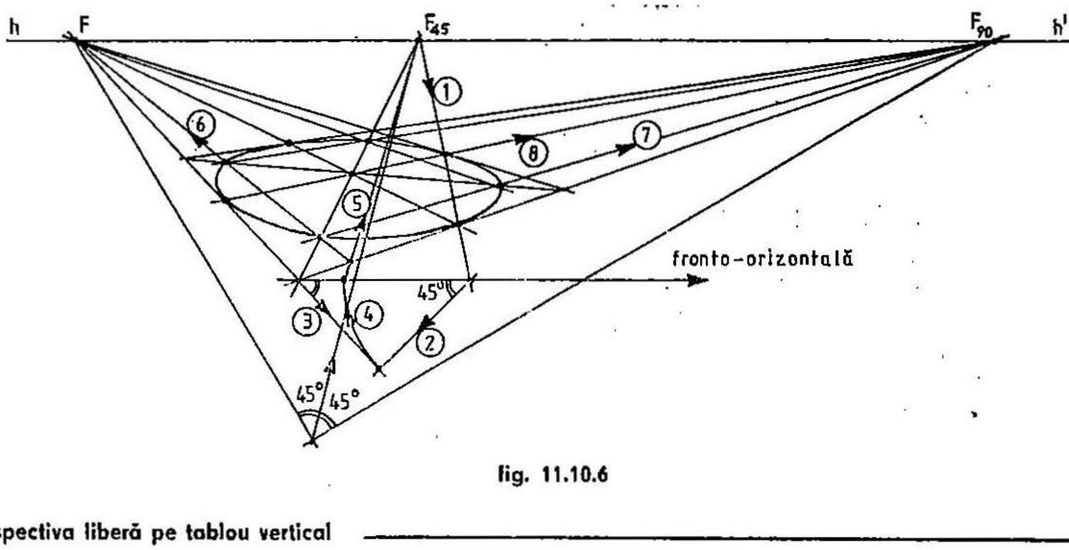


fig. 11.10.6

EFECTE EXCESIVE ALE PERSPECTIVEI CERCULUI

Se observă că cele două curbe rezultate în ambele perspective [illegible] diferite de elipsele percepute de ochiul observatorului. Elipsa în perspectivă prezintă o oarecare asimetrie, iar această asimetrie este cu atît mai mare, cu cît elipsa este plasată mai la periferia unghiului optim vizual. Numai cercurile privite în centru dau perspective elipse simetrice față de axa lor verticală. În perspectiva de observație, datorită mobilității ochilor, nu se percepe această asimetrie. Ochii țintesc totdeauna centrul cercurilor aflate în cîmpul vizual. Desenul perspectiv fiind fix prezintă acest efect excesiv, efect ce nu este perceput în realitate. Cu puțină abilitate se poate corecta această deformare supărătoare. Efectul apare mai evident în cazul perspectivei unor cilindri așezați frontal (fig. 11.10.7). Cilindrul din stînga are un contur aparent evident mai mare, deși este mai departe de punctul principal de privire. În realitate cei doi cilindri sînt egali, fiind situați și în același plan frontal. În cazul unghiului optim vizual, această diferență este practic neglijabilă. Dacă perspectiva este extinsă și pe verticală, planurile cercurilor de la partea superioară a cilindrilor par a nu fi orizontale. Și această deformație poate fi corectată în perspectivă (fig. 11.10.8).

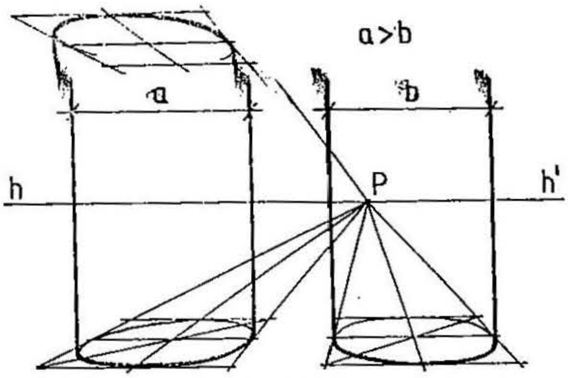


fig. 11.10.7

PERSPECTIVA SFEREI

Dacă direcția principală de privire trece prin centrul sferei, tabloul T este paralel cu planul cercului de contur al sferei, iar perspectiva ei este un cerc (fig. 11.10.9). Teorema lui Dandelin se aplică și la perspectiva sferei, astfel sfera apare *elipsă*, cînd direcția principală de privire nu trece prin centrul ei (fig. 11.10.10). Extremitățile diametrului perpendicular pe tablou dau focarele elipsei F_1 și F_2. Datorită mobilității ochilor, observatorul vede sfera totdeauna un cerc, ochii vizînd mereu centrul sferei. Într-o perspectivă în care apar, de exemplu, două sfere, perspectivele lor vor fi niște elipse, deoarece direcția principală de privire nu poate să vizeze în același timp centrele ambelor sfere. Unghiul vizual fiind foarte îngust, perspectiva sferei apare practic ca fiind foarte aproape de un cerc; deci, nu se va greși niciodată dacă se va desena perspectiva unei sfere, care apare în întregime în cîmpul vizual, ca fiind un cerc.

Dacă planul neutru este tangent la sferă, perspectiva ei este o *parabolă*. Această situație se întîlnește cînd observatorul desenează o calotă sferică

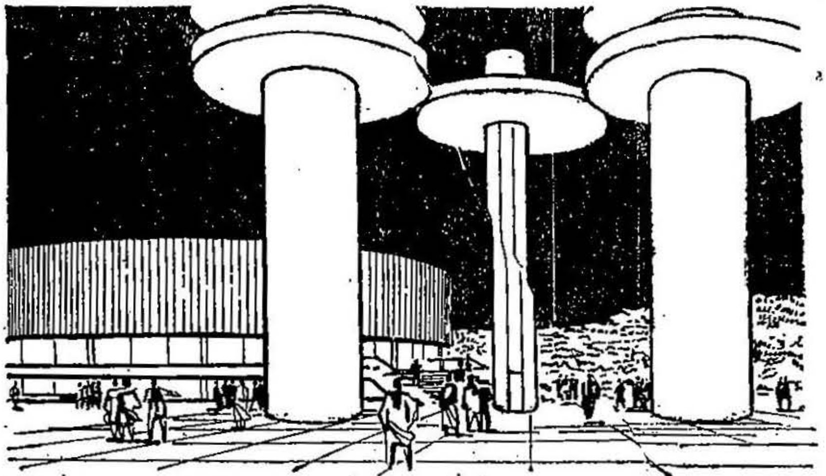


fig. 11.10.8

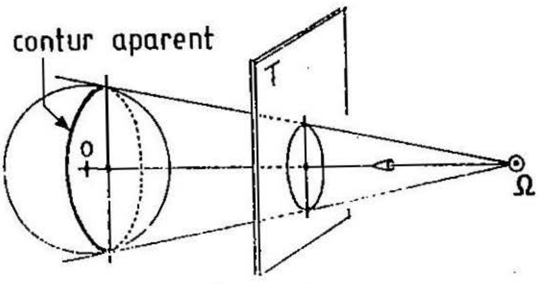


fig. 11.10.9

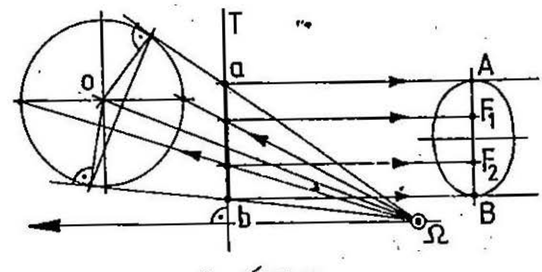


fig. 11.10.10

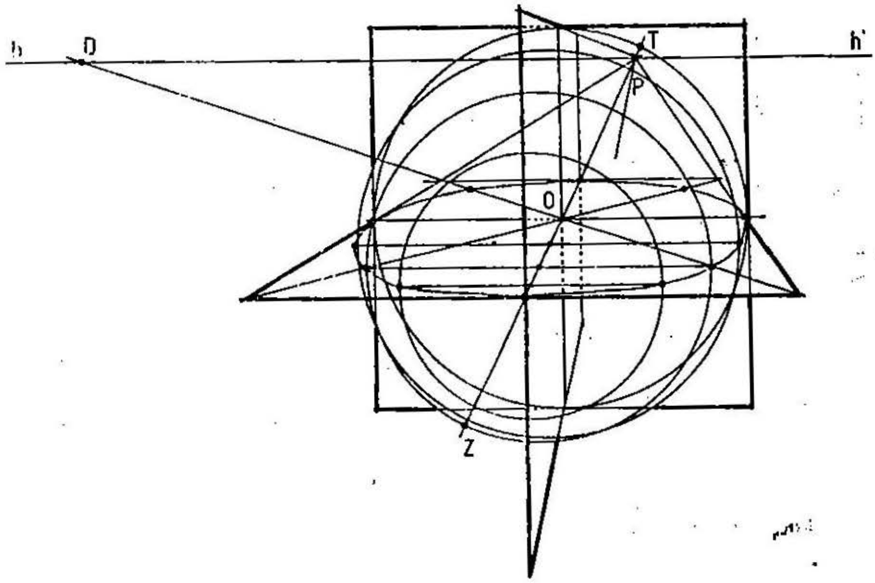


fig. 11.10.11

si se găsește pe sfera imaginară ce cuprinde această calotă sau cînd pur și simplu se găsește pe o cupolă sferică și desenează perspectiva mărginită de această cupolă.

Cînd planul neutru taie sfera, perspectiva ei este *hiperbolă*. Acesta este cazul perspectivei de interior a sferei.

Să se construiască sfera într-o perspectivă frontală cu ajutorul punctului de distanță (fig. 11.10.11). Mai întîi se pune în evidență cercul ecuator, apoi se construiesc cercurile frontale cu centrul pe dreapta de capăt OP. Perspectiva sferei este înfășurătoarea acestor cercuri frontale și este o elipsă cu axa mare ZT pe dreapta de capăt OP.

PERSPECTIVA DE INTERIOR A SFEREI

Văzută din interior sfera nu prezintă un contur aparent, deci ea nu are o perspectivă limitată. Perspectiva de interior a sferei este totuși posibilă punînd în evidență cercurile ei paralele și meridiane. Pentru aceasta trebuie să facem un studiu în dublă proiecție ortogonală (fig. 11.10.12). A. Gheorghiu ne prezintă un astfel de studiu în tratatul său de perspectivă (1963). Se ia în dublă proiecție ortogonală planul și secțiunea unei bolți semisferice de centru (s, s'), care stă pe un cilindru vertical de înălțime l și punctul de vedere (ω, ω') de cotă H. Pentru simplificarea studiului se ia tabloul în axa bolții.

În plan se citește natura perspectivelor meridianelor. Meridianele ce trec prin punctele de intersecție r și t (ale planului neutru cu cercul de bază al semisferei) dau imagini parabolice, fiind tangente la planul neutru. Meridianele parabolice împart totalitatea meridianelor semisferei în două categorii:

— meridiane hiperbolice, cele cuprinse în unghiurile r_1st_1 și rst;

— meridiane eliptice, cele cuprinse în unghiurile rst_1 și tsr_1.

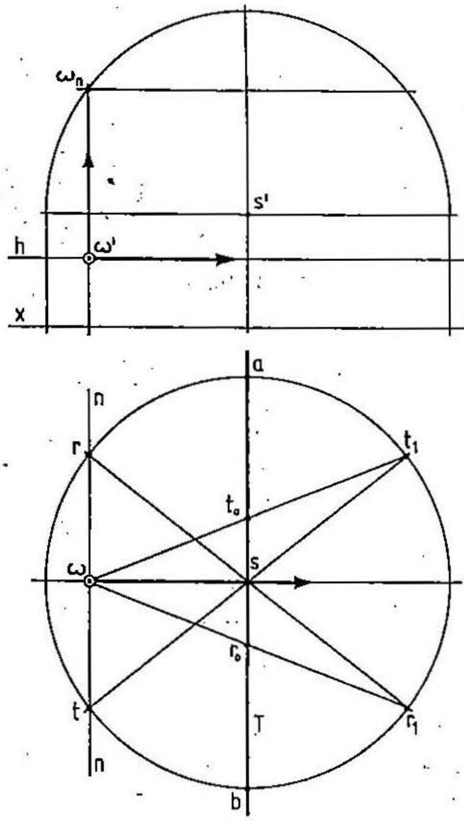


fig. 11.10.12

În secțiune, se citește natura cercurilor paralele. Paralelul ce trece prin ω' este în perspectivă o parabolă. Sub paralelul parabolic este zona paralelilor hiperbolici, iar peste acesta zona paralelilor eliptici.

Se construiește perspectiva de interior a sferei (fig. 11.10.13). Se desenează meridianul frontal al sferei a cărui perspectivă este el însuși (AVB). Pentru a pune în evidență cîteva cercuri paralele, se împarte acest meridian frontal în arce egale prin punctele **1**, **2**, **3**, **4**. Prin aceste puncte vor trece ramurile curbelor ce reprezintă perspectiva cercurilor paralele. Vîrfurile acestor curbe se obțin unind punctele **1**, **2**, **3**, **4** cu Ω_0 rabătut pe linia orizontului. Acestea sînt de fapt raze vizuale, care intersectînd axa bolții dau punctele **1***, **2***, **3***, **4*** — vîrfurile paralelilor în perspectivă. Punctele X și Y, prin care trece paralelul parabolic, au aceeași cotă cu cercul paralel din secțiune. Perspectivele meridianilor parabolici se obțin din planul dublei proiecții, unde **r'** și **t'** sînt proiecțiile pe tablou ale lui r_1 și t_1, iar r_0 și t_0 sînt intersecțiile razelor vizuale cu tabloul. Se observă că perspectiva de interior a sferei, limitată de meridianul frontal, prezintă efecte excesive. Pentru a obține o imagine corectă, se limitează tabloul perspectiv în jurul lui P, ținînd seama de condițiile unei bune perspective.

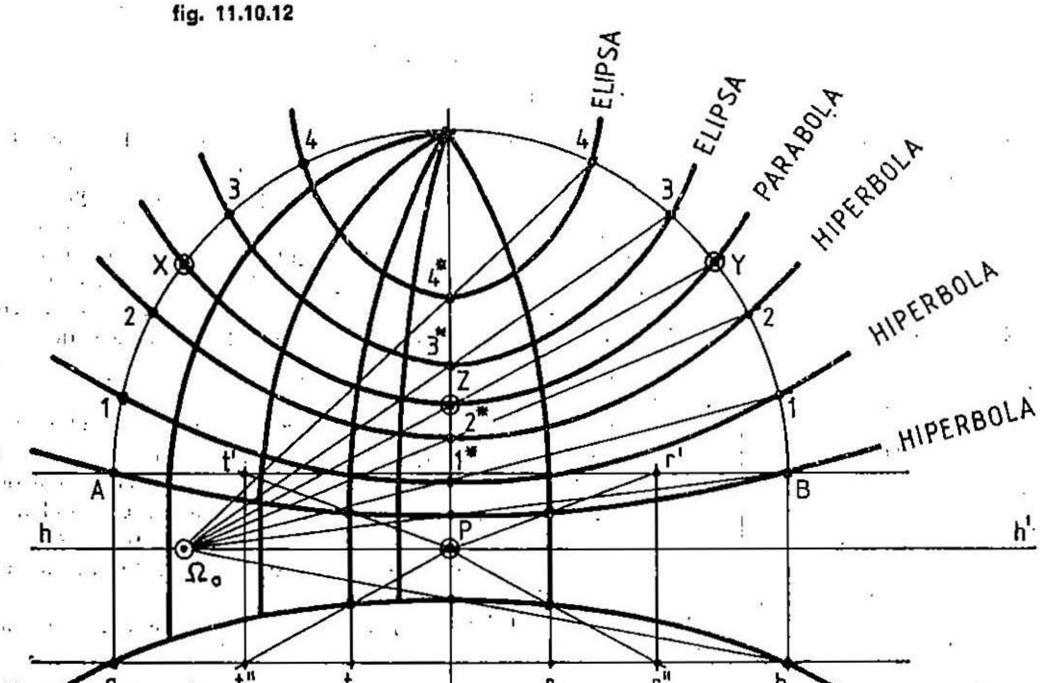


fig. 11.10.13

12.

CONSTRUCȚIA PERSPECTIVEI DE ARHITECTURĂ

12.1. METODE UZUALE DE CONSTRUCȚIE A PERSPECTIVEI

Pentru a construi perspectiva unui volum sau ansamblu de volume de arhitectură, trebuie să se încadreze acest volum sau ansamblu de volume într-un volum mai simplu, uzual într-o prismă dreaptă dreptunghiulară. Dacă se pune această prismă în perspectivă (prin metodele arătate), nu rămîne decît să fie mobilată cu obiectele pe care le conține, folosindu-se metodele perspectivei libere (diviziuni perspective și puncte de măsură). O prismă dreaptă dreptunghiulară se poate pune în perspectivă, astfel:

a) *metoda mixtă*, în care paralelipipedul dreptunghic se construiește prin metodele perspectivei dependente, iar detaliile se finisează cu ajutorul perspectivei libere;

b) *perspectiva liberă folosind punctele de măsură*, care este cea mai indicată, deoarece îmbină elasticitatea perspectivei libere (se operează unele schimbări de unghiuri direct în tablou) cu precizia perspectivei dependente (deoarece în prealabil se face un studiu de alegere a punctului de vedere, din care rezultă punctul principal de privire P și adevărata direcție de fugă către punctul de fugă accesibil);

c) *perspectiva liberă — pornind de la elemente fixate direct în tablou*, după care se determină celelalte elemente ale sistemului perspectiv, necesare construcției riguroase a perspectivei.

Ultimele două metode se dovedesc cele mai utile în construcția perspectivei de arhitectură, de aceea le vom aprofunda în studiul nostru. Metoda a treia se recomandă a fi folosită numai după o practică îndelungată de construcție a perspectivei. Metoda perspectivei libere, ce utilizează punctele de măsură, este mai completă și poate fi abordată încă de la începutul studiului perspectivei. Etapele de construcție a acestei perspective sînt:

— studiul privind alegerea punctului de vedere; această etapă este valabilă și la metodele mixte de construcție a perspectivei;
— transpunerea pe tablou a datelor obținute (punctul principal de privire P, punctul de fugă F accesibil, adevărata direcție de fugă către F accesibil);
— aflarea direcției către celălalt punct de fugă și a punctelor de măsură, prin metoda punctelor de fugă reduse (dacă este cazul);
— construcția paralelipipedului dreptunghic și analizarea acestuia din punct de vedere estetic;
— mobilarea acestui paralelipiped cu obiectele și detaliile de arhitectură, folosind diviziunile perspective și punctele de măsură; pentru ușurință se construiește grătarul perspectiv al planului paralelipipedului dreptunghic;
— trasarea umbrelor proprii și purtate;
— ambietarea perspectivei cu elemente care să o apropie cît mai mult de viziunea realului (oameni, mașini, elemente de arhitectură de dimensiuni cunoscute, elemente de vegetație și relief care să mărginească și să închidă perspectiva etc.).

12.2. ALEGEREA PUNCTULUI DE VEDERE

Pentru ca perspectiva unui volum de arhitectură să redea imaginea realității, trebuie ca ea să corespundă cît mai mult imaginii pe care o realizează ochiul, atunci cînd se privește volumul considerat. Deci, pentru o bună perspectivă nu este suficientă o construcție geometrică corectă, ci trebuie respectate condițiile fiziologice ale mecanismului vederii umane. Aceste cerințe au fost formulate în cadrul definirii condițiilor obținerii unei bune perspective, dar nici acestea nu sînt suficiente La fel ca în toate artele ce folosesc imaginea (fotografie, cinematografie, televiziune), succesul unei

perspective este în funcţie de amplasarea punctului de vedere în raport cu obiectul. Această operaţie comportă două aspecte: un aspect este legat de poziţia punctului de vedere în jurul obiectului, iar altul este legat de distanţa punctului de vedere faţă de obiect; primul determină nişte *zone de vizibilitate* în jurul obiectului, al doilea determină unghiul optim sub care este privit obiectul.

ZONE DE VIZIBILITATE

În jurul unei prisme drepte dreptunghiulare rezultă 8 zone de vizibilitate, limitate de prelungirile laturilor dreptunghiului de bază şi caracterizate prin diverse contururi aparente în perspectivă. Sînt deci 4 *zone frontale* (haşurate) şi 4 *zone unghiulare* sau *de colţ* (fig. 12.2.1). Alegerea punctului de vedere într-o zonă frontală de vizibilitate se foloseşte la perspectivele de interior sau la perspectivele unor ansambluri de volume de arhitectură dispuse în compoziţii concave.

Din zonele unghiulare de vizibilitate rezultă perspectivele de colţ sau la două puncte de fugă. La perspectivele de colţ, poziţionarea punctului de vedere în plan mai este condiţionată de factorii prezentaţi în continuare.

a) Se va evita alegerea punctului de vedere pe bisectoarea unghiului de 90° şi într-o zonă apropiată ei (fig. 12.2.2). Dacă obiectul de arhitectură nu este compus în plan după această linie la 45°, perspectivele lui de pe bisectoare şi din imediata apropiere sînt dezagreabile (fig. 12.2.3). Perspectivele făcute de pe bisectoarea unghiului feţelor au muchiile, care pleacă din vîrful A, egal înclinate faţă de fronto-orizontala care trece prin A (deşi feţele sînt inegale, ele „fug" sub acelaşi unghi). Pentru compoziţiile simetrice faţă de bisectoarea la 45° acest aspect nu mai supără, deoarece feţele sînt egale şi „fug" la fel (fig. 12.2.4).

b) Se va evita alegerea punctului de vedere pe una din prelungirile laturilor şi într-o zonă din imediata ei apropiere. Rezultă perspective inexpresive, foarte apropiate de perspectivele frontale şi care nu dau o imagine completă despre obiectul reprezentat în perspectivă (fig. 12.2.5).

c) Alegerea uneia sau alteia din cele două zone rămase, pentru amplasarea punctului de vedere se face în funcţie de scopul urmărit, de a pune în valoare una sau alta din feţele obiectului (v. fig. 12.2.2). Se va ţine seama de faptul că perspectiva de arhitectură trebuie să creeze o imagine corectă despre obiectul proiectat. Numai perspectiva din zona B creează această imagine corectă a obiectului

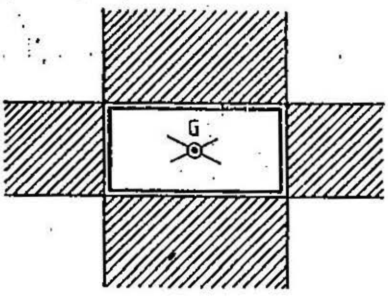


fig. 12.2.1

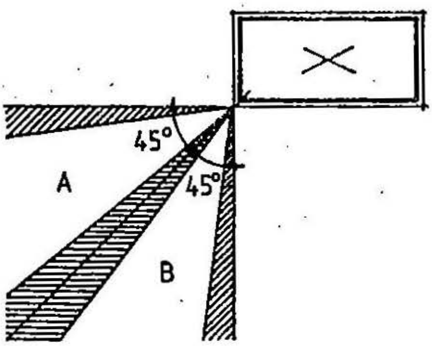


fig. 12.2.2

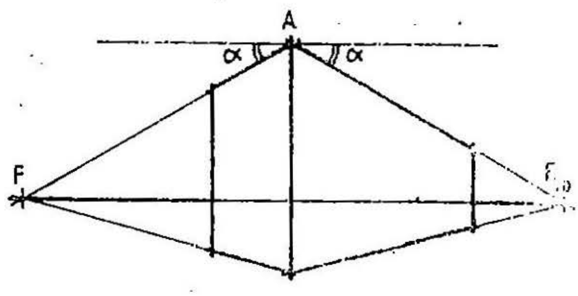


fig. 12.2.3

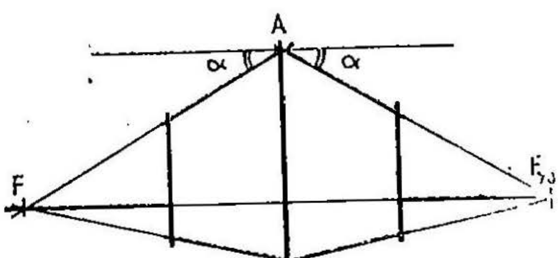


fig. 12.2.4

lui, adică în perspectivă va apărea faţada lungă mai mare decît faţada scurtă (fig. 12.2.6). Din zona A nu se poate aprecia corect forma obiectului (fig. 12.2.7).

Necesităţile compoziţionale pot să dicteze alegerea punctului de vedere, dar şi un punct de vedere impus poate să dicteze o anumită compoziţie de arhitectură, deci acest aspect al punctului de vedere poate şi trebuie să intervină în însăşi proiectarea obiectului de arhitectură.

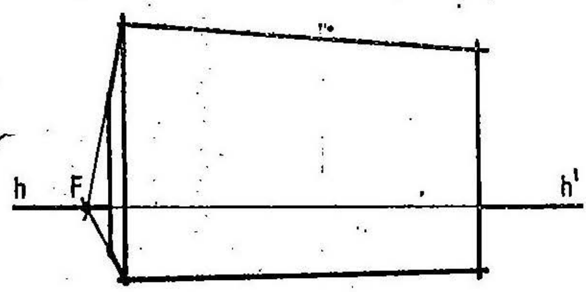


fig. 12.2.5

DISTANŢA PUNCTULUI DE VEDERE FAŢĂ DE OBIECT

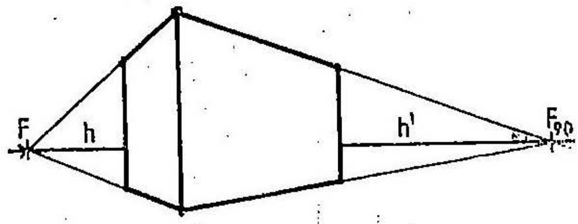


fig. 12.2.6

Această distanţă determină unghiul sub care se vede obiectul respectiv (fig. 12.2.8). Pentru fiecare poziţie a punctului de vedere rezultă cîte o imagine perspectivă a obiectului vizat (fig. 12.2.9). Se observă că, la apropierea de obiect, unghiul vizual sub care este privit obiectul se măreşte, iar imaginea lui perspectivă se schimbă. La unghiuri foarte mici, imaginea obiectului este plată. Unghiul de fugă al muchiilor se accentuează odată cu creşterea unghiului vizual, ajungînd în final să se obţină o perspectivă deformată. Dar în perspectiva obţinută în poziţia 4 se observă că apare şi imaginea prismei din poziţia 1. Aceasta este imaginea unei prisme identice cu prisma dată, dar situată la o distanţă de aceasta, imagine ce poate să fie văzută sub acelaşi unghi ca în poziţia 1. De aici, se

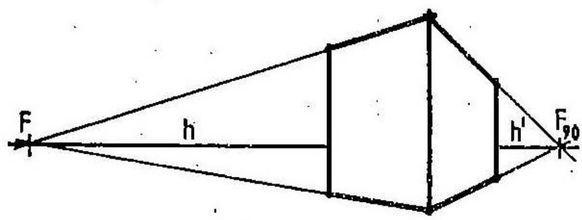


fig. 12.2.7

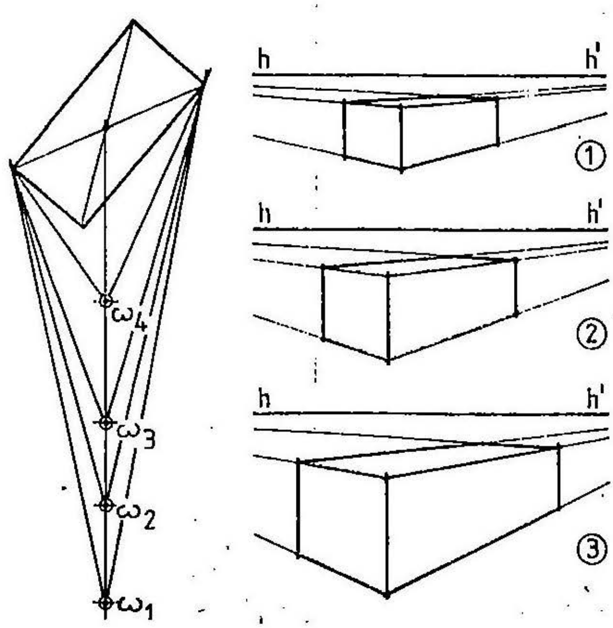


fig. 12.2.8

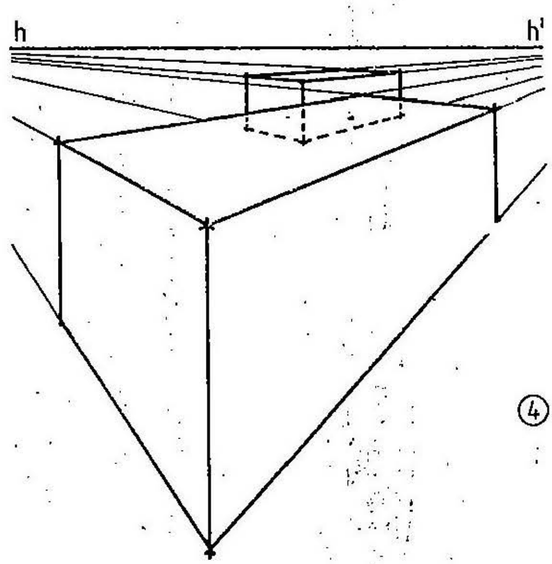


fig. 12.2.9

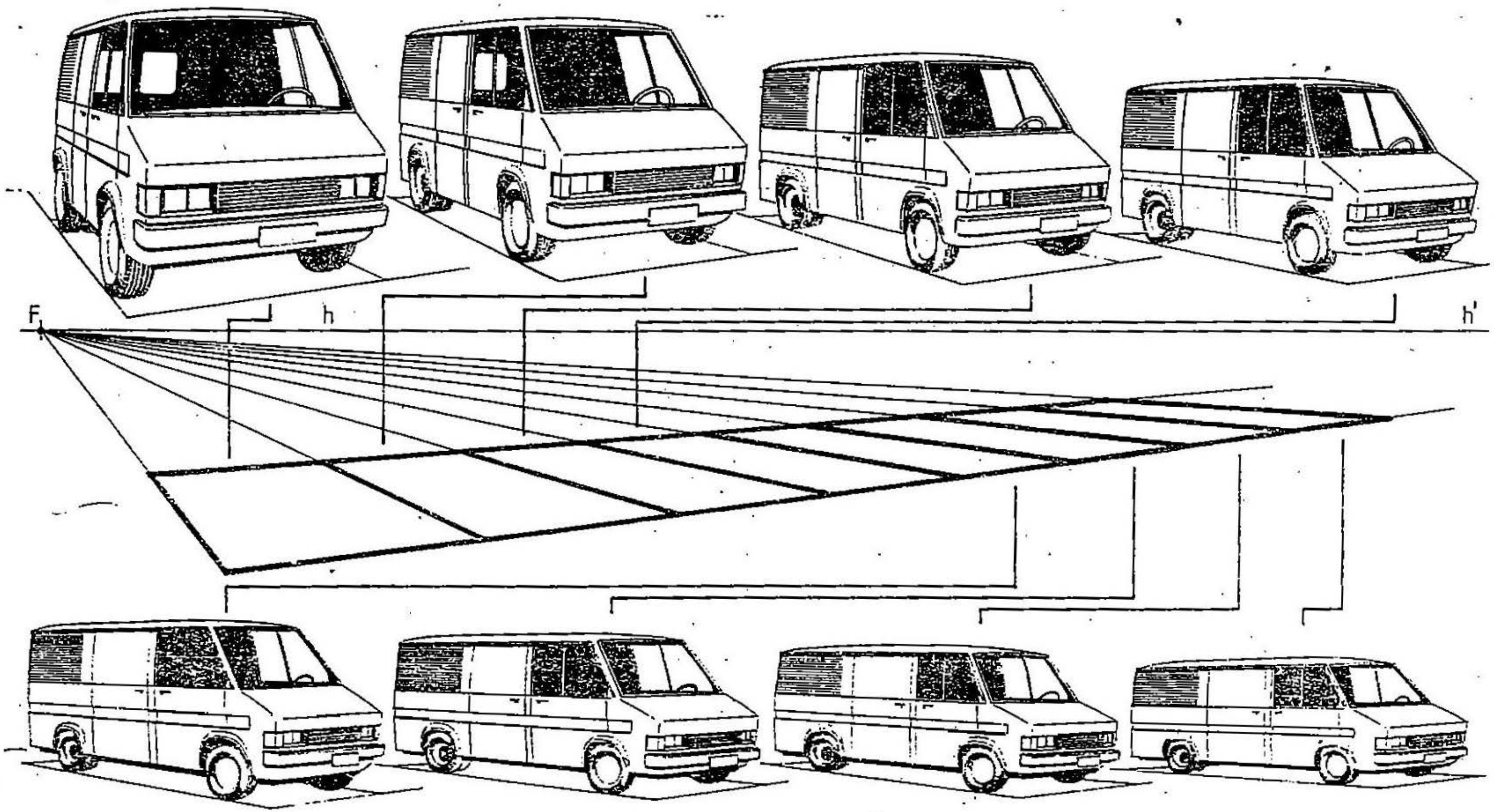


fig. 12.2.10

deduce că perspectiva din poziția 4 nu este deformată în totalitate, ci numai ceea ce iese din unghiul optim vizual. Dacă se acoperă partea de jos a acestui desen perspectiv, se obține o imagine nedeformată; deci, în perspectiva la două puncte de fugă, supără unghiurile apropiate de 90°. Imaginea aceluiași obiect suferă modificări și în funcție de locul pe care îl ocupă obiectul în tabloul de perspectivă (fig. 12.2.10). Se observă că, spre marginile tabloului perspectiv, imaginea automobilului capătă efecte excesive.

Distanța punctului de vedere față de obiect este dictată de unghiul optim vizual stabilit (v. subcap. 9.2 și 9.3) de 37° pe orizontală și 28° pe verticală. Dacă obiectul sau ansamblul de obiecte este dezvoltat mai mult în plan orizontal, iar perspectiva se face la nivelul ochilor, distanța punctului de vedere este dictată de unghiul optim perspectiv de 37° în plan orizontal (fig. 12.2.11). Dacă se construiește o perspectivă a unui bloc-turn, distanța punctului de vedere față de obiect este dictată de unghiul vertical de 28°. Unghiul de 28° pe verticală se alege astfel ca direcția principală de privire să fie orizontală (cazul perspectivei pe tabloul vertical). Rezultă că se iau 14° deasupra și 14° sub linia orizontului. Din figura 12.2.12 reiese că în perspectivă va apărea în fața obiectului de arhitectură și o porțiune de teren egală cu segmentul **a**. La perspectivele cu linia de orizont situată deasupra ansamblului de arhitectură trebuie să se compare dezvoltarea pe verticală a ansamblului cu înălțimea de la care este privit ansamblul. În funcție de această comparație se alege unghiul care dictează distanța punctului de vedere față de obiect. De fapt, cînd un obiect este privit de la înălțime, cu direcția principală de privire orizontală, observatorul trebuie să se depărteze foarte mult de el, pentru ca acesta să intre în unghiul optim vizual. Este cazul blocului-turn la care lipsește partea de deasupra (fig. 12.2.13). Linia de orizont face parte integrantă din perspectivă și ea trebuie să apară materializată într-un fel în tablou.

Unghiurile de 37° pe orizontală și 28° pe verticală, care limitează cîmpul vizual perspectiv, limitează și tabloul de perspectivă. Astfel se pot determina dimensiunile tabloului, corespunzătoare acestor unghiuri (fig. 12.2.14). Punctul principal de privire **P** se găsește situat în centrul tabloului de perspectivă. Pe orizontală în stînga și în dreapta lui **P**

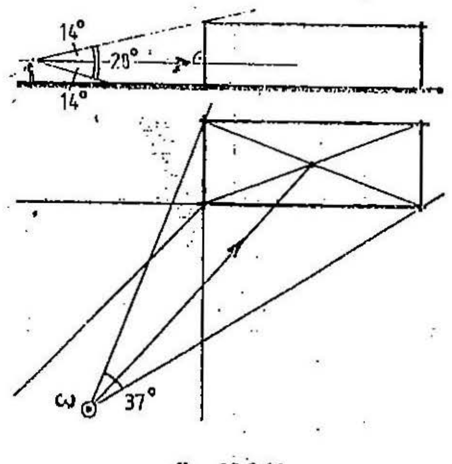


fig. 12.2.11

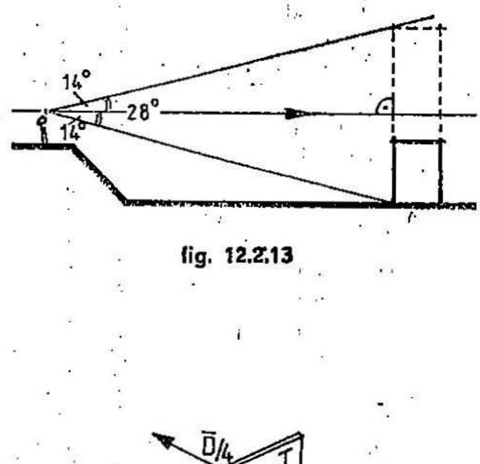


fig. 12.2.13

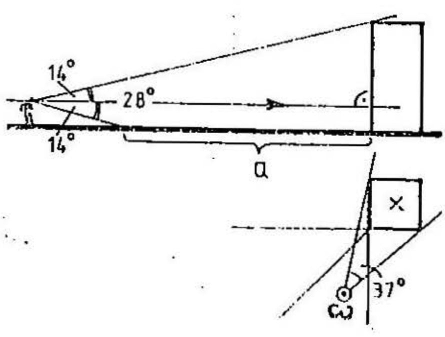


fig. 12.2.12

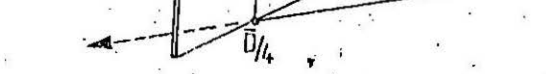


fig. 12.2.14

12.3. EXEMPLU PRACTIC DE ALEGERE A PUNCTULUI DE VEDERE

Să se construiască diferite tipuri de perspectivă ale ansamblului de arhitectură prezentat în figura 12.3.1. Pentru a simplifica problema, ansamblul a fost modulat atît pe orizontală, cît și pe verticală, modulul fiind de 6 m, iar volumul cel mai înalt se consideră de 20 de niveluri.

Studiul pentru alegerea punctului de vedere se poate efectua direct pe planurile de arhitectură, dacă acestea au dimensiuni convenabile, dar mai ușor se face pe prisma dreaptă dreptunghiulară ce îmbracă întregul ansamblu. Locul de unde se privește ansamblul se alege în funcție de următoarele aspecte:

— vederea principală poate să dicteze acest loc;
—volumele să nu se acopere unele pe altele;
— din considerente estetice;
— punct de vedere impus.

Se desenează patru schițe la mîna liberă, din cele patru direcții distincte, și se compară între ele (fig. 12.3.2, a, b, c și d). Această etapă de studiu nu este obligatorie, problema putîndu-se rezolva și dintr-o simplă privire a planului de arhitectură. Se alege poziția (c) și se trece la găsirea locului precis al punctului de vedere. Fixarea punctului de vedere ω se poate face cu echerul de 30° și cel de 45°, cuprinzînd între laturile lor punctele extreme ale obiectului. La jumătatea distanței dintre vîrfurile lor se găsește unghiul de 37°. O perspectivă făcută la un unghi de 37° este destul de plată. Pentru a-i da mai mult dinamism putem să ne apro-

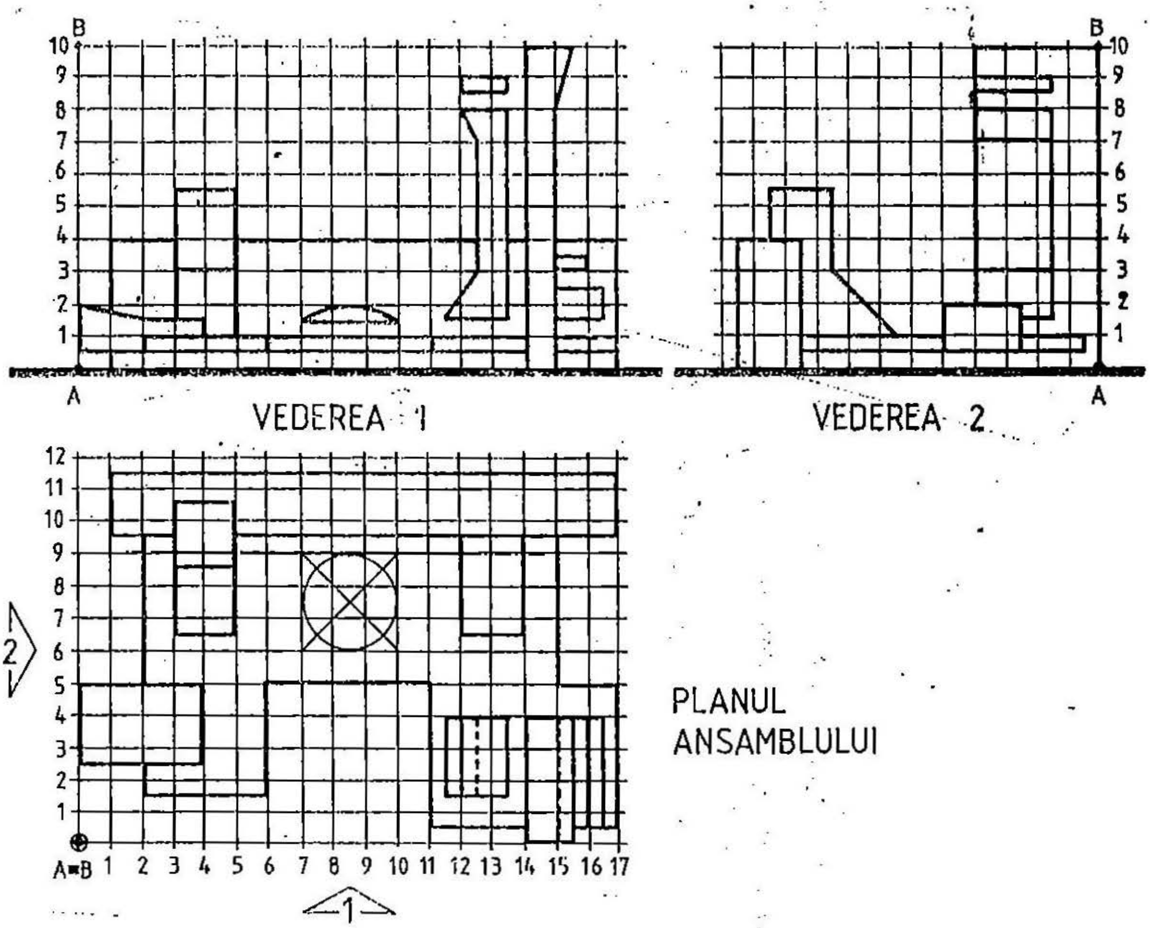


fig. 12.3.1

se ia D/3 (unde D este distanța de la Ω la P), iar pe verticală, D/4 în sus și în jos. Din cele arătate se constată că numai perspectiva frontală centrală este perfect simetrică în jurul lui P. Toate celelalte tipuri de perspectivă prezintă o oarecare asimetrie față de P, de aceea toate aceste perspective trebuie completate cu elemente de anturaj, pentru a se obține un tablou perspectiv cît mai aproape de realitate. Alegînd direcția principală de privire către centrul geometric al obiectului, completările ulterioare vor fi mici, fără să concureze obiectul pus în perspectivă.

Cînd ne rotim în jurul unui obiect privim obiectul sub același unghi. Locul geometric de unde un segment de dreaptă AB se vede sub același unghi este arcul de cerc capabil de unghiul dat. Construcția lui este arătată în figura 12.2.15. În practică nu se folosește această construcție grafică, deoarece unghiurile stabilite de 37° pe orizontală și 28° pe verticală nu sînt fixe. În exemplele ce urmează aceste unghiuri vor fi modificate, în funcție de tipul perspectivei, de compoziția ansamblului sau de efectul dorit a se obține în perspectivă.

În locul construcției grafice arătată în figura 12.2.15, pentru aflarea punctului de vedere se poate folosi o metodă mai practică. Se încadrează obiectul între laturile echerelor de 30° și 45°, ca în figura 12.2.16. La mijlocul distanței se află punctul de vedere căutat. În figura 12.2.16 se observă că direcția principală de privire, îndreptată în centrul geometric al dreptunghiului, nu este bisectoarea unghiului sub care se privește obiectul. Coincidența dintre bisectoarea unghiului și direcția principală de privire se realizează numai dacă tabloul este paralel cu diagonala dreptunghiului. În practică, lucrurile nu se petrec astfel și rezultă o perspectivă asimetrică față de P pe linia orizontului (fig. 12.2.17). Această asimetrie este însă foarte mică și nu deranjează, în plus simetria poate fi restabilită cu elemente de anturaj sau alte obiecte situate în prim plan. Prin această metodă se construiește perspectiva la un unghi ceva mai mare (v. fig. 12.2.16). Dacă, după ce se află unghiul, se reconstruiește bisectoarea și se consideră aceasta direcția principală de privire, se obține o perspectivă simetrică față de P și la unghiul dorit, dar nu se mai privește în centrul geometric al obiectului. Cum obiectele și ansamblurile de obiecte sînt în general asimetrice, nu este obligatoriu ca direcția principală de privire să treacă exact prin centrul geometric al dreptunghiului, ce îmbracă în plan aceste obiecte. Această direcție poate trece și prin imediata lui apropiere; deci, oricare din cele două metode poate fi folosită, dar prima se dovedește mai practică.

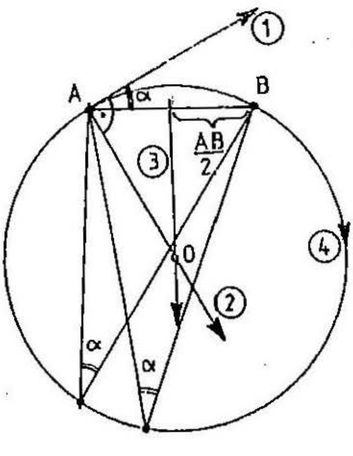


fig. 12.2.15

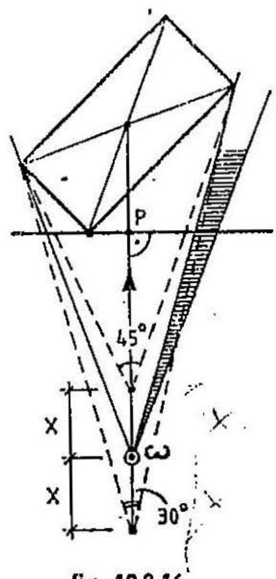


fig. 12.2.16

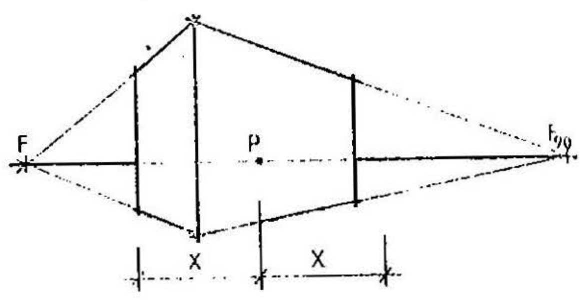


fig. 12.2.17

piem de obiect pînă la un unghi de 40. . .45°. Exemplul ales permite acest lucru, deoarece zona din jurul muchiei AB nu este mobilată, iar în apropierea ei se găsesc numai volume joase. Apropiindu-ne, nu există pericolul să se depășească mult unghiul optim pe verticală. În același timp se va evita bisectoarea fețelor paralelipipedului anvelopant și suprapunerea muchiilor importante ale volumelor, ducînd raze vizuale din punctul de vedere (în plan). De asemenea se va avea grijă ca, și în perspectivă, fațada lungă să apară mai mare decît cea scurtă, pentru a nu altera cu nimic viziunea perspectivă a ansamblului.

Odată fixat punctul de vedere ω, se duce din el direcția principală de privire în centrul geometric al ansamblului. Prin muchia cea mai avansată către privitor se va duce tabloul perspectiv, perpendicular pe direcția principală de privire (fig. 12.3.3). Pentru a ușura construcția perspectivei se alege tabloul prin această muchie. Muchia apare în perspectivă în adevărată mărime, iar perspectiva se construiește de la privitor către profunzime. În acest desen plan se obțin toate elementele necesare construcției perspectivei (F și F_{90}, M și M_{90}, P, A — poziția muchiei prismei în raport cu F). Segmentul CD dă lățimea perspectivei. În funcție de cît de mare se dorește a se construi perspectiva, se mărește întreg sistemul de un număr de ori și se transpun elementele în tabloul de perspectivă. Linia de orizont este plasată în partea de sus sau în partea de jos a formatului, după cum perspectiva este făcută cu orizontul supraînălțat sau la nivelul

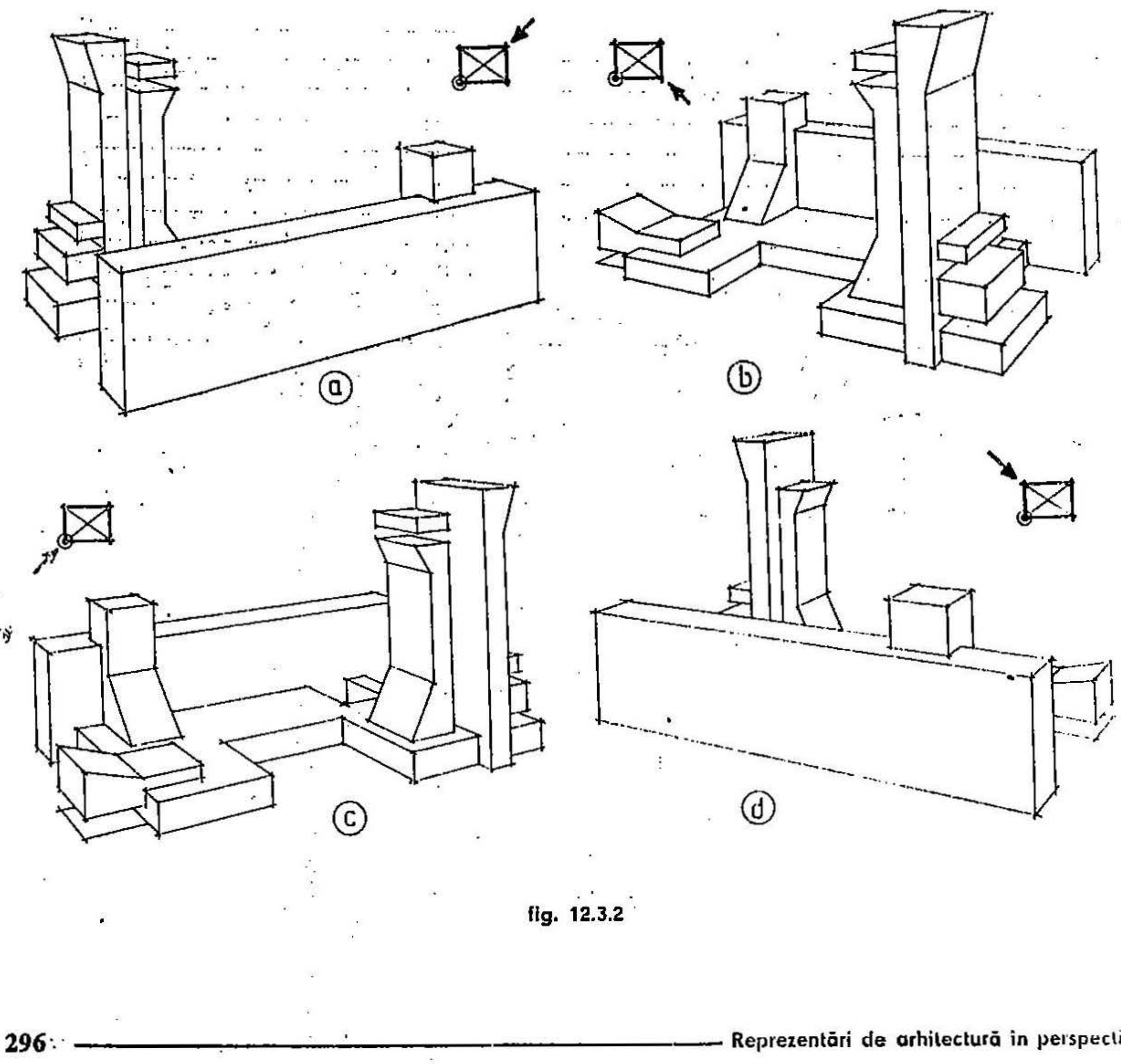


fig. 12.3.2

ochilor. Pe linia orizontului, în centrul tabloului se fixează punctul principal de privire P. Se va mai fixa în tablou punctul de fugă accesibil F, punctul A (poziția muchiei din tablou în raport cu P) și adevărata direcție de fugă către F. Punctele M și M_{00} vor fi determinate direct în tablou, pentru a evita eventualele erori rezultate din transpunerea datelor pe tabloul de perspectivă. Pentru o construcție mai rapidă a perspectivei este bine ca și al doilea punct de fugă F_{90} să fie accesibil. Se observă că o deplasare a lui ω în stînga micșorează foarte mult distanța dintre F și F_{90} (fig. 12.3.4).
Toate aceste date pot fi luate direct pe linia orizontului, fără a se mai face un studiu de alegere a punctului de vedere, dar acest lucru presupune o bogată experiență. Astfel sînt necesare o serie de tatonări, pentru a obține un paralelipiped corect pus în perspectivă. Acest procedeu se va studia la metodele libere de construcție a perspectivei.

12.4. PERSPECTIVA LA DOUĂ PUNCTE DE FUGĂ CU ORIZONTUL SUPRAÎNĂLȚAT

Se va construi perspectiva ansamblului dat de la înălțimea de 102 m, obținîndu-se pe verticală un număr întreg de moduli (17). Punctul de vedere ales rămîne valabil și pentru acest tip de perspectivă. Se trasează linia de orizont în partea de sus a formatului și se trec pe ea elementele obținute, în raport cu punctul principal de privire. Se măsoară în fațadă și se vede cît reprezintă la scară cei 102 m. Segmentul obținut se mărește de același număr de ori, de cîte ori a fost mărit întregul sistem și se pune această dimensiune de la linia de orizont în jos, pe verticala coborîtă din punctul A. Se obține astfel unitatea de măsură pe verticală, cu care se operează în acest plan frontal. Cu ajutorul punctelor de măsură se construiește mai întîi paralelipipedul ce cuprinde tot ansamblul. Dacă acest paralelipiped este deformat, înseamnă că ne-am plasat prea aproape de obiect. În acest caz nu se reface întreg studiul, ci doar se micșorează în tablou verticala celor 102 m, obținîndu-se astfel o nouă unitate de măsură. Dacă paralelipipedul obținut nu este deformat, se trece la construcția planului ansamblului în perspectivă. Planul poate fi rapid desenat pe grătarul perspectiv realizat cu ajutorul punctelor de măsură (fig. 12.4.1).
Urmează acum să fie ridicate înălțimile fiecărui punct din plan. Cota unui punct se calculează în funcție de adevăratele mărimi de pe muchia din tablou (AB). Cu ajutorul unui punct de fugă, se aduce proiecția punctului pînă la una din fețele prismei anvelopante. Aici se poate stabili cota punctului cu ajutorul celuilalt punct de fugă, iar apoi această cotă este translatată pe verticala ridicată din proiecția punctului (fig. 12.4.2). Operația nu trebuie repetată pentru absolut toate punctele,

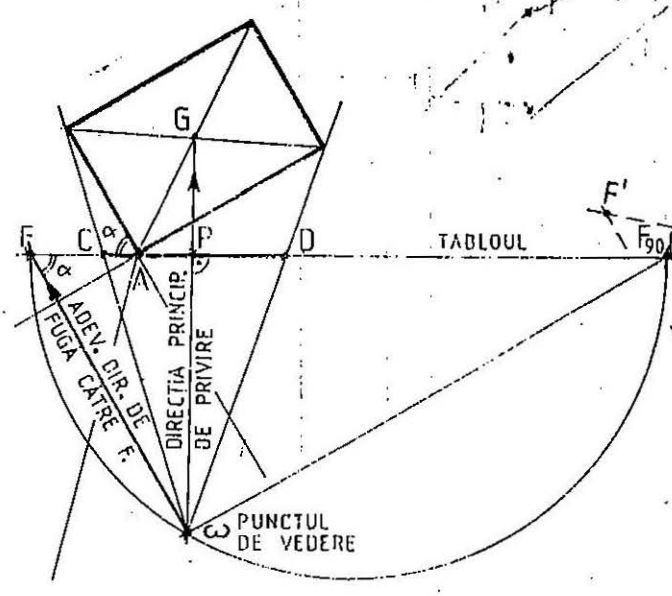


fig. 12.3.3

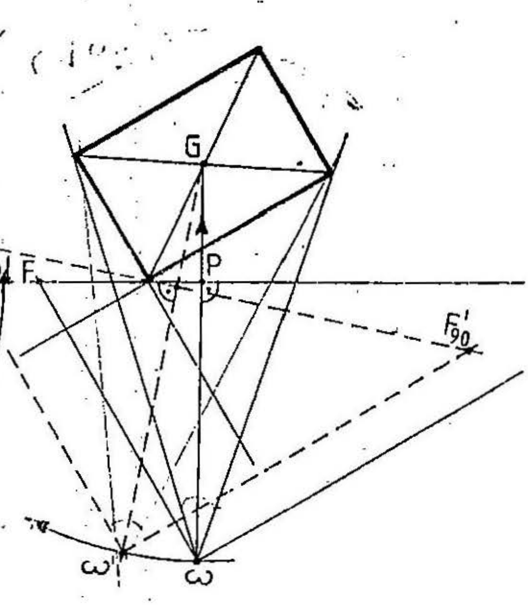
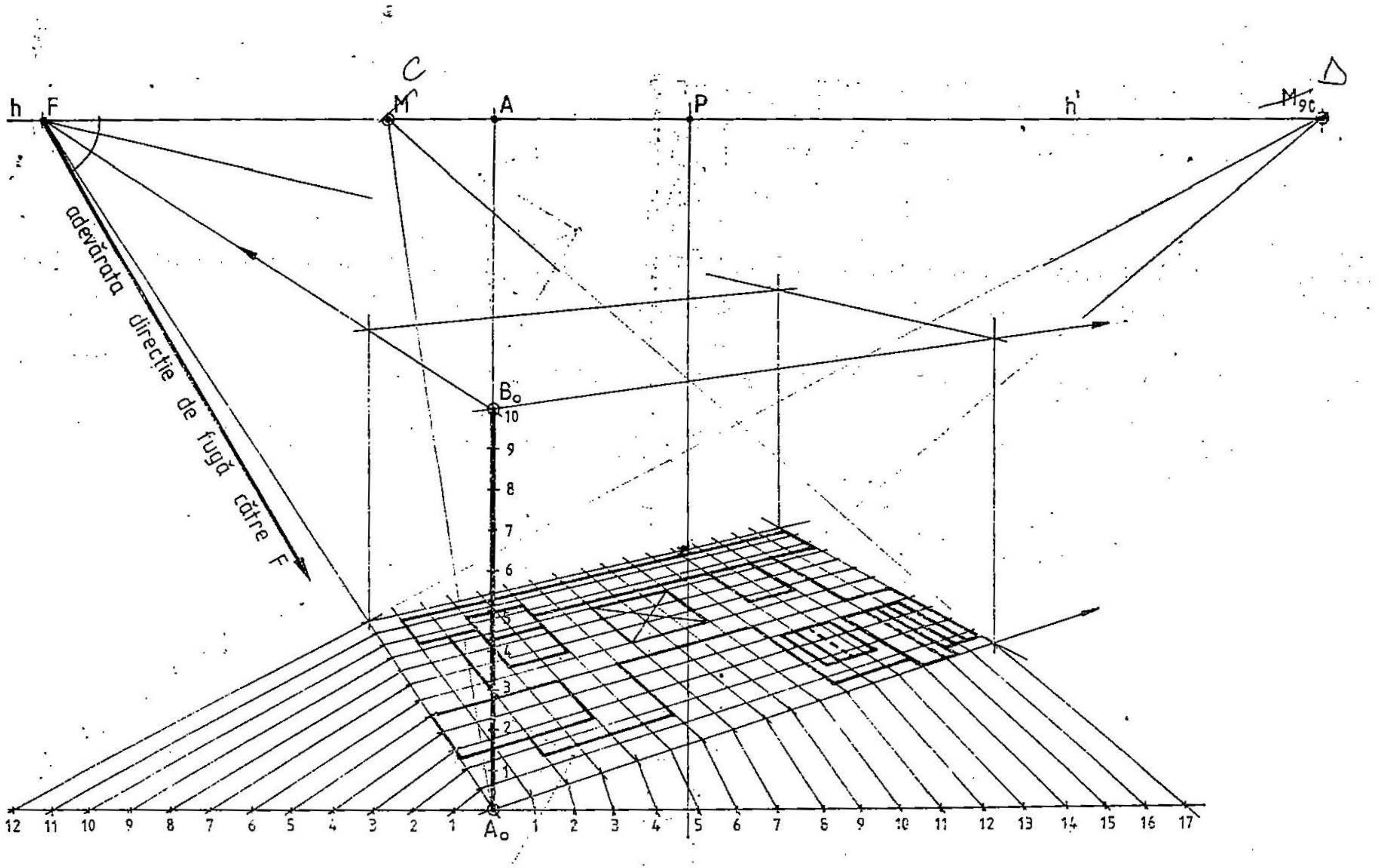


fig. 12.3.4



h
F
C
M'
A
P
h'
D
M90
adevărata direcție de fugă către F
B₀
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
A₀
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17

fig. 12.4.1

deoarece multe din ele sînt coliniare. Celelalte puncte se pot determina și prin diviziuni perspective.
S-au obținut astfel volumele puse în perspectivă, dar nu s-a obținut încă o perspectivă de arhitectură (fig. 12.4.3).

Urmează apoi tratarea fațadelor, trasarea umbrelor proprii și purtate și mobilarea perspectivei cu elemente de anturaj (fig. 12.4.4). Toate aceste operații, absolut necesare unei perspective de arhitectură, vor fi abordate în studiul de la capitolele respective (cap. 15 și 16).

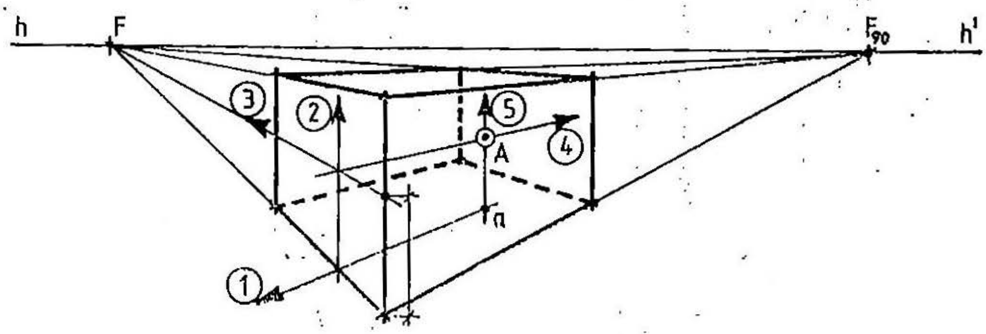


fig. 12.4.2

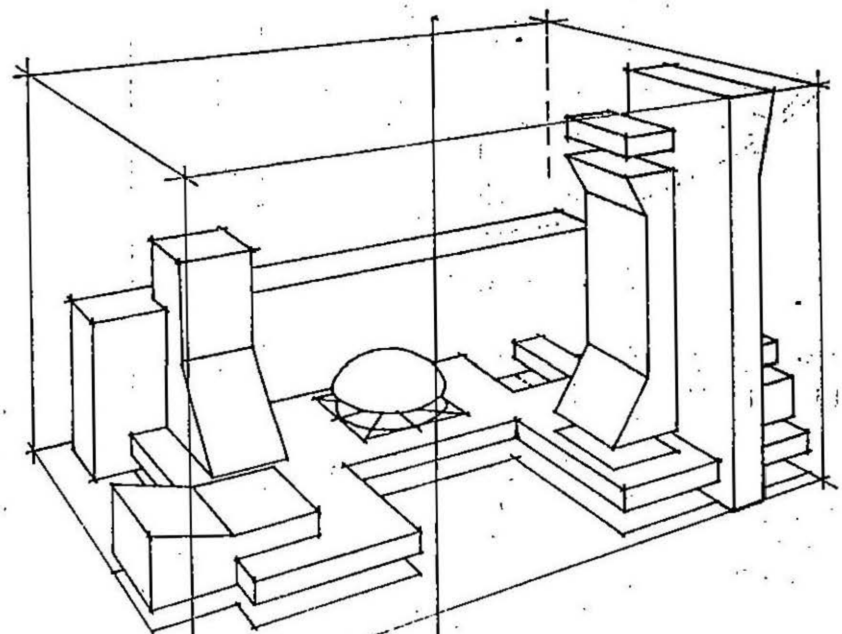


fig. 12.4.3

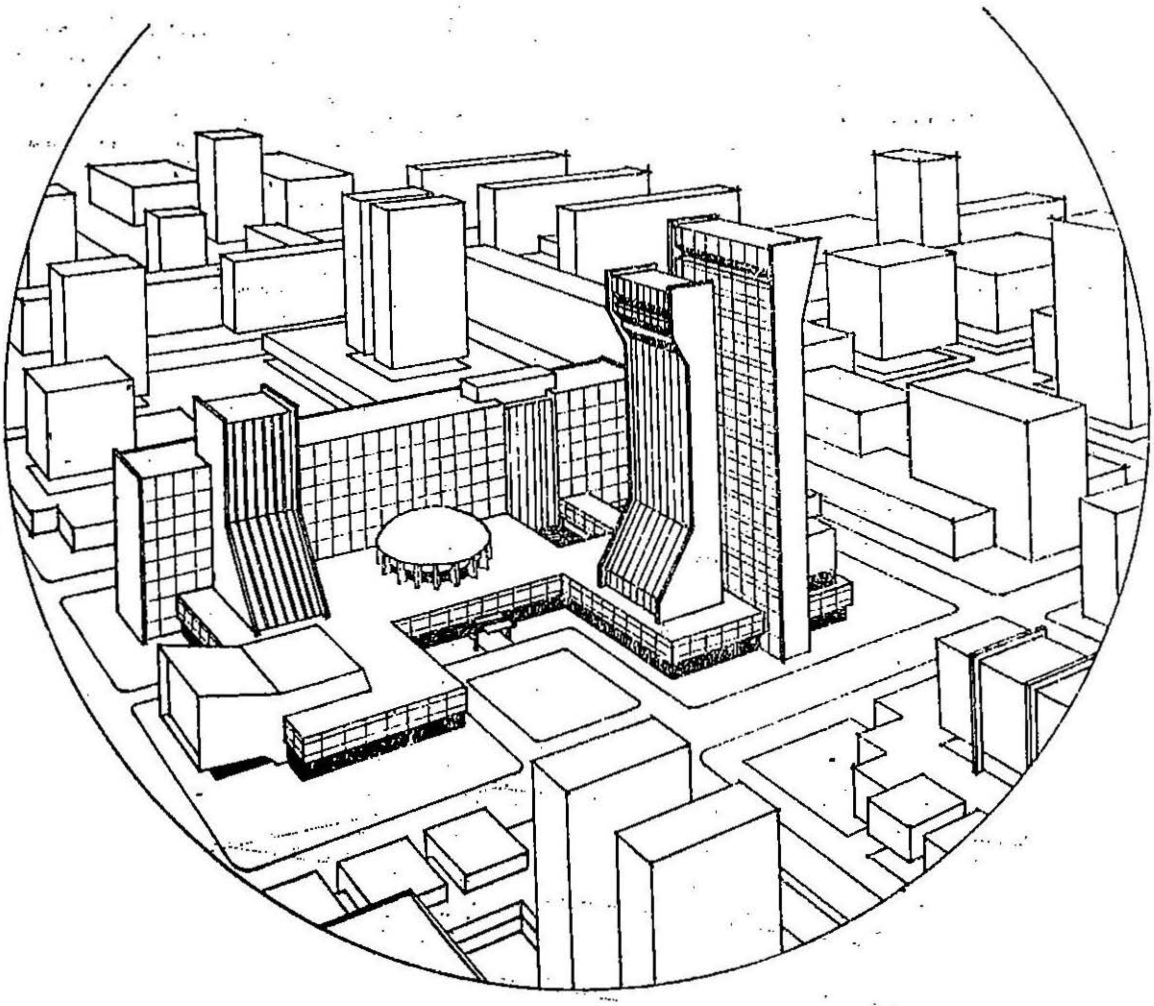


fig. 12.4.4

12.5. PERSPECTIVA LA DOUĂ PUNCTE DE FUGĂ LA NIVELUL OCHILOR

Trebuie să se construiască perspectiva cu orizontul la cota h = 1,80 m. Această linie de orizont se desenează pe fațada ansamblului. Ea va tăia muchia paralelipipedului anvelopant într-un anumit raport.

Se trasează în partea de jos a tabloului linia de orizont. Cînd se trasează linia de orizont trebuie să se țină seama de raportul menționat și de faptul că în perspectivă trebuie să apară și porțiunea din planul orizontal, pe care este așezat ansamblul. Punctul principal de privire P se ia la mijlocul tabloului, pe linia de orizont, iar în raport cu el se trec în tablou și celelalte elemente. Pe verticala din punctul A, se transpune raportul în care linia orizontului împarte muchia paralelipipedului, mărit de același număr de ori ca tot sistemul. Deci, se va măsura de la linia de orizont în jos 1,80 m, iar în sus se va măsura diferența din înălțimea muchiei. Se obține astfel unitatea de măsură cu care se operează în planul frontal al acestei muchii. De data aceasta construcția planului în perspectivă nu se mai poate face pe pămînt. Va trebui să se deseneze planul pe capacul paralelipipedului sau la un nivel mai sus. Acest procedeu este numit „ridicarea planului pe cer" (fig. 12.5.1). Acest lucru se face numai după ce am construit paralelipipedul în perspectivă. Prin aceeași metodă, planul poate fi construit și coborît sub linia de orizont, dar d...

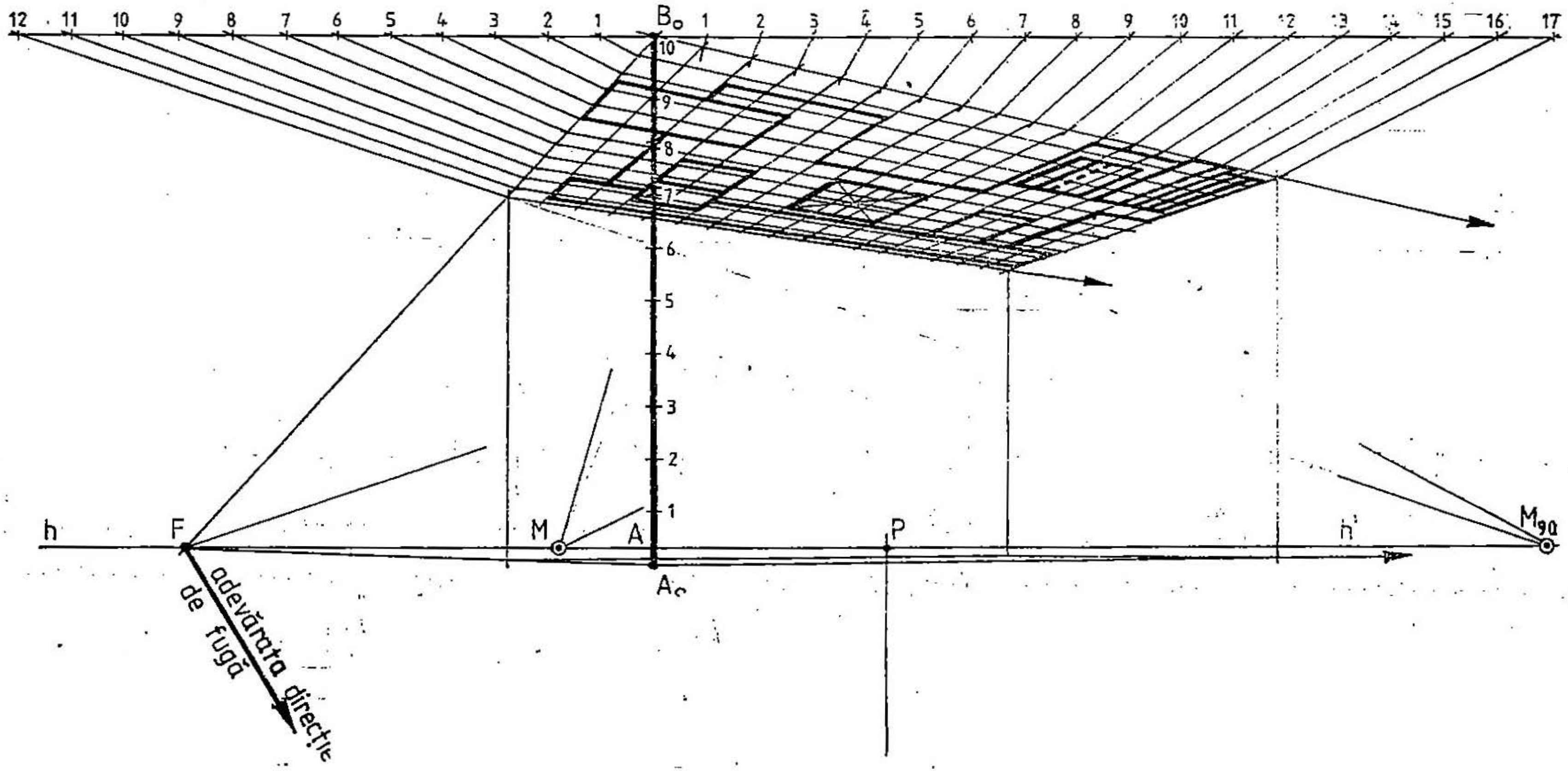


fig. 12.5.1

cele mai multe ori sub această linie se termină tabloul. La ridicarea planului pe cer trebuie o mare atenție pentru a nu-l desena „în oglindă". Se poate evita acest lucru dacă se privește planul ansamblului de jos în sus, prin transparența hîrtiei pe care este desenat.

Cotele punctelor se determină raportîndu-le la muchia din tabloul de perspectivă (fig. 12.5.2). Odată construite volumele (fig. 12.5.3), se poate trece la tratarea fațadelor, trasarea umbrelor și la mobilarea perspectivei cu elemente de anturaj (fig. 12.5.4).

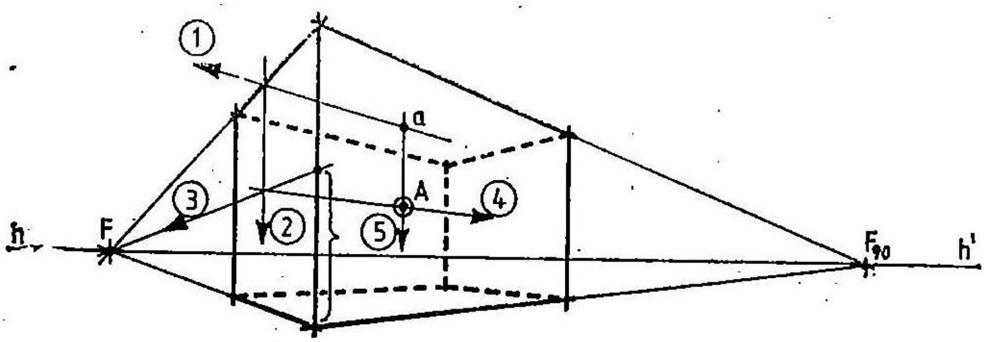


fig. 12.5.2

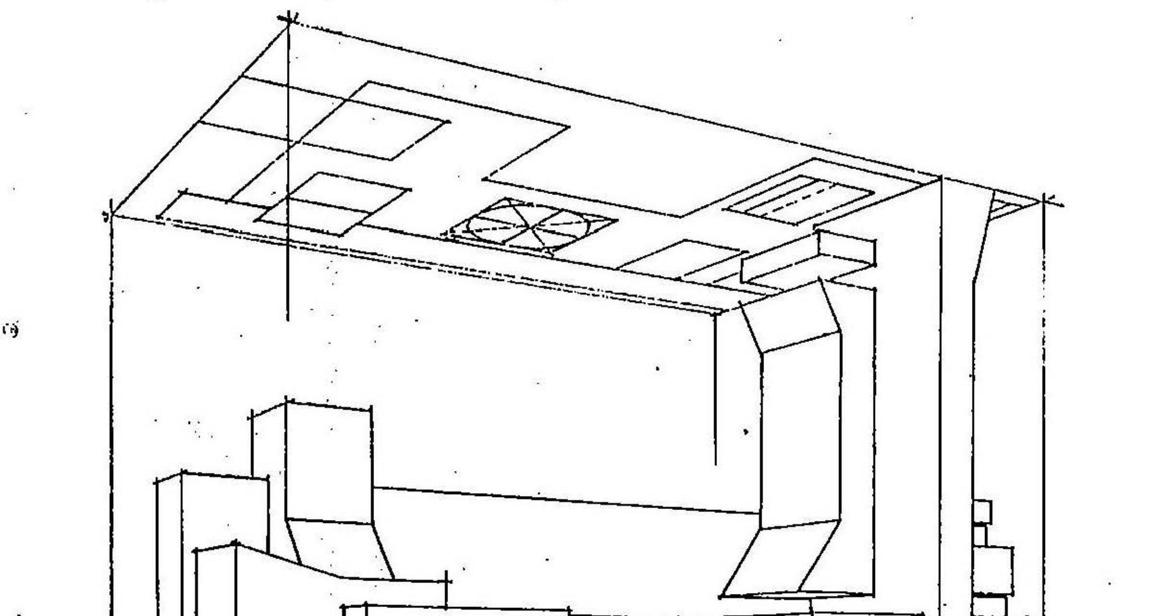


fig. 12.5.3

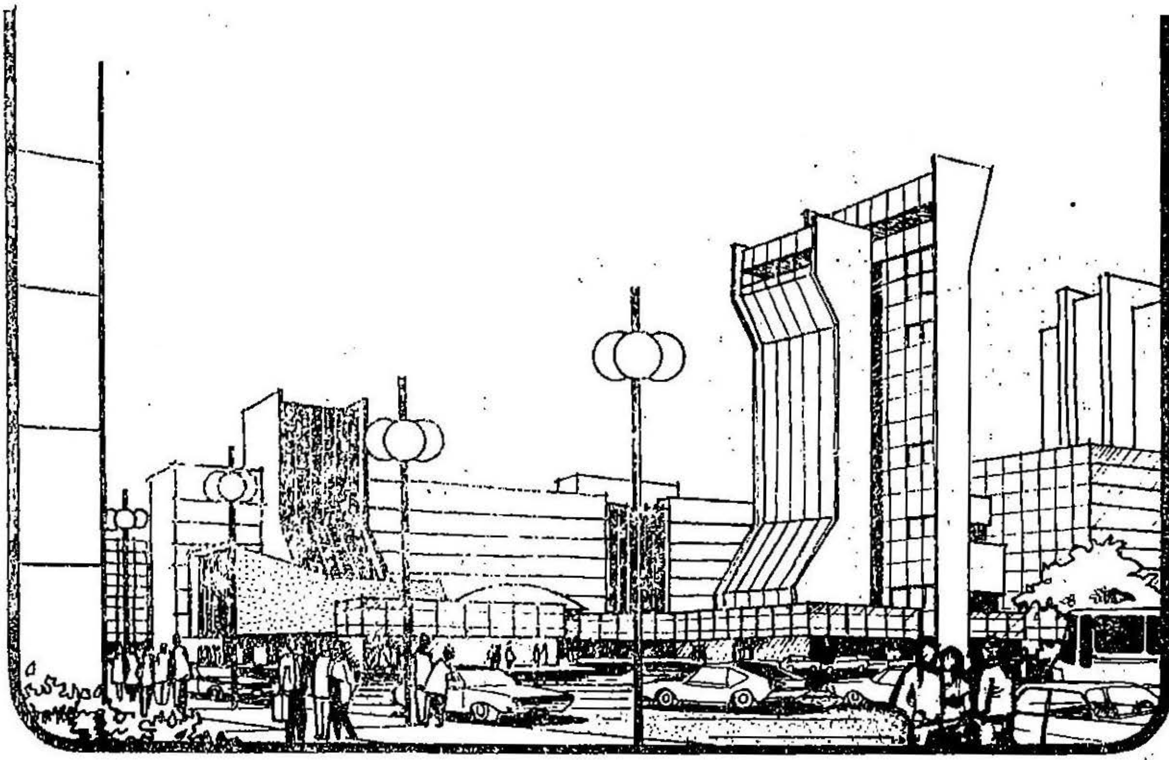


fig. 12.5.4

12.6. PERSPECTIVA FRONTALĂ DE EXTERIOR LA NIVELUL OCHILOR

Este recomandată numai pentru compoziţii dezvoltate pe forme concave. Aceste compoziţii permit o apropiere mai mare a privitorului de obiect, fără să apară deformaţii supărătoare. Experienţa arată că putem să ne apropiem de paralelipipedul care îmbracă ansamblul, pînă la un unghi vizual de aproape 60°. La unghiuri mici acest tip de perspectivă este mai puţin interesantă şi foarte statică. Perspectiva frontală se construieşte cu ajutorul punctului de distanţă D care, în cazul acesta, este şi punct de măsură şi punct de fugă la 45° (v. subcap. 11.8). În perspectiva frontală apare o singură direcţie de fugă la P, iar direcţia de fugă la 90° este paralelă cu tabloul. Deci în această perspectivă există: plane de capăt, care fug la verticala ce trece prin P, plane frontale, paralele cu tabloul şi plane orizontale (fig. 12.6.1).
În acelaşi plan frontal se măsoară cu aceeaşi unitate de măsură, în orice direcţie. Aici apar limitele perspectivei frontale, pentru că am fi tentaţi să credem că, pe măsură ce ne depărtăm de P, în acelaşi plan frontal, ar trebui să scadă unitatea de măsură. În realitate lucrurile se petrec aşa, dar acolo intervine mobilitatea privirii. În acelaşi plan frontal, pe măsură ce se percep obiecte tot mai depărtate de P, direcţia principală de privire a ochiului se modifică, chiar dacă nu mişcăm capul. În momentul acesta, faţă de planul considerat, nu mai avem o perspectivă frontală, iar unitatea de măsură scade odată cu depărtarea. Dacă şi în desen se va micşora unitatea de măsură odată cu depărtarea de P, în acelaşi plan frontal, se va obţine o imagine deformată a obiec-

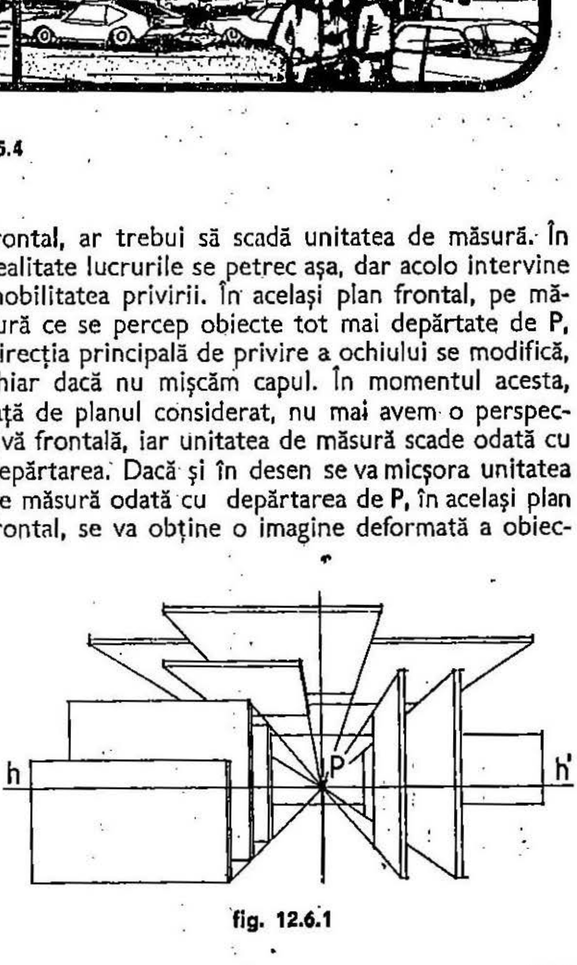


fig. 12.6.1

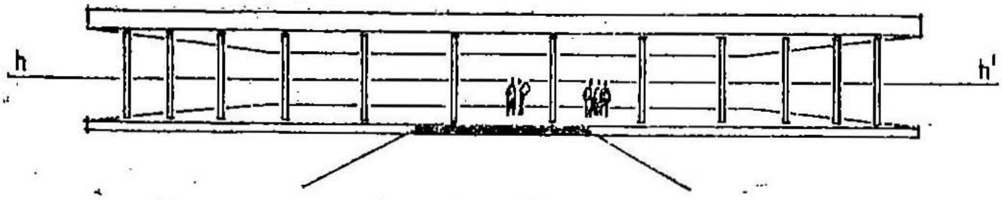


fig. 12.6.2

tului (fig. 12.6.2), creîndu-se senzația că fațada este curbă. Imaginea este asemănătoare cu fotografiile făcute cu obiective ce au un unghi foarte mare. La construcția perspectivei frontale la nivelul ochilor, a ansamblului prezentat în subcapitolul 12.3, ne apropiem de paralelipipedul anvelopant pînă la o distanță dictată de unghiul de 53° (v. subcap. 11.8.). Formatul desenului perspectiv va avea același raport cu fața frontală a paralelipipedului. Se mărește deci fața frontală a paralelipipedului de atîtea ori cît să se obțină o perspectivă de dimensiuni convenabile; se obțin totodată în tablou unitățile mărite la scară. Este foarte simplu să se plaseze în perspectivă linia orizontului, ținînd seamă de unitățile obținute (fig. 12.6.3). Se plasează punctul principal de privire P în funcție de zona de interes a ansamblului și se va avea grijă ca, din multitudinea planelor de capăt ce apar în această perspectivă, să nu treacă prin P sau prin apropierea lui plane importante ale ansamblului (fig. 12.6.4). În acest caz se plasează punctul principal de privire în centrul ansamblului, obținînd o perspectivă frontală centrală.

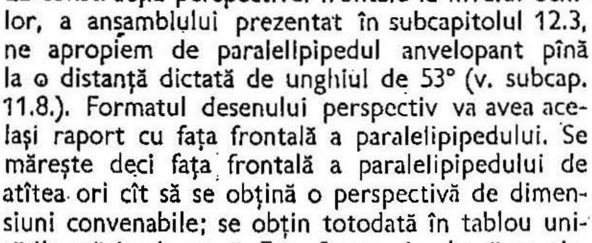


fig. 12.6.3

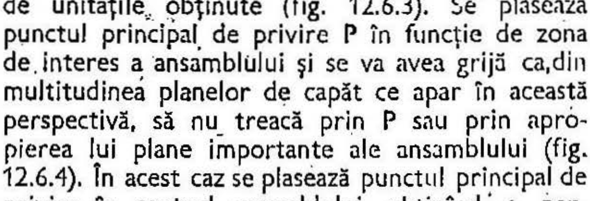


fig. 12.6.4

Pentru a plasa punctul de distanță pe linia orizontului trebuie să se compare lățimea perspectivei (deci a ansamblului) cu de două ori înălțimea de la linia orizontului la cota celei mai înalte clădiri. Această comparație trebuie făcută mai ales în cazul perspectivei unor clădiri foarte înalte în raport cu dimensiunile omului. Este cazul exemplului nostru și pentru faptul că în prim plan se găsește clădirea cea mai înaltă. Dacă ansamblul era mult mai amplu dezvoltat pe orizontală sau linia de orizont tăia ansamblul la jumătatea înălțimii lui, această verificare a unghiului pe verticală nu mai era necesară. Deci se plasează punctul de distanță D la o depărtare de P egală cu 2x (v. fig. 12.6.3). S-a obținut astfel o perspectivă la un unghi de 53°.
Construcția grătarului perspectiv se face pe capacul paralelipipedului, pe care se va desena și planul ansamblului, văzut de jos în sus (fig. 12.6.5). Volumele se construiesc după metoda arătată în subcapitolul 12.5. Se obține astfel perspectiva frontală de exterior la nivelul ochilor a ansamblului dat (fig. 12.6.6).

12.7. PERSPECTIVA FRONTALĂ CU ORIZONTUL SUPRAÎNĂLȚAT

În cazul acestei perspective se va lua punctul de distanță la o depărtare de P egală cu cel puțin de două ori înălțimea orizontului (fig. 12.7.1). Se va obține o depărtare mai mare de ansamblu decît în cazul perspectivei la nivelul ochilor, mai ales că în prim plan se găsește clădirea cea mai înaltă, iar perspectiva trebuie completată în partea de jos cu elementele de anturaj; de asemenea, se va ține seama de faptul că linia de orizont face parte integrantă din desenul perspectiv. Perspectiva se construiește urmînd etapele și metodele folosite la perspectiva la două puncte de fugă cu orizontul supraînălțat (fig. 12.7.2).
Perspectivele frontale sînt cel mai rapid și ușor de construit, de aceea sînt foarte des folosite în reprezentările de arhitectură, dar spre deosebire de acestea perspectivele la două puncte de fugă au un plus de dinamism și spectaculozitate.

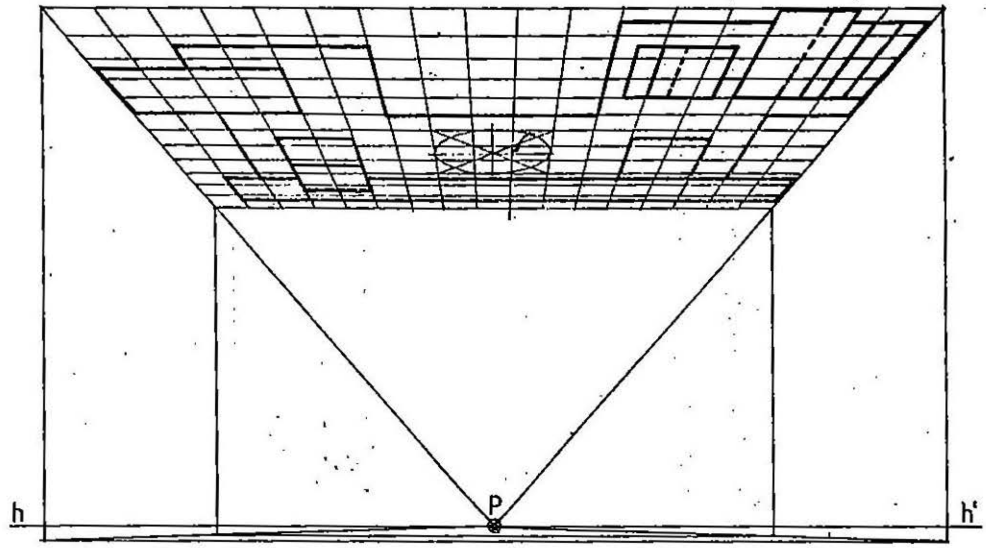


fig. 12.6.5

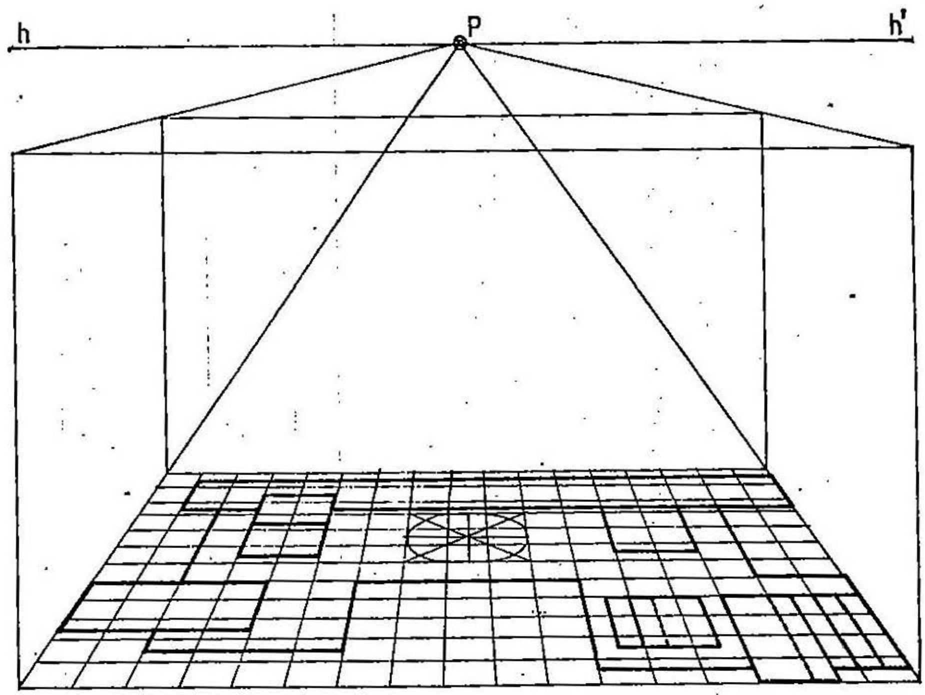


fig. 12.7.1

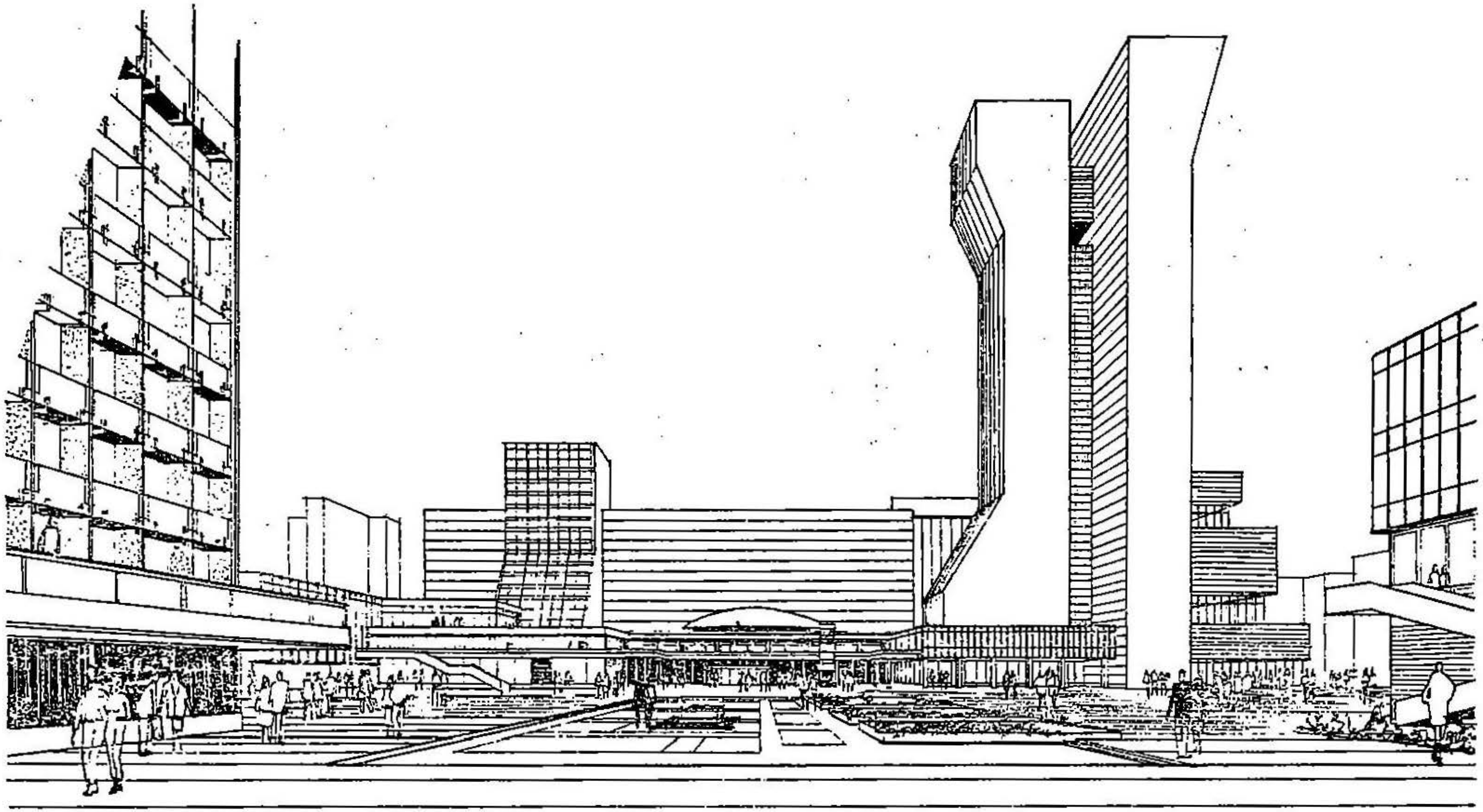


fig. 12.6.6

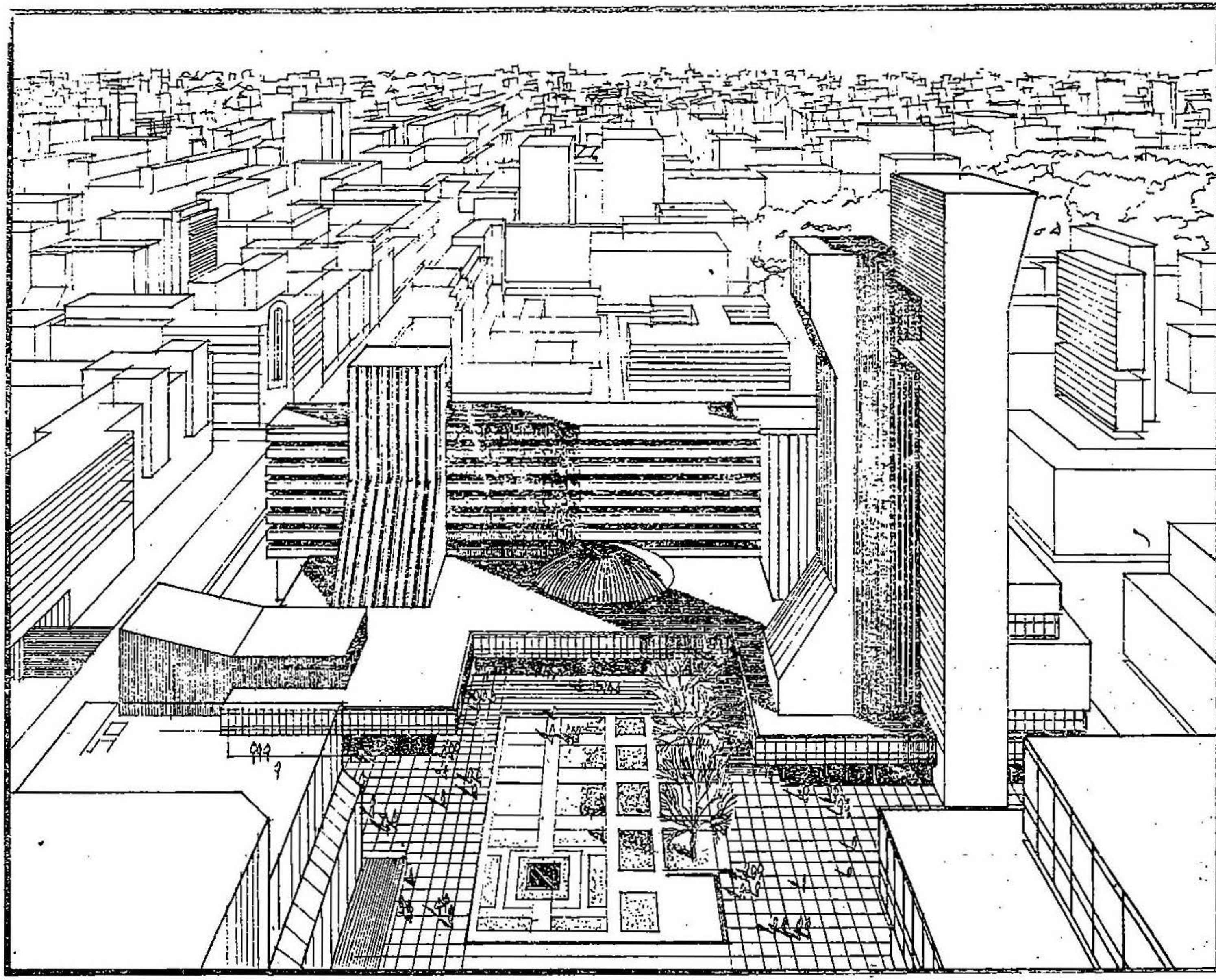


fig. 12.7.2

12.8. PERSPECTIVA DE INTERIOR

PERSPECTIVA DE INTERIOR FRONTALĂ

Această perspectivă se construieşte cu ajutorul punctului de distanţă D. În subcapitolul 12.6. şi 12.7. s-a arătat că o perspectivă frontală poate fi construită la un unghi perspectiv de pînă la 60°, dacă elementele ce se pun în perspectivă sînt dispuse într-o compoziţie concavă; este cazul perspectivei de interior.
Făcînd un studiu plan de amplasare a punctului de vedere, se observă că majoritatea perspectivelor de interior frontale sînt convenţionale. Chiar şi în cazul unghiului de privire de 60°, punctul de vedere se găseşte undeva în afara camerei (fig. 12.8.1). Pentru ca punctul de vedere să se găsească în interiorul camerei este necesar ca acea cameră să fie de formă dreptunghiulară, iar perspectiva să fie făcută în lungul ei. Pentru a cuprinde în perspectivă cît mai mult din pereţii laterali se va considera un perete transparent şi se va privi prin el în interior.
O perspectivă de interior se porneşte totdeauna de la secţiunea frontală prin acel spaţiu. Secţiunea se desenează la scară, mărită direct în tabloul de perspectivă şi în funcţie de înălţimea de la care se priveşte, se trasează linia de orizont pe ea. Punctul principal de privire se amplasează pe linia de orizont în funcţie de zona de interes, în centru sau lateral. Pentru început se va lua un punct principal de privire în centru, obţinînd o *perspectivă frontală centrală* (fig. 12.8.2). Luînd punctul de distanţă la o depărtare de P egală cu lăţimea perspectivei, se obţine un desen perspectiv făcut la un unghi de 53°. Cu ajutorul lui D se poate trasa pe pardoseala grătarul perspectiv, peste care se desenează planul camerei, apoi se ridică înălţimile raportîndu-le la pereţii laterali.
Plasînd punctul principal de privire P puţin lateral

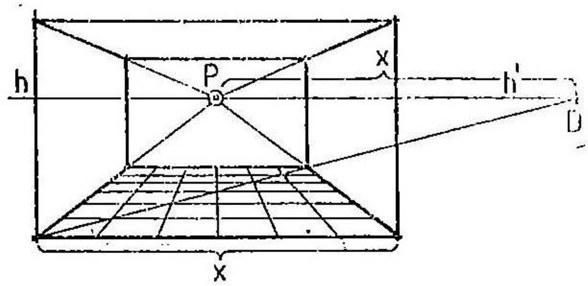


fig. 12.8.2

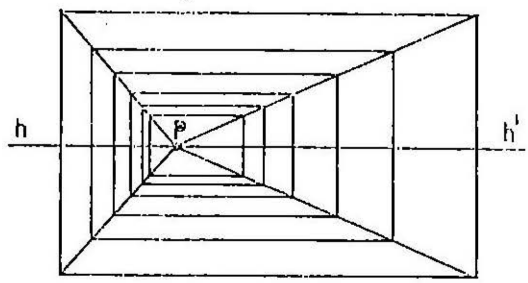


fig. 12.8.3

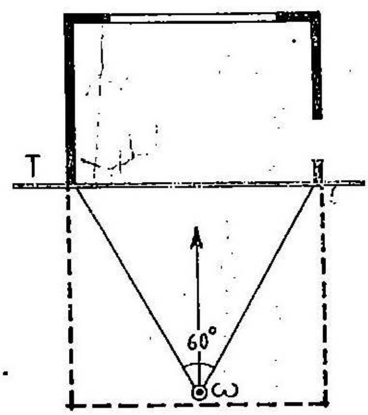


fig. 12.8.1

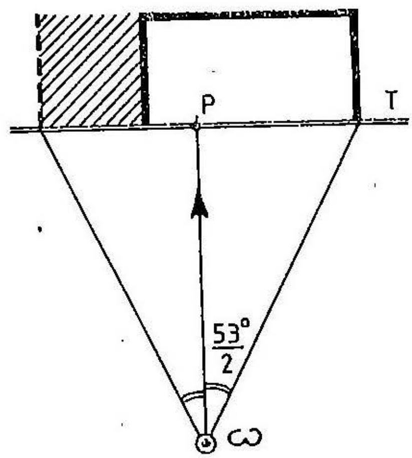


fig. 12.8.4

se obține o imagine dinamică. Acest efect poate să devină supărător cînd P se găsește la distanță mare de centrul imaginii (fig. 12.8.3). „Figura ne prezintă schematic efectul unui focar excentric. Tensiunea este creată de depărtarea punctului de fugă față de centrul imaginii. Asimetria configurației generează un efect de profunzime foarte puternic, săpînd un crater în relieful spațial" (*R. Arnheim*, 1979). Echilibrul poate fi restabilit completînd imaginea astfel ca punctul principal de privire să rămînă în centrul ei (fig. 12.8.4). Se obține *perspectiva frontală laterală* care își menține efectul dinamic, fără ca acesta să mai fie supărător (fig. 12.8.5). In cazul perspectivei frontale laterale, punctul de distanță D se plasează la o depărtare de P de cel puțin două ori distanța de la P la peretele lateral cel mai depărtat de el. Numai astfel se realizează unghiul vizual de 53°. Pentru a cuprinde cît mai mult din pereții laterali, perspectiva se poate extinde. Prin extinderea tabloului, perspectiva frontală de interior nu suferă dacă partea centrală a perspectivei rămîne nemobilată sau este mobilată cu forme ce fug la P și forme negeometrice (fig 12.8.6). Dacă este mobilat și centrul perspectivei cu obiecte ce au direcții de fugă diferite de P, apar unghiuri supărătoare. Aceste unghiuri dau naștere la efecte excesive de perspectivă. În cazul figurii 12.8.7 avem impresia că pardoseala se curbează. Unghiul apropiat de 90° supără în perspectiva la două puncte de fugă (covorul din perspectiva frontală fuge la două puncte de fugă), pe cînd în perspectiva frontală supără unghiurile obtuze foarte deschise (este cazul unghiurilor bibliotecii din dreapta perspectivei frontale).

Perspectiva frontală de interior nu va fi mărginită niciodată de secțiunea camerei. Ea este făcută să redea atmosfera interioară și nu sistemul constructiv. Privitorul aflîndu-se în cameră nu poate vedea ce se întîmplă deasupra tavanului sau sub pardoseală. În capitolul 16 se dau lămuriri suplimentare privind modul de închidere a acestui tip de perspectivă.

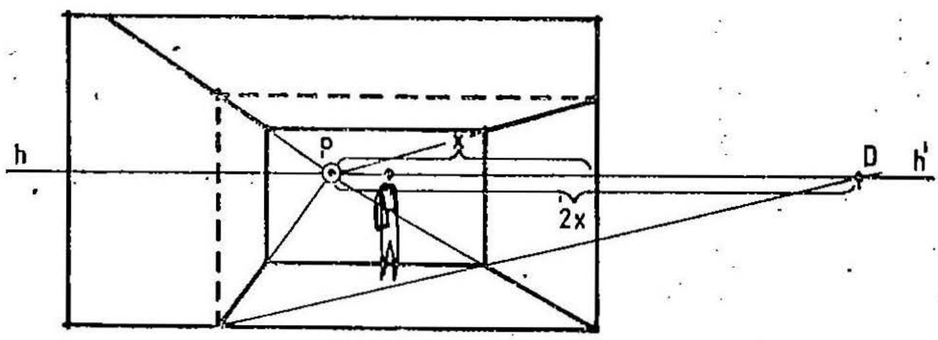


fig. 12.8.5

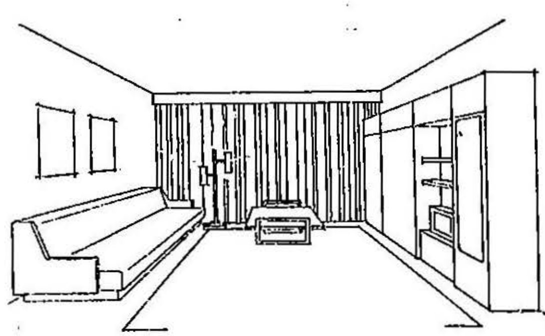


fig. 12.8.6

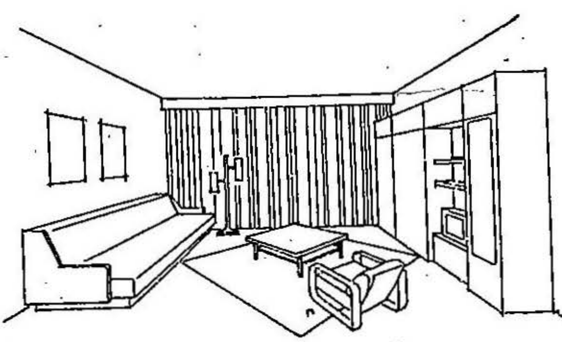


fig. 12.8.7

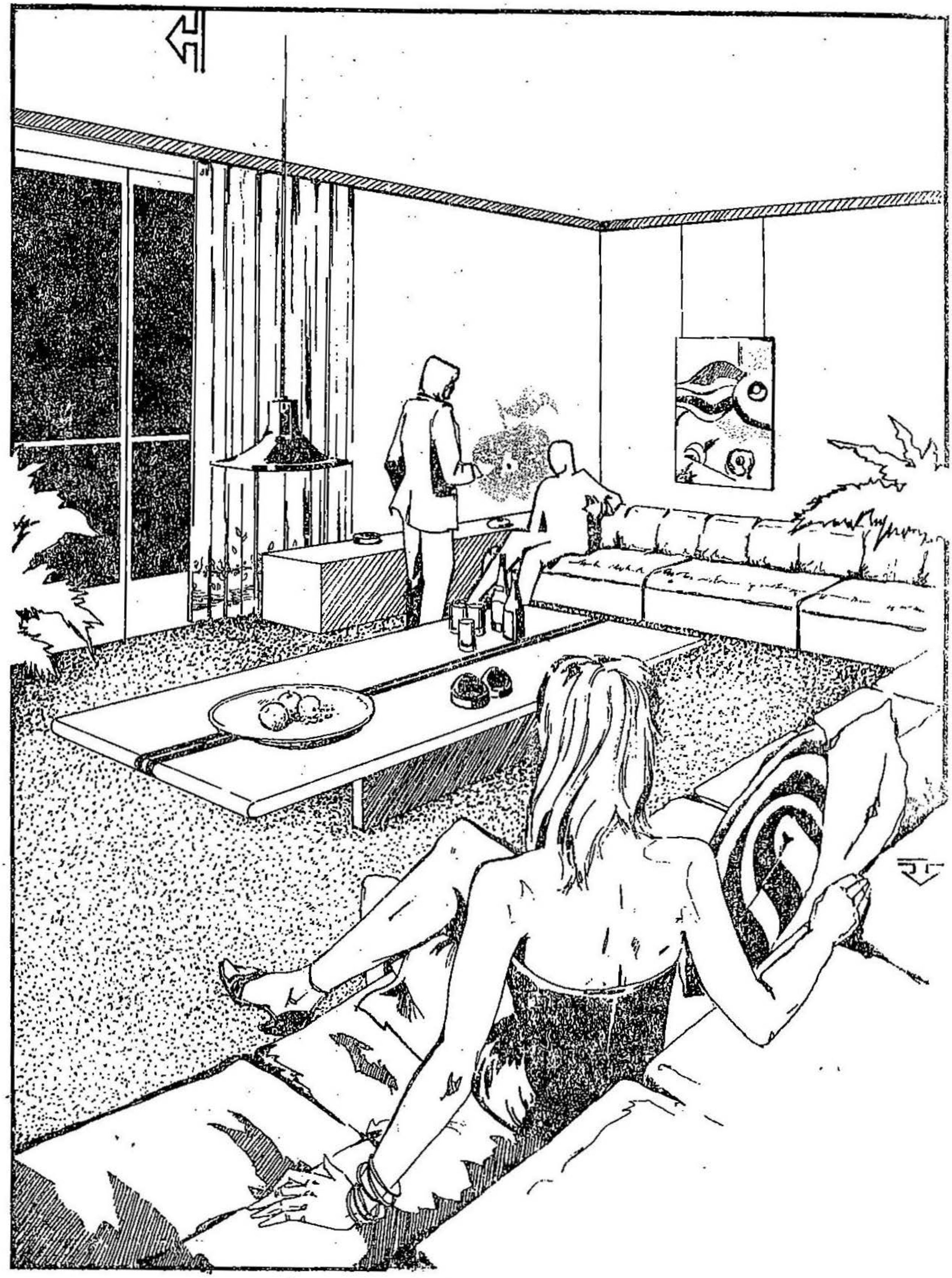


fig. 12.8.9

PERSPECTIVA DE INTERIOR LA DOUĂ PUNCTE DE FUGĂ

Această perspectivă se construiește la fel ca perspectiva de exterior la două puncte de fugă, dar se elimină din prisma dreaptă dreptunghiulară cele două fețe dinspre privitor (fig. 12.8.8, a și b). Acest tip de perspectivă este mai puțin folosit, deoarece nu poate să cuprindă decît doi pereți și într-o desfășurare redusă. O extindere a tabloului ar duce la deformații supărătoare, deoarece unghiul admisibil la perspectiva la două puncte de fugă este mult mai mic decît în cazul perspectivei frontale. Perspectiva din figura 12.8.9 prezintă deformări în partea stîngă și în partea de jos.

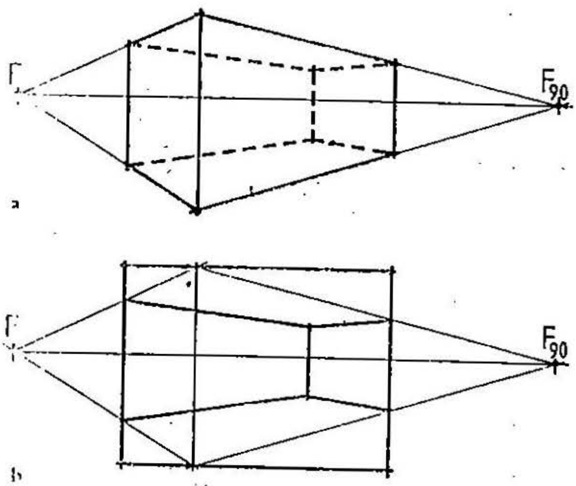


fig. 12.8.8

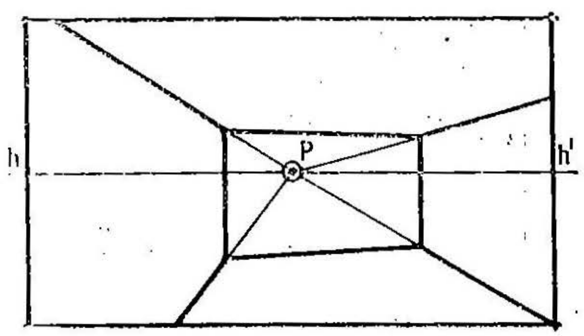


fig. 12.8.10

Dacă se acoperă aceste părți, după reperele indicate, se obține o imagine corectă. Cu toate aceste limite, perspectiva de interior la două puncte de fugă este mai aproape de realitate.
La perspectiva frontală laterală se poate face un artificiu care să o apropie de perspectiva la două puncte de fugă. Se introduce o ușoară fugă către partea opusă deplasării punctului principal de privire în raport cu centrul tabloului (fig. 12.8.10). Acest artificiu trebuie făcut însă cu mare grijă, deoarece poate introduce deformări mari.

12.9. PERSPECTIVA CU ORIZONT COBORÎT

La acest tip de perspectivă se recurge cînd se desenează perspectiva unor construcții ce sînt amplasate la o cotă mai sus decît nivelul ochilor. Dacă dintr-o perspectivă la nivelul ochilor a unei construcții foarte înalte se reține partea ei superioară, iar cea inferioară se înlocuiește, de exemplu, cu un versant de deal, se obține perspectiva cu orizont coborît. Deci, acest tip de perspectivă se construiește la fel ca perspectiva la nivelul ochilor, avînd însă grijă ca, la alegerea punctului de vedere să se țină seama de diferența de cotă de la nivelul ochilor la cota $\pm 0{,}00$ m a construcției (fig. 12.9.1). Deoarece la ansamblul ales nu se poate obține o astfel de perspectivă se recurge la un alt exemplu — *Casa de la Cascadă*, F. L. Wright, 1936. Planul orizontal în care se opresc verticalele construcției nu se vede, fiind acoperit de formele de relief; este bine totuși să fie construit, pentru a mări precizia desenului. Alegerea acestui tip de perspectivă este și în funcție de compoziția obiectului de arhitectură. Obiectul privit astfel nu trebuie să fie mult acoperit de planul orizontal pe care stă. Spectaculozitatea acestei perspective crește cînd construcția iese în consolă spre privitor (fig. 12.9.2).



fig. 12.9.1

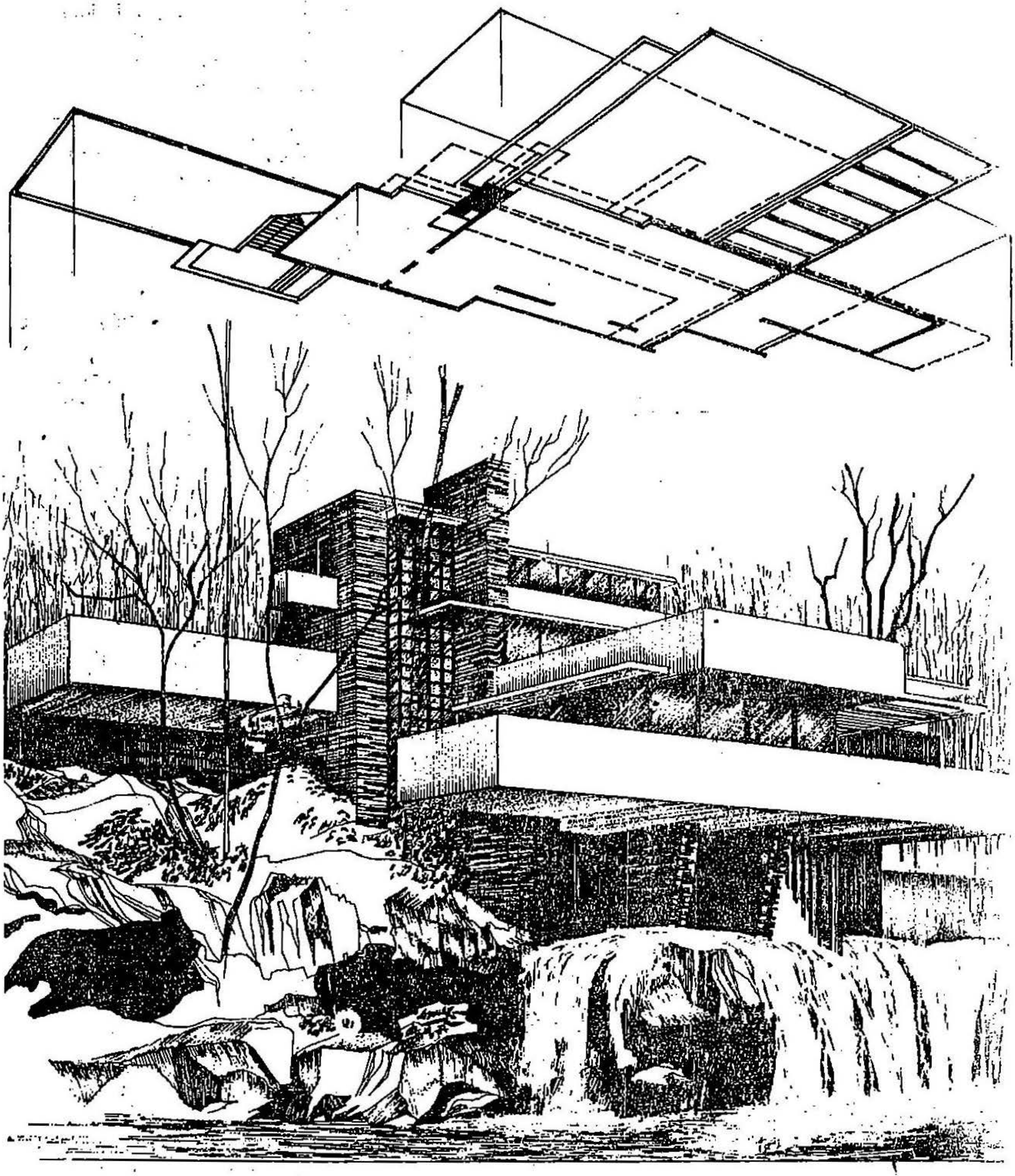


fig. 12.9.2

12.10. CONSTRUCȚIA PERSPECTIVEI PORNIND DE LA ELEMENTE FIXATE DIRECT ÎN TABLOUL DE PERSPECTIVĂ

CONSTRUCȚIA PERSPECTIVEI PORNIND DE LA O FAȚADĂ

Știind că orice patrulater poate fi considerat ca fiind proiecția conică a unui dreptunghi din spațiu, se poate construi o perspectivă pornind de la o fațadă aleasă direct în tabloul de perspectivă; deci orice fațadă aleasă în tabloul de perspectivă poate să reprezinte perspectiva oricărei fațade din spațiu. Dar o fațadă aleasă în perspectivă poate să reprezinte perspectiva unei anumite fațade din spațiu, dacă este privită de la o anumită distanță, iar fațada respectivă face un anumit unghi cu tabloul de perspectivă.

Trebuie să se determine care este poziția punctului de vedere în raport cu punctul de fugă ales. Aceasta se face prin metoda inversă construcției perspectivei cu ajutorul punctului de fugă diagonal. Se ia în perspectivă o fațadă (fig. 12.10.1) ale cărei dimensiuni în spațiu se cunosc. Se construiește în punctul ei de fugă fațada la scară mică, în ortogonal. Se duce diagonala fațadei în perspectivă și se găsește punctul de fugă diagonal $F_{m/l}$. Ducînd din $F_{m/l}$ o paralelă la diagonala fațadei în ortogonal, se descoperă pe linia orizontului punctul M_{90}, care este de fapt punctul de măsură al direcției F_{90}. Se fixează pe linia orizontului punctul principal de privire P, în care se privește această fațadă și se află astfel punctul de vedere ω. Rezultă deci adevărata direcție de fugă către F_{90} cunoscut și către F. Punctul P ales trebuie să fie totdeauna plasat între F_{90} și M_{90} rezultat. Apoi se construiește perspectiva întregului volum prin metodele cunoscute. Alegerea în perspectivă a ambelor fațade nu se poate face, deoarece pentru fiecare fațadă aleasă rezultă un punct de vedere ω diferit (fig. 12.10.2); numai întîmplător cele două puncte de vedere coincid.

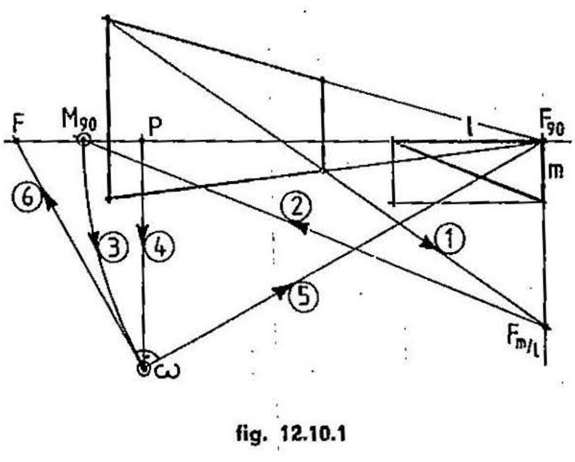


fig. 12.10.1

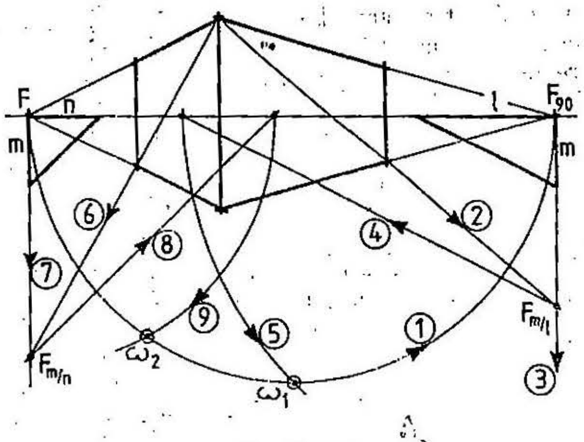


fig. 12.10.2

CONSTRUCȚIA PERSPECTIVEI PORNIND DE LA O MUCHIE VERTICALĂ

Față de punctul principal de privire P, se alege direct în perspectivă muchia verticală cea mai avansată către privitor și punctele de fugă F și F_{90}. Cu aceste date fixate direct în tablou se poate construi perspectiva prin una din metodele cunoscute. Muchia verticală se alege în funcție de tipul perspectivei și se poziționează în raport cu linia orizontului; ea indică unitatea de măsură cu care se operează în planul ei frontal. Într-o perspectivă la nivelul ochilor, omul constituie modulul cu ajutorul căruia putem măsura oriunde în tablou, deoarece toți oamenii au capul situat pe linia orizontului. Deci, în cazul acestei perspective nu se poate fixa de la început înălțimea întregii verticale, ci doar punctul unde ea înțeapă pămîntul. În felul acesta se determină înălțimea omului cu ajutorul căreia se calculează înălțimea întregii verticale (fig. 12.10.3). Dacă se fixează de la început în tablou înălțimea întregii verticale nu se mai obține o perspectivă la nivelul ochilor. Raportînd această înălțime din perspectivă la înălțimea din ortogonal, se determină unitatea de măsură în planul frontal și apoi se află de la ce înălțime este făcută perspectiva.

La perspectiva cu orizont supraînălțat se poate fixa de la început întreaga verticală, sub linia orizontului (fig. 12.10.4). Știind ce dimensiune are verticala în ortogonal, se poate afla de la ce înălțime este văzută această verticală. Se face de fapt

raportul între verticala **Aa** și diferența pînă la linia orizontului Aa_0. În alegerea acestei verticale trebuie să se țină seama că ea nu se poate apropia de adevăratele direcții de fugă. Dacă perspectiva se face de la o înălțime dată, se fixează mai întîi diferența de cotă de la muchie la linia orizontului(Aa_0). Astfel se află unitatea de măsură pe verticală și apoi se calculează înălțimea întregii muchii.

O metodă de construcție a perspectivei pornind de la o muchie verticală este cea cu ajutorul punctelor de fugă diagonale, ale fețelor verticale, ce se intersectează după acea muchie (fig. 12.10.5). Această metodă este însă mai greu de folosit, deoarece necesită o suprafață mare de lucru. Metoda punctelor de măsură se consideră mai simplă și mai rapidă. Odată aleasă înălțimea verticalei, se pot determina foarte ușor și punctele de măsură.

Indiferent prin ce metodă se construiește paralelipipedul, trebuie să se verifice ca acesta să corespundă cerințelor unei bune perspective. Dacă perspectiva lui nu convine trebuie schimbată verticala de la care s-a pornit.

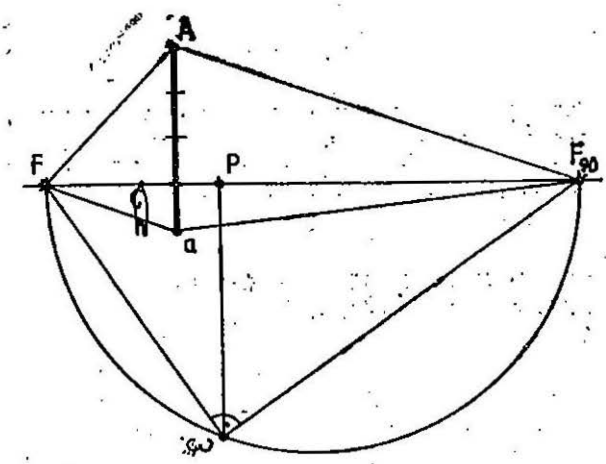


fig. 12.10.3

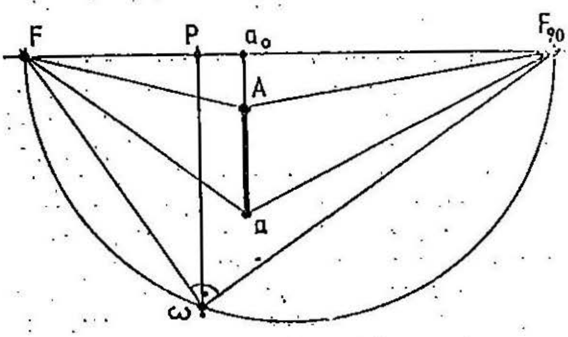


fig. 12.10.4

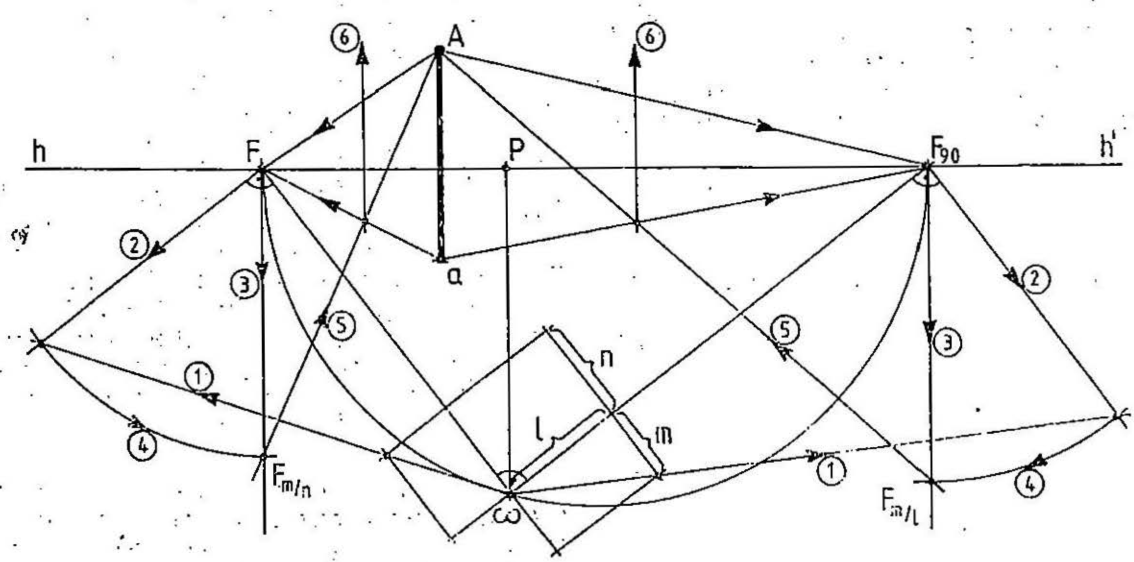


fig. 12.10.5

CONSTRUCȚIA PERSPECTIVEI PORNIND DE LA UN UNGHI ALES DIRECT ÎN TABLOU

Construcția unei perspective se poate porni de la unghiul de sus al celor două fețe vizibile, cînd acest unghi se alege deasupra liniei orizontului (fig. 12.10.6). Se obține o perspectivă la nivelul ochilor, dacă din vîrful A ales pînă la linia orizontului se consideră înălțimea întreagă minus înălțimea omului (1,80 m); determinînd întreaga înălțime, se construiește perspectiva cum s-a mai arătat.

În cazul perspectivei cu orizont supraînălțat mai important este să se aleagă unghiul de jos al paralelipipedului (fig. 12.10.7). Acest unghi nu trebuie să fie apropiat de unghiul de 90°, el trebuie să fie cît mai deschis. Știind de la ce înălțime se privește, se calculează și înălțimea muchiei. Alegîndu-se întîi unghiul de sus, se riscă ca jos să se obțină un unghi apropiat de 90°. Dacă se aleg în perspectivă ambele unghiuri, înseamnă că de fapt s-a ales înălțimea muchiei. Este cazul explicat înainte.

Aceste metode, de construcție a perspectivei pornind de la elemente fixate direct în tablou, se pot aplica eficient numai după o bogată experiență de construcție a perspectivei, la care s-a făcut un studiu prealabil de alegere a punctului de vedere.

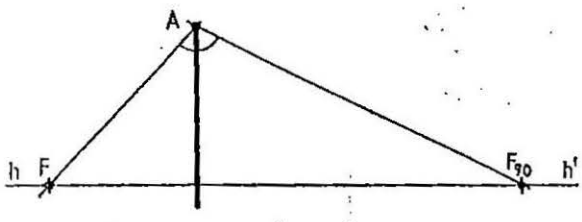


fig. 12.10.6

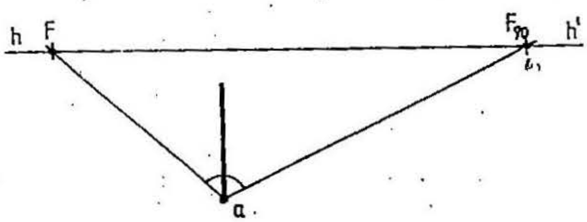


fig. 12.10.7

13.

RESTITUȚIA PERSPECTIVĂ

13.1. GENERALITĂȚI

În practica de arhitectură și în scenografie apare uneori situația de a se reconstrui unele monumente de arhitectură sau interioare de arhitectură, după o documentație ce este constituită numai din fotografii sau reprezentări perspective ale obiectului. Pentru a întocmi planurile și vederile necesare este nevoie să se recurgă la *restituția perspectivă*. Acest lucru constă în determinarea elementelor perspective caracteristice în tabloul de perspectivă (deci pe fotografie), astfel încît cu minimum de date necesare să poată fi construite, la o anumită scară, atît planul cît și elevațiile (fațadele) obiectului studiat. În general, pentru un asemenea studiu este necesară o fotografie a clădirii care să aibă:

a) verticalele precis conturate (aparatul de fotografiat a avut direcția de vizare orizontală, deci a rezultat o perspectivă pe tablou vertical);

b) un unghi drept ușor de depistat, cu ajutorul căruia se pot determina punctele de fugă.

De asemenea mai trebuie să se cunoască cel puțin o înălțime reală sau o dimensiune reală în plan a obiectului de arhitectură studiat; dacă nu, fotografia ar trebui să conțină neapărat un obiect de dimensiuni cunoscute sau o scară metrică, amplasată lîngă obiectul de arhitectură la fotografiere (procedeu des folosit la relevee).

Gradul de precizie al restituției perspective este dat de numărul de elemente metrice ce se cunosc în tablou (în fotografie).

13.2. METODE DE CONSTRUCȚIE A RESTITUȚIEI PERSPECTIVE

Elementele perspective caracteristice se determină astfel: punctele de fugă se găsesc la intersecția direcțiilor de fugă ale dreptelor orizontale, iar

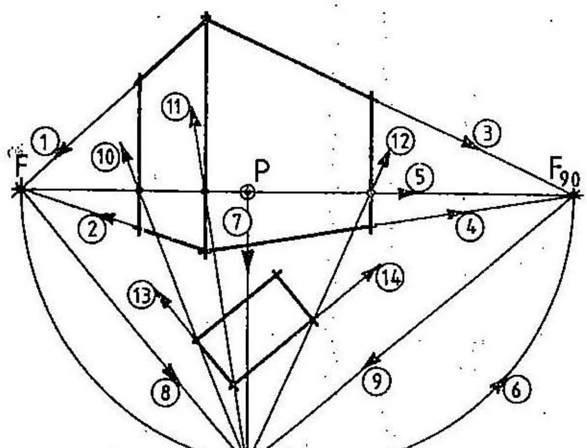


fig. 13.2.1

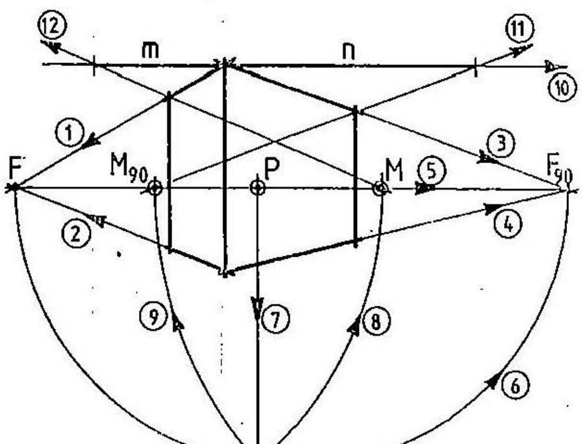


fig. 13.2.2

între punctele de fugă F și F_{90} se poate trasa linia orizontului care este perpendiculară pe verticalele obiectului.

După cum este determinat punctul principal de privire P, se pot distinge mai multe moduri de a executa o restituție perspectivă.

1) Punctul P se alege în centrul fotografiei

Punctul P este determinat astfel atunci cînd se știe precis că se dispune de o fotografie întreagă și nu de niște decupaje dintr-un clișeu.

a) *Restituția perspectivei prin metoda* FF_{90} (fig. 13.2.1). Procedeul este invers metodei de construcție a perspectivei în care se folosesc punctul de observație și punctele de fugă. Pe raza vizuală **(11)**, ce trece în proiecție orizontală prin muchia cea mai avansată, se ia un punct din care se duc paralele la adevăratele direcții de fugă. La intersecția cu celelalte raze vizuale se obține raportul laturilor. Cunoscînd o dimensiune reală a obiectului în plan, i se poate determina planul la scară.

b) *Restituția perspectivă cu ajutorul punctelor de măsură.* Procedeul este invers metodei de construcție a perspectivei cu ajutorul punctelor de măsură și constă în a determina diviziunile metrice ale elementelor de arhitectură pe orizontala dusă prin una din extremitățile muchiei obiectului, cea mai avansată spre privitor, la dreapta și la stînga ei, corespunzător lui M și M_{90} (fig. 13.2.2).

2) Punctul P este determinat grafic

Fie un element de arhitectură ale cărui dimensiuni se cunosc, de exemplu o ușă (fig. 13.2.3). Cu ajutorul înălțimii I la o anumită scară, se determină un plan frontal ce intersectează planul orizontal din perspectivă după dreapta **xx'**. Pe această dreaptă se măsoară la aceeași scară lățimea cunoscută (L) a ușii. Cu ajutorul unui punct de fugă K se translatează ușa pe aceeași direcție, din profunzime către privitor, pînă cînd înălțimea ei devine aceeași cu înălțimea luată la scară (I). Se determină astfel punctul de măsură M_{90} al direcției de fugă F_{90} a peretelui. Avînd acest punct de măsură se pot obține toate celelalte elemente de care este nevoie: punctul principal de privire P, punctul ω și celălalt punct de măsură M.

Pentru a mări precizia restituției perspective, sînt necesare mai multe verificări.

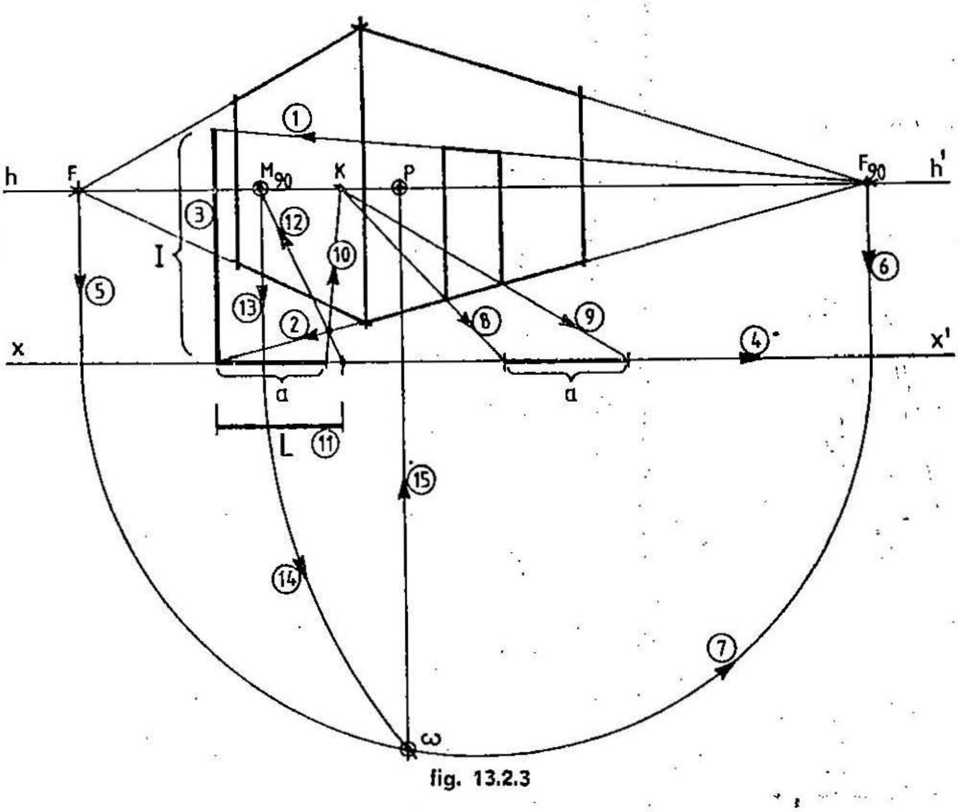


fig. 13.2.3

14.

PERSPECTIVA PE TABLOU ÎNCLINAT

14.1. GENERALITĂŢI

În perspectiva de observaţie sînt foarte numeroase situaţiile cînd pentru a putea cuprinde în cîmpul vizual o construcţie foarte înaltă trebuie să se privească de jos în sus. Ansamblurile de arhitectură pot fi privite şi de pe înălţimi de relief sau din avion. În aceste cazuri, direcţia de privire nu mai este orizontală, iar dacă trebuie construită perspectiva într-o astfel de situaţie tabloul ales nu mai este vertical, ci înclinat. De asemenea, se impune alegerea unui tablou înclinat de perspectivă pentru construcţia perspectivelor de interior a bolţilor şi a plafoanelor.

În cazul perspectivei pe tablou înclinat verticalele din spaţiu apar concurente într-un punct de fugă F_v. După direcţia principală de privire perspectiva pe tablou înclinat poate fi:

— *ascendentă*, cînd punctul de fugă al verticalelor este situat deasupra liniei orizontului (fig. 14.1.1);

— *descendentă*, cînd punctul de fugă al verticalelor este situat sub linia de orizont (fig. 14.1.2).

Deoarece verticalele din spaţiu nu mai sînt paralele cu tabloul, ele apar concurente în perspectiva pe tablou înclinat. Aceste verticale se comportă ca orice dreaptă privită oblic din perspectiva pe tablou vertical. Deci în perspectiva pe tablou înclinat nu se mai păstrează aceeaşi unitate de măsură

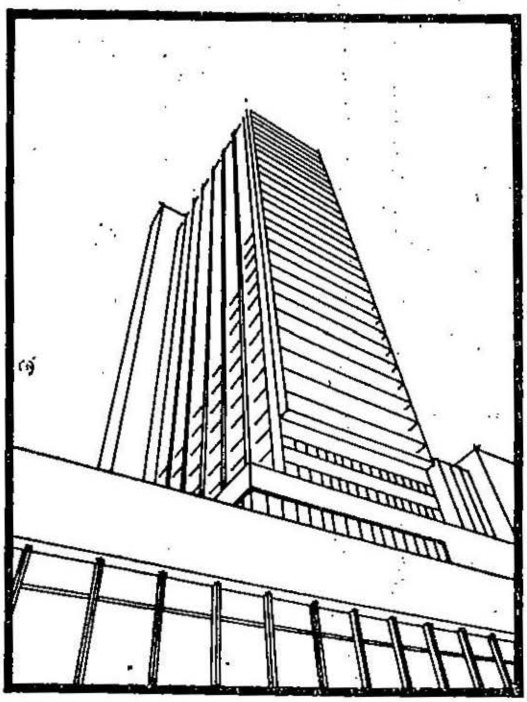


fig. 14.1.1

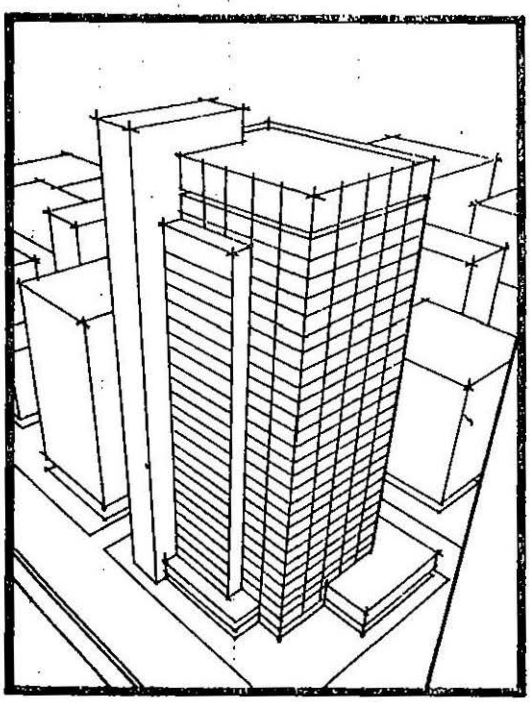


fig. 14.1.2

pe verticală, ea micşorîndu-se odată cu depărtarea după legile descreşterii perspective. În perspectiva pe tablou înclinat punctul de privire P nu mai este situat pe linia orizontului, ci deasupra sau sub ea, în funcţie de tipul perspectivei (ascendentă sau descendentă).

14.2. TRECEREA DE LA PERSPECTIVA PE TABLOU VERTICAL LA PERSPECTIVA PE TABLOU ÎNCLINAT

O primă trecere către perspectiva pe tablou înclinat se poate face rotind cu 90° desenul perspectiv construit pe tablou vertical din figura 14.2.1. Se obţine o perspectivă de tip frontal pe tablou înclinat (fig. 14.2.2). Dreapta de fugă a planurilor verticale (ce trece prin F) devine noua linie de orizont, iar vechea linie de orizont devine dreaptă de fugă a planelor verticale laterale din perspectiva pe tablou înclinat. Punctul de fugă F capătă acelaşi rol cu punctul de fugă al dreptelor de capăt din perspectiva pe tablou vertical. Acest punct se numeşte *punct pseudoprincipal de privire* şi se notează cu P_h. Punctul de fugă F_{90} devine punctul de fugă al verticalelor şi se notează cu F_v. Se presupune că prisma aleasă are faţa orizontală pătrată. Dacă se prelungesc diagonalele ei se obţin pe linia orizontului două puncte de fugă ale unor direcţii perpendiculare (fig. 14.2.3). Acestea pot fi punctele de fugă F şi F_{90} ale unei prisme rotite cu 45° faţă de prisma dată.

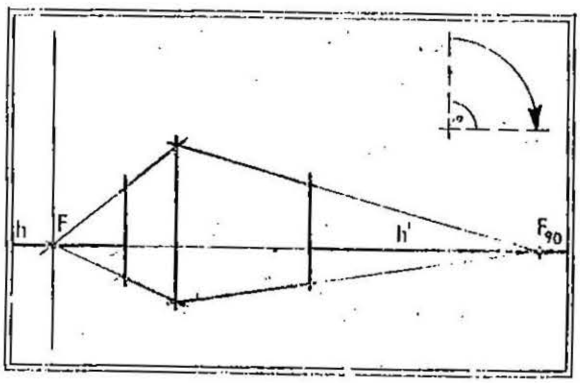


fig. 14.2.1

14.3. CONFIGURAŢIA PUNCTELOR DE FUGĂ ŞI DE MĂSURĂ

Cele trei puncte de fugă formează un triunghi. Oricare din laturile acestui triunghi poate să devină linia orizontului pentru o perspectivă pe tablou înclinat. Punctul pseudoprincipal se determină pe una din laturi, ducîndu-se din vîrful opus al triunghiului punctelor de fugă o perpendiculară

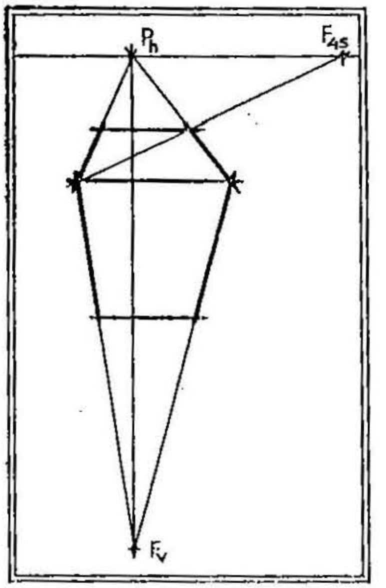


fig. 14.2.2

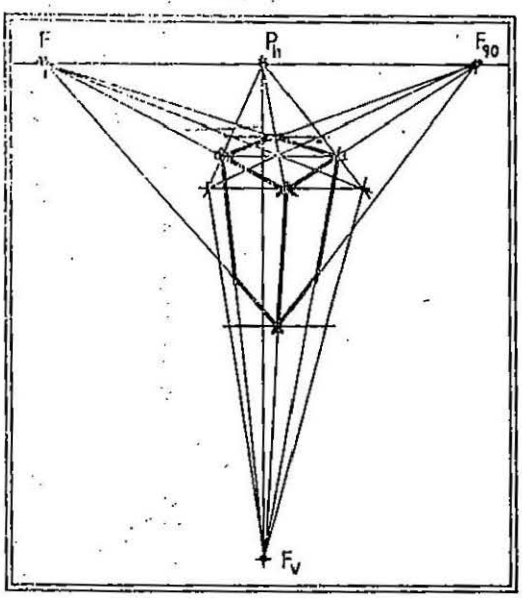


fig. 14.2.3

pe ea. La intersecţia celor trei perpendiculare (înălţimi în triunghi) se găseşte punctul principal de privire P. Acesta este deci ortocentrul triunghiului punctelor de fugă. Aceste puncte de fugă sînt urmele pe tablou a trei drepte perpendiculare două cîte două în punctul de vedere Ω. Două din aceste drepte sînt orizontale, iar a treia este verticală. Configuraţia punctelor de fugă este deci identică cu triunghiul urmă al axelor unui sistem ortogonal, din reprezentările axonometrice ortogonale (fig. 14.3.1). Într-o axonometrie ortogonală originea sistemului de axe din spaţiu se proiectează în ortocentrul triunghiului urmă. Se poate spune deci că *ortocentrul triunghiului punctelor de fugă* F, F_{90}, F_v *a trei direcţii perpendiculare două cîte două (două orizontale şi una verticală), care este proiecţia ortogonală a punctului de vedere Ω pe tabloul înclinat de perspectivă, se numeşte punctul principal de privire* P (fig. 14.3.2). Rezultă astfel şase puncte de măsură, din care numai trei sînt de lucru, iar celelalte trei pentru verificări. Cu ajutorul punctelor de măsură se pot face măsurători pe cele trei direcţii concurente în P. Configuraţia punctelor de fugă şi de măsură în perspectiva pe tablou înclinat conduce la *axonometria conică*, ce are ca axe cele trei direcţii de fugă concurente în P. Unităţile de măsură pe cele trei axe sînt determinate cu ajutorul punctelor de măsură.

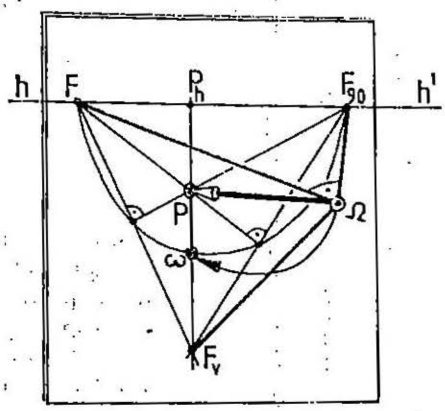


fig. 14.3.1

14.4. CONSTRUCŢIA PERSPECTIVEI PE TABLOU INCLINAT

PĂTRATUL ŞI CUBUL

Mai întîi se fixează în tablou triunghiul celor trei puncte de fugă. Cu cît punctul de fugă al verticalelor F_v este ales mai depărtat de linia orizontului, cu atît fuga verticalelor este mai lentă, deci unghiul sub care se priveşte este în plan vertical mai aproape de 90°. Se află apoi pe fiecare latură a triunghiului punctul de fugă F_{45}. În perspectiva pe tablou înclinat se alege muchia verticală AB a cubului (fig. 14.4.1). Construcţia perspectivei cubului se face după metoda explicată la perspectiva pe tablou vertical.

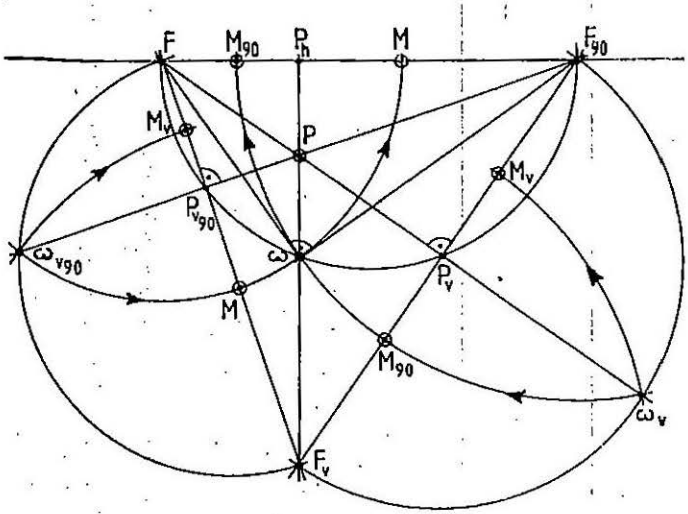


fig. 14.3.2

PUNCTUL DE FUGĂ DIAGONAL

Pentru construirea perspectivei pe tablou înclinat a unei prisme drepte dreptunghiulare, de dimensiuni cunoscute, se pot folosi punctele de fugă diagonale. Pe fiecare latură a triunghiului punctelor de fugă se construiește semicercul pe care se află punctul corespunzător direcțiilor de fugă respective. În aceste puncte se construiește proiecția feței prismei, corespunzătoare celor două puncte de fugă și se află astfel punctele de fugă diagonale pe laturile triunghiului (fig. 14.4.2). Se pornește construcția perspectivei, de exemplu, de la muchia orizontală (ab), aleasă în tabloul de perspectivă. Perspectiva se construiește după metoda explicată la perspectiva pe tablou vertical.

FOLOSIREA PUNCTELOR DE MĂSURĂ

Se alege triunghiul punctelor de fugă și se determină trei puncte de măsură pentru cele trei direcții de fugă. Se determină punctele de măsură M și M_{90} pe linia orizontului și punctul M_v pe dreapta de fugă FF_v. Să se construiască perspectiva pe tablou înclinat a unei prisme drepte dreptunghiulare de dimensiuni date (l, m, n).

Se fixează direct în tablou vîrful A al prismei, cel mai avansat către privitor. Se consideră că prin acest vîrf trece tabloul de perspectivă (fig. 14.4.3). Din vîrful A se duc paralele la cele două drepte de fugă pe care sînt fixate punctele de măsură (linia orizontului și dreapta FF_v). Pe aceste paralele se iau dimensiunile prismei la scară și se unesc cu punctele de măsură respective. Se determină astfel muchiile prismei în perspectivă.

De remarcat că nici în perspectiva pe tablou înclinat nu pot apărea unghiuri apropiate de 90°, deoarece oricît ar fi de înclinată direcția principală de privire ea nu ajunge niciodată să fie perpendiculară pe planul orizontal, nici în perspectiva ascendentă, nici în cea descendentă (fig. 14.4.4).

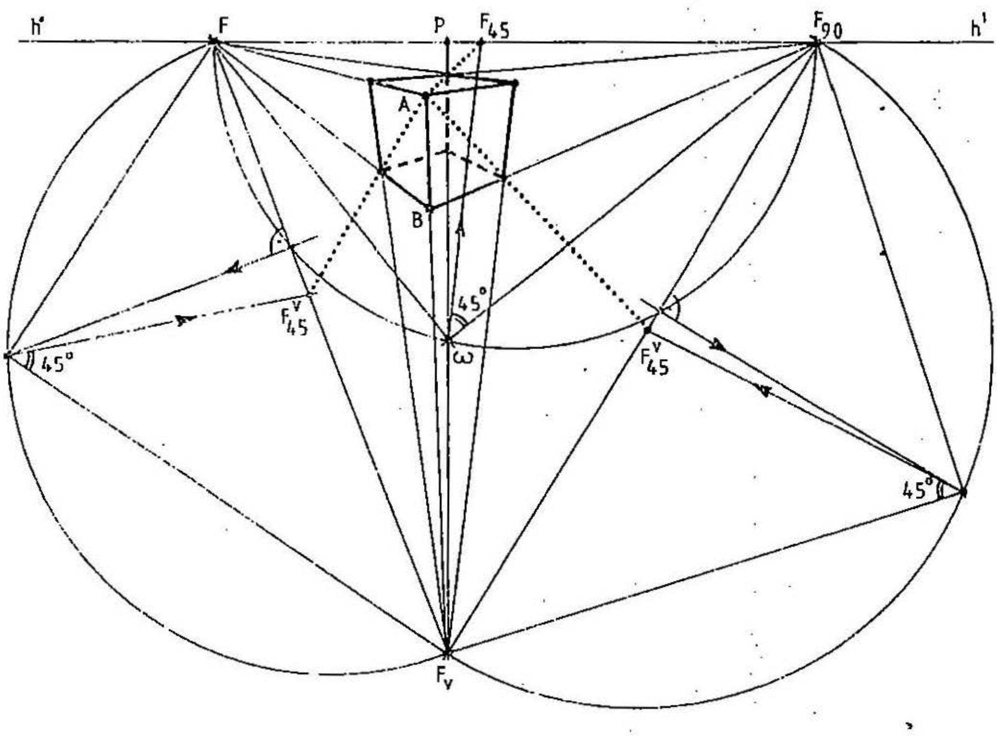


fig. 14.4.1

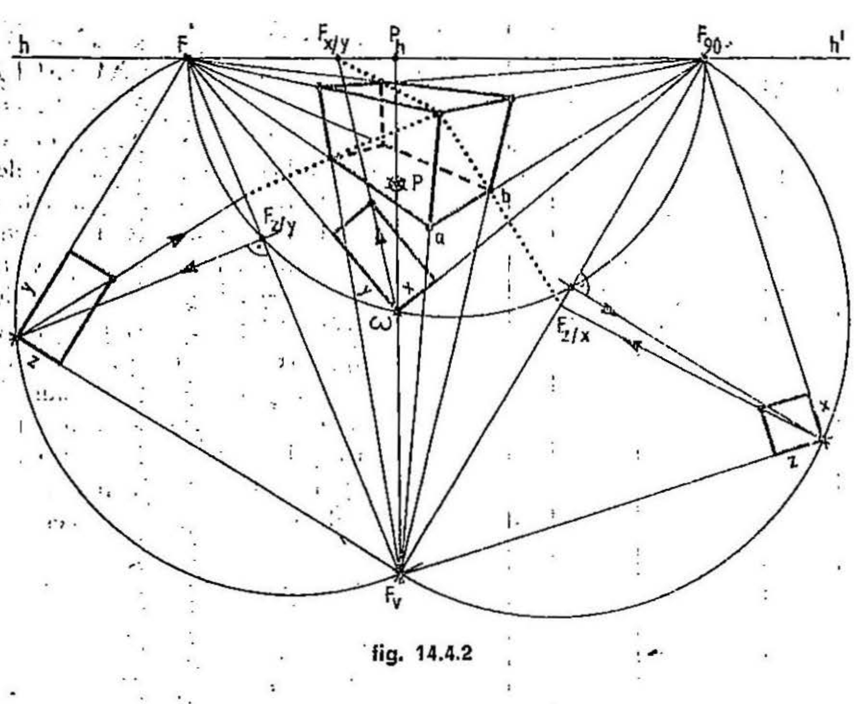


fig. 14.4.2

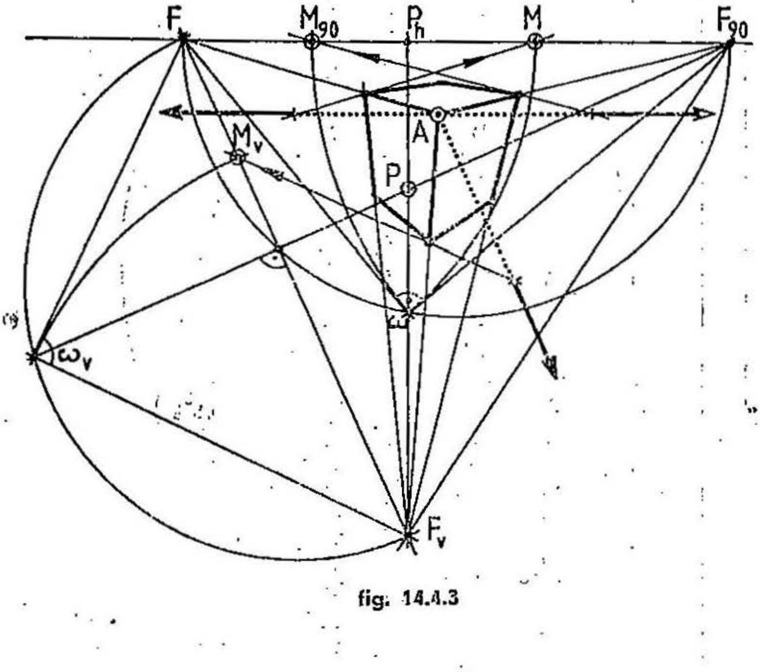


fig. 14.4.3

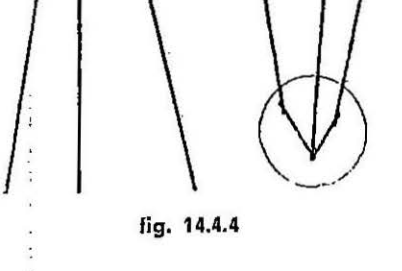


fig. 14.4.4

15.

REDAREA UNOR ASPECTE NATURALE ÎN PERSPECTIVĂ

15.1. GENERALITĂȚI

Construcția corectă a perspectivei volumului de arhitectură cu tratarea detaliilor nu este suficientă pentru a apropia desenul perspectiv de imaginea viitoarei construcții gîndită de arhitect. Mai sînt necesare o serie de operații grafice, unele perfect geometrizate, altele mai greu de cuprins în niște reguli geometrice, care fac ca perspectiva să se apropie tot mai mult de realitate. Redarea în desenul perspectiv a fenomenului oglindirilor, ca și trasarea umbrelor proprii și purtate sînt operații complet geometrizate și deci ușor și precis aplicate. Mai sînt o serie de fenomene mai puțin geometrizate, cum sînt degradarea luminii și a umbrei o dată cu depărtarea, degradarea culorilor, alte aspecte de redare a depărtării, care fac, de asemenea, ca perspectiva să se apropie de realitate. Cele geometrizate au fost cuprinse în studiul *perspectivei liniare*, iar celelalte fenomene, în studiul *perspectivei aeriene*.

Perspectiva de arhitectură trebuie să reprezinte un desen foarte precis și exact, care să conțină cît mai puține elemente convenționale. El trebuie să fie ușor de înțeles, să creeze imagini ale realului, deoarece se adresează în mare măsură nespecialiștilor — beneficiari și factori de decizie.

15.2. SCARA INTRINSECĂ A PERSPECTIVEI

Un aspect foarte important în apropierea perspectivei de imaginea realului este cel legat de reprezentarea obiectelor în același mod în care ele sînt percepute în spațiu. Astfel, desenele realizate trebuie să creeze imaginile obiectelor de dimensiunea și forma cunoscută. Toate acestea se realizează în raport cu dimensiunea omului.

Reprezentările axonometrice dau practic posibilitatea reprezentării tuturor obiectelor existente, iar mărimea lor este percepută în raport cu dimensiunile cunoscute și mai exact în raport cu dimensiunea omului. Desenul perspectiv poate să redea mărimea obiectelor chiar și în absența dimensiunii omului, deoarece el se apropie ca imagine de imaginile percepute de vederea umană.

O prismă dreaptă dreptunghiulară în reprezentarea axonometrică capătă diferite dimensiuni în raport cu dimensiunea omului. (fig. 15.2.1). Se observă că forma obiectului nu s-a schimbat, ci doar dimensiunea lui. În aceeași prismă dreaptă dreptunghiulară, reprezentată axonometric, se desenează trei obiecte de dimensiuni diferite, dar cunoscute (fig. 15.2.2, **a**, **b** și **c**). Exemplul din figura 15.2.2, **b**) nu prezintă o imagine satisfăcătoare, deoarece pentru a avea muchiile aproape paralele autocamionul trebuie să fie văzut de la mare distanță, ori imaginea lui prezintă destul de multe detalii. O astfel de imagine nu se poate obține decît cu binoclul. Obiectele mici și foarte mari, în raport cu dimensiunea omului, pot fi reprezentate axonometric, fără ca imaginile lor să se depărteze de viziunea realului. Un pachet de țigări totdeauna va fi văzut într-o reprezentare aproape axonometrică, iar un bloc cu 10 etaje poate fi văzut astfel numai de la mare înălțime.

Deci, anumite tipuri de obiecte impun anumite tipuri de reprezentări. Se introduce astfel noțiunea de *scară intrinsecă* în reprezentările diferitelor obiecte.

În reprezentările axonometrice obiectele capătă scară în raport cu dimensiunea omului. Spre deosebire de axonometrie, perspectiva indică suficient de bine mărimea naturală a obiectelor.

În perspectivă, dimensiunea omului este perfect determinată, iar schimbarea acestei dimensiuni

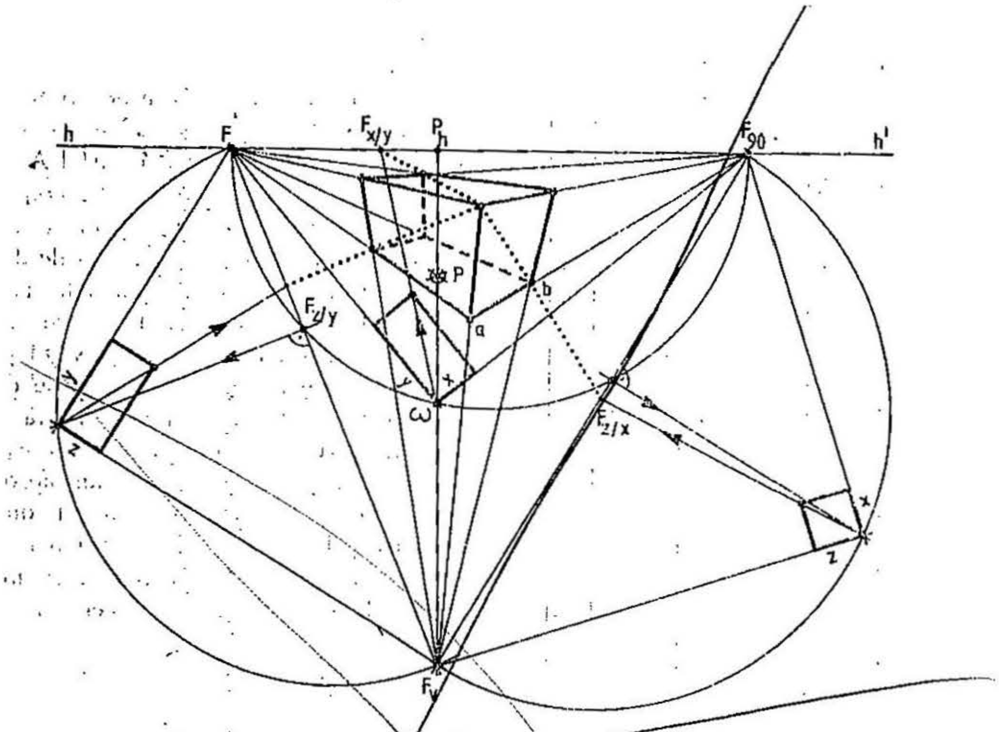


fig. 14.4.2

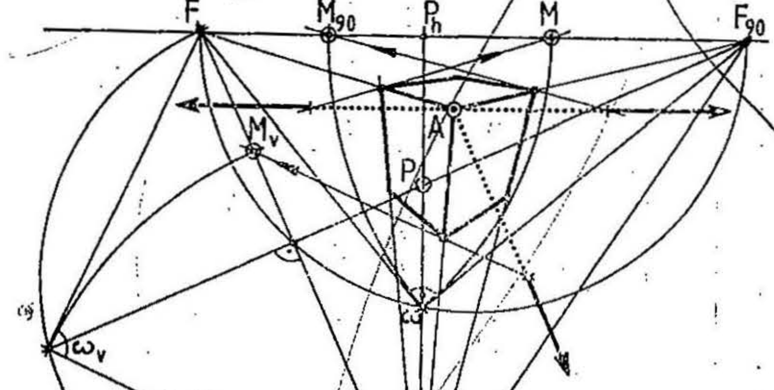


fig. 14.4.3

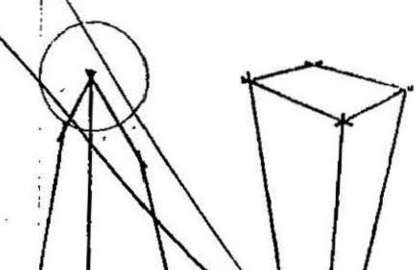


fig. 14.4.4

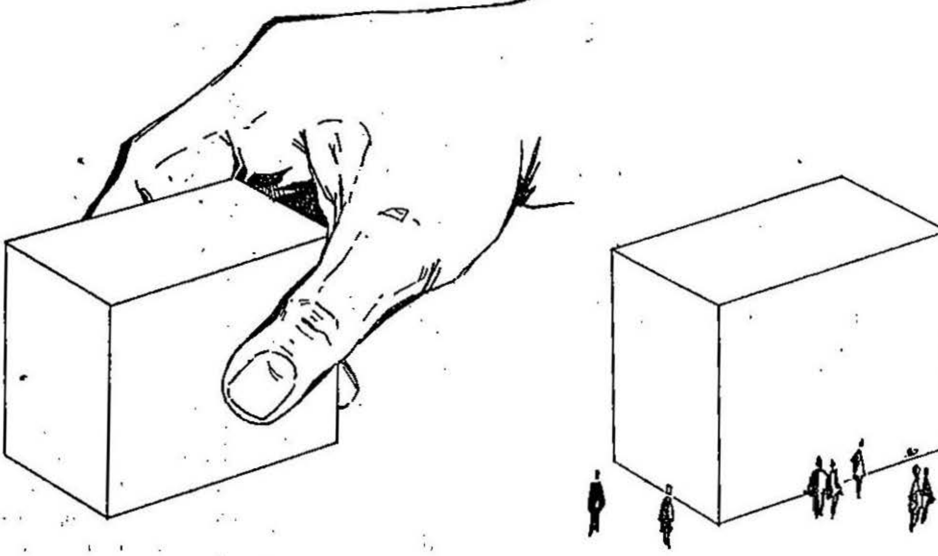


fig. 15.2.1

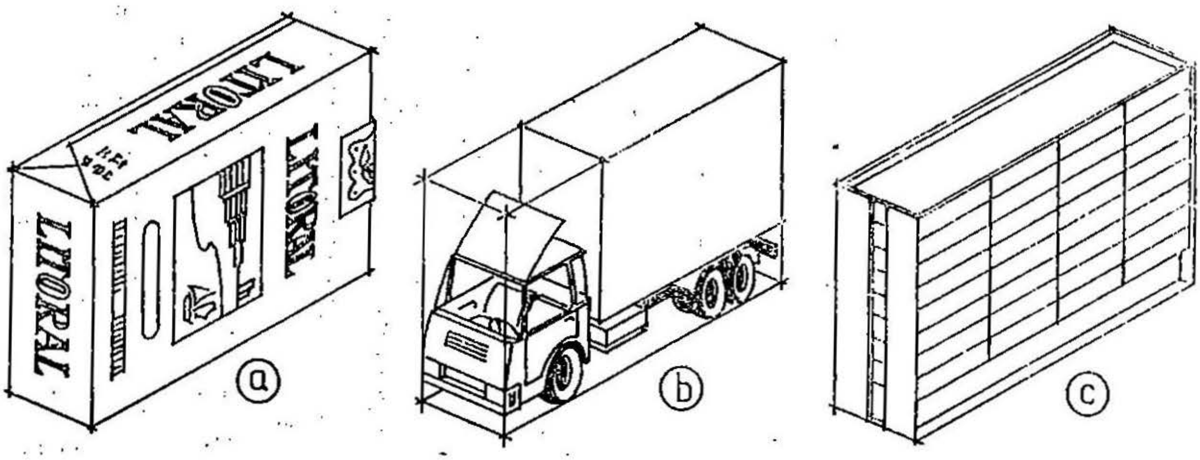


fig. 15.2.2

duce la schimbarea formei obiectului reprezentat. Astfel, într-o perspectivă pe tablou vertical la nivelul ochilor, simpla reprezentare a liniei de orizont indică scara obiectului reprezentat (fig. 15.2.3) şi dimensiunea omului în perspectivă.

Dacă perspectiva este construită pe tablou înclinat, este vorba de un obiect foarte mare, ce nu a putut fi cuprins în cîmpul vizual decît ridicînd privirea (fig. 15.2.4); deci perspectiva pe tablou înclinat se apropie cel mai mult de realitate, nelăsînd nici un dubiu imaginii create.

Schimbînd dimensiunea omului în imaginile de mai jos se schimbă şi forma obiectelor reprezentate. Construcţia înaltă din figura 15.2.3 s-a transformat într-o ladă ce are capacul înclinat spre spate (fig. 15.2.5), iar blocul-turn din figura 15.2.4 a devenit un stîlp de beton în formă de trunchi de piramidă (fig. 15.2.6). Se observă că cele mai mari modificări de dimensiune s-au petrecut în perspectiva pe tablou înclinat. Acest tip de perspectivă indică cel mai bine scara obiectelor.

Dacă se reprezintă obiectele din figura 15.2.2 într-o perspectivă pe tablou înclinat de tip ascendent (fig. 15.2.7), se pot constata următoarele: cel mai aproape de realitate este blocul cu 10 etaje, perspectiva autocamionului prezintă efecte excesive, iar pachetul de ţigări nu va putea fi văzut ast

ol niciodată. Perspectiva pe tablou înclinat de tip descendent indică totdeauna obiecte foarte mari văzute de aproape (fig. 15.2.8). Ansamblurile urbanistice pot fi privite numai de la mare distanță, avînd reprezentări apropiate de cele axonometrice (fig. 15.2.9).

Scara și nu mărimea este ceea ce într-adevăr rămîne constant în percepție. Scara este determinată de cadrul spațial. Acest studiu s-a efectuat pentru obiecte izolate, dar în realitate obiectele sînt încadrate într-o ambianță spațială. Între obiectul considerat și cadrul său spațial se naște o relație care poate îmbrăca trei aspecte (R. *Arnheim*, 1979):

— ambianța se impune, iar subiectul se supune deformîndu-se;

— obiectul se impune, iar contextul spațial se deformează;

— nici unul din „parteneri" nu cedează, iar imaginea se separă în sisteme spațiale independente.

Aceste aspecte vor fi studiate în capitolul 16.

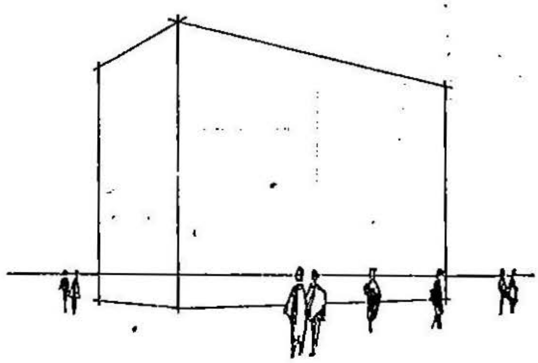


fig. 15.2.3

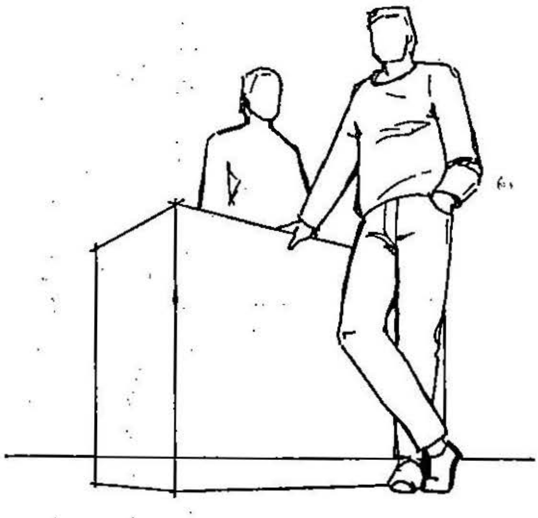


fig. 15.2.5

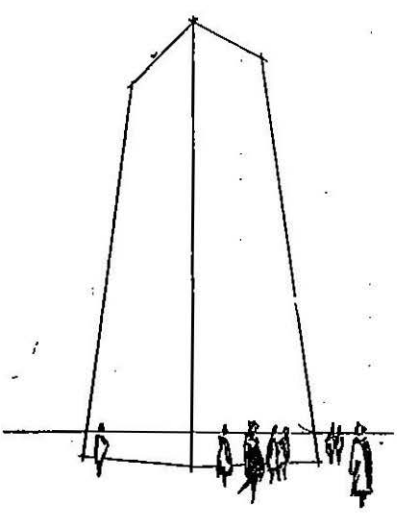


fig. 15.2.4

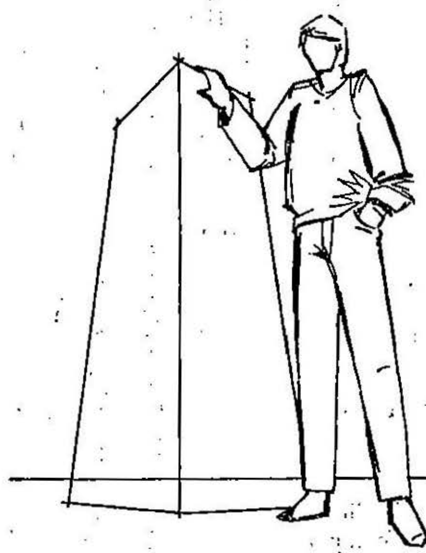


fig. 15.2.6

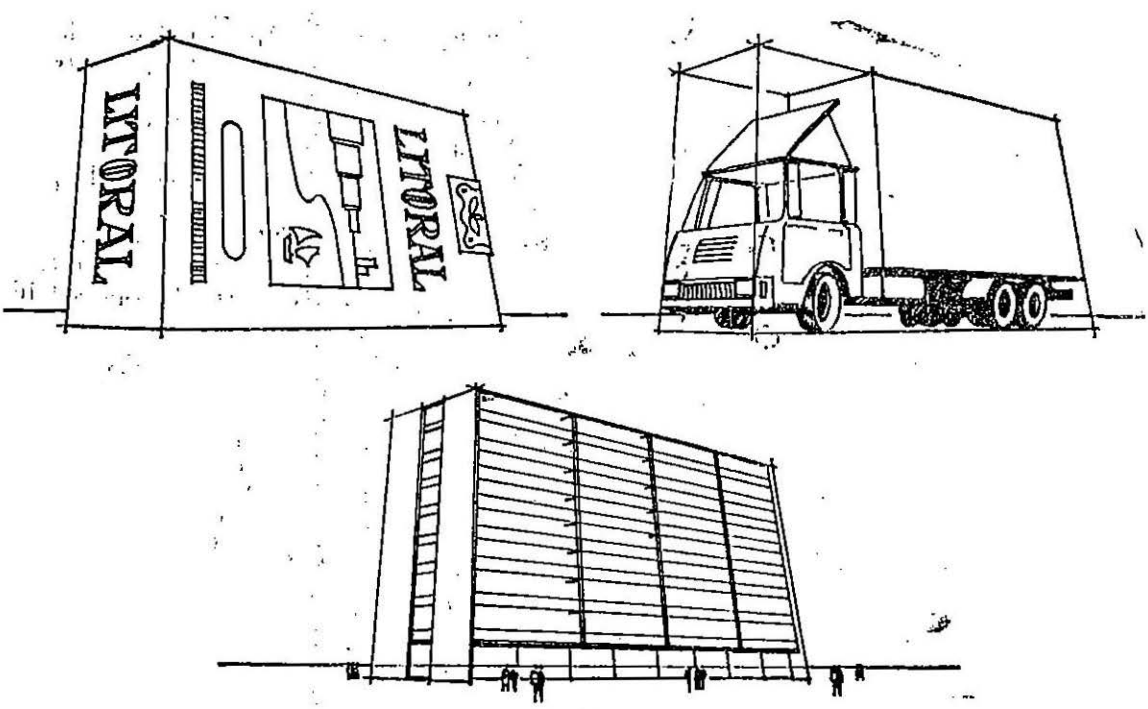


fig. 15.2.7

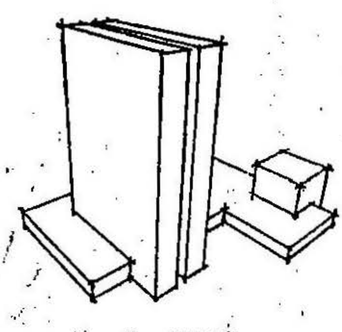


fig. 15.2.8

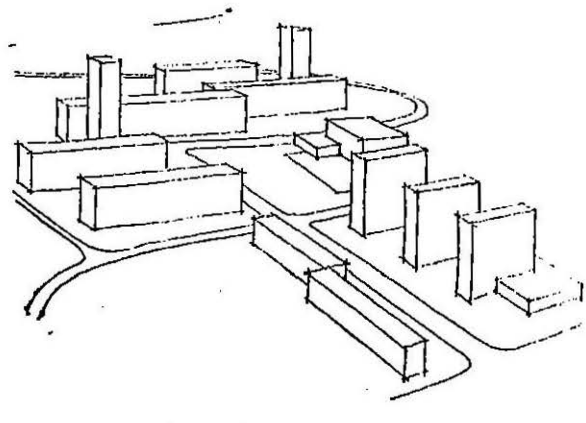


fig. 15.2.9

15.3. OGLINDIRILE IN PERSPECTIVĂ

OGLINDIREA PE PLAN ORIZONTAL

Este cunoscut faptul că obiectele situate pe malul unei ape se oglindesc în ea, cu condiția ca suprafața apei să fie nemișcată. De asemenea, o pardoseală udă poate să devină suprafață reflectantă. Fenomenul de oglindire pe plan orizontal nu poate fi perceput decît dacă suprafața reflectantă se găsește între obiect și privitor. Oglindirea pe plan orizontal este o problemă de poziție.

Pentru a explica geometric acest fenomen se face apel la legile reflexiei:

— raza incidentă, perpendiculara pe oglindă în punctul de incidență și raza reflectată sînt tot-deauna în același plan;

— unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie.

Problema se analizează în planul vertical format de raza incidentă și raza reflectată (fig. 15.3.1).

Punctul A trimite în Ω o rază directă și o rază care se reflectă în punctul α, situat în așa fel pe oglindă ca unghiul de incidență AαN să fie egal cu unghiul de reflexie NαΩ. Dreapta αN este perpendiculară pe oglindă. Prelungind raza reflectată Ωα pînă la intersecția cu verticala din A, se obține punctul A′, simetric cu A față de oglindă; deci, din punctul Ω observatorul vede punctul α de pe oglindă confundat cu A′.

Fie perspectiva unei case pe marginea unui lac (fig. 15.3.2). Oglindirea se face prin simetrie în raport cu planul orizontal al apei, prelungit pînă la linia orizontului pe sub orice forme de relief sau obiecte. Pentru a afla oglindirea unui punct se coboară din el o verticală, pe care se măsoară, de la planul apei ,în jos, cota punctului față de acest plan (fig. 15.3.3). Problema nu se repetă pentru fiecare punct în parte, deoarece o dreaptă și oglindirea ei sînt concurente în punctul de fugă al dreptei respective. În figura 15.3.2 se observă că, prin oglindire, intradosul teraselor se vede mai mare decît în vedere directă. În cazul că punctul de vedere ar fi mai sus, aceste intradosuri nu apar în perspectivă, dar ele se văd în oglindire, pe suprafața

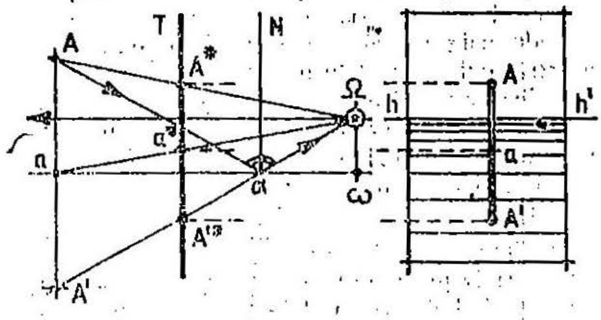


fig. 15.3.1

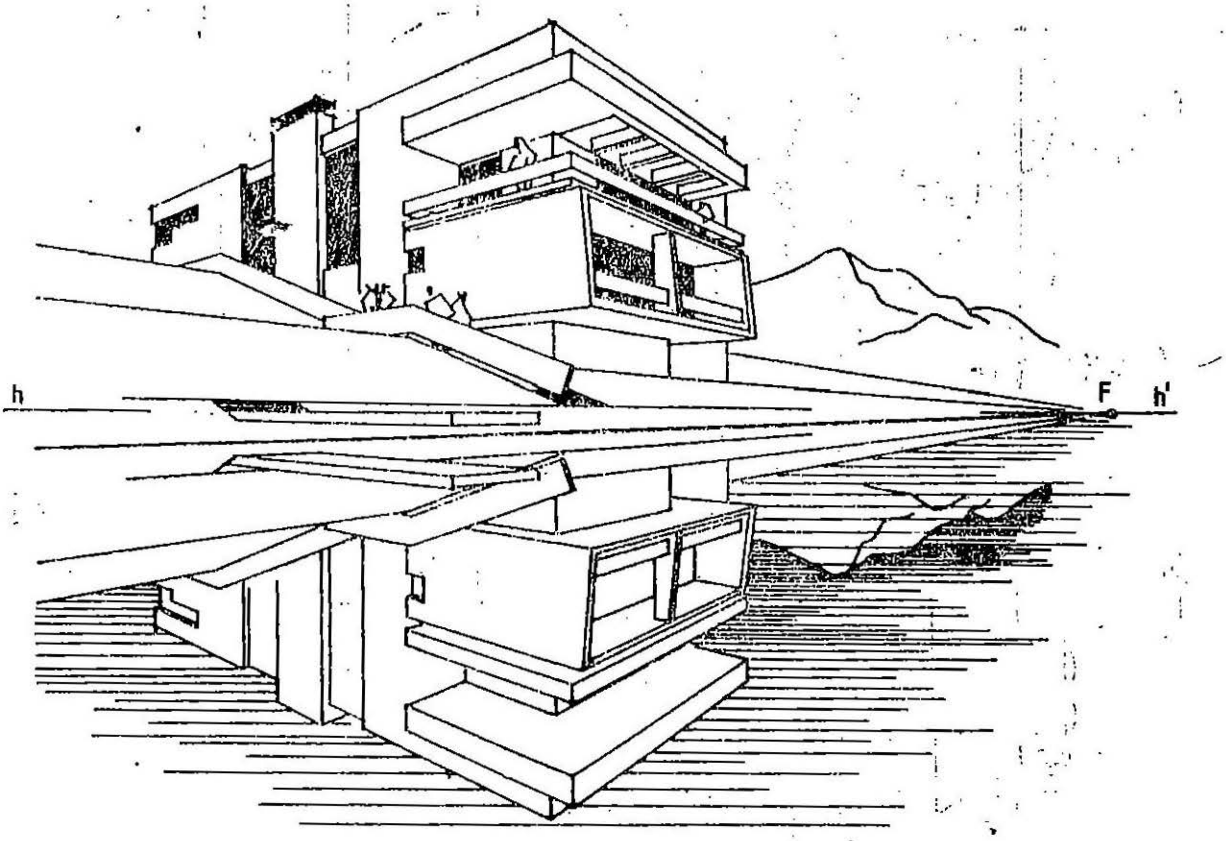


fig. 15.3.2

apei (de exemplu, intradosul debarcaderului). Cu cît un obiect este mai depărtat de mal, cu atît se vede mai puțin din oglindirea lui. În perspectiva noastră, oglindirea taluzului acoperă o parte din oglindirea casei și aproape total oglindirea obiectelor depărtate de apă. Dacă unghiul taluzului este mai mic decît unghiul de vedere sub care este privit, atunci el nu mai apare în oglindire (fig. 15.3.4).

Oglindirea obiectelor foarte depărtate, cum sînt munții și dealurile de la orizont, se face prin simetrie față de linia orizontului. Pentru a cuprinde în unghiul vizual și oglindirea obiectului trebuie să ne depărtăm de el mai mult decît în cazul perspectivei fără oglindire. Deci în studiul alegerii punctului de vedere trebuie să se țină seama și de oglindirea obiectului, care îi mărește de fapt dimensiunile pe verticală. În lipsa acestui studiu, oglindirea poate să iasă deformată sau, mai corect spus, nu se obține o oglindire întreagă (fig. 15.3.5). În cazul perspectivei cu orizont supraînălțat, studiul de alegere a punctului de vedere, la care se va ține seama de oglindire, este obligatoriu.

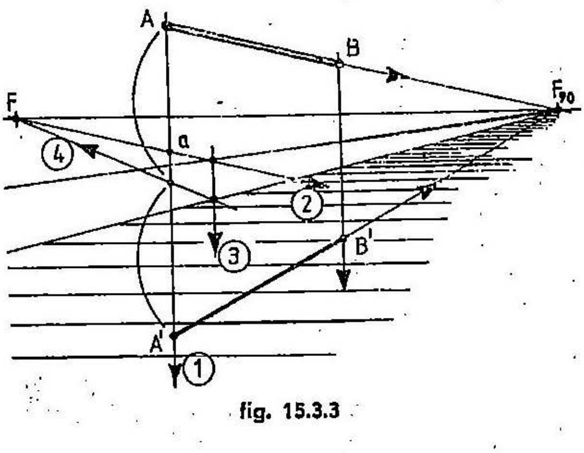


fig. 15.3.3

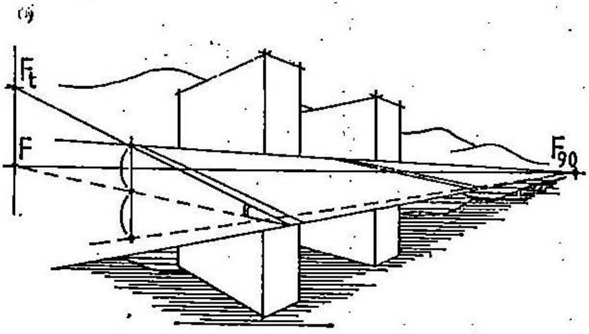


fig. 15.3.4

OGLINDIREA PE PLAN VERTICAL

Prin oglindirea pe plan vertical se face vizibil în perspectivă spațiul virtual. Este o problemă metrică de perspectivă liberă, ce se rezolvă cunoscînd poziția punctului de vedere în raport cu tabloul. Problema este de fapt de a determina în perspectivă simetricul unui punct față de un plan vertical, considerat oglindă.

După poziția oglinzii față de observator se deosebesc trei cazuri:

— oglinda este perpendiculară pe tablou;

— oglinda este paralelă cu tabloul;

— oglinda este un plan vertical oarecare.

1) În cazul cînd oglinda este perpendiculară pe tablou, simetria se face într-un plan paralel cu tabloul (fig.15.3.6).

2) În cazul cînd oglinda este paralelă cu tabloul, problema se rezolvă în două moduri:

a) Simetricul se află cu ajutorul diviziunilor perspective (fig. 15.3.7). Se alege un punct K pe linia de orizont cu ajutorul căruia se determină în planul frontal, al verticalei Aa, o unitate x corespunzătoare distanței pînă la oglindă. Luîndu-se încă o dată unitatea x în planul frontal, se determină simetricul față de oglindă.

b) Simetricul se află intersectînd cu oglinda planul vertical al dreptei (Aa), ce se ia perpendicular pe oglindă. Prin mijlocul dreptei de intersecție rezultată, trece diagonala dreptunghiului format de dreapta (Aa) și oglindirea ei (fig. 15.3.8).

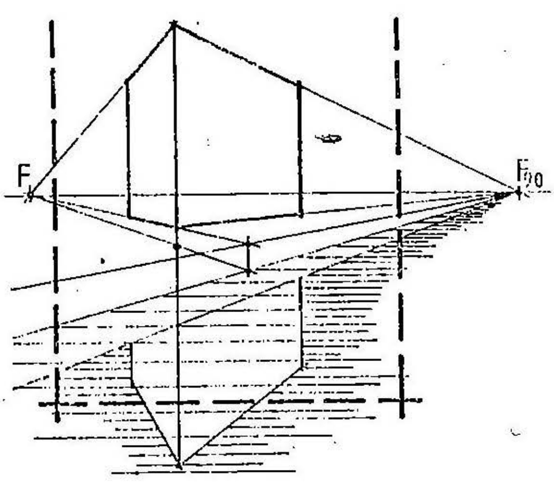


fig. 15.3.5

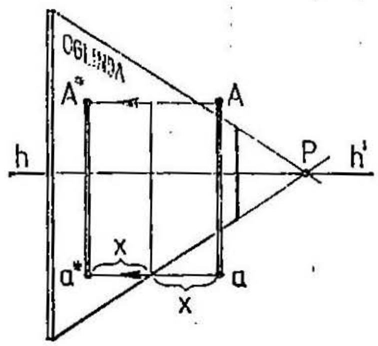


fig. 15.3.6

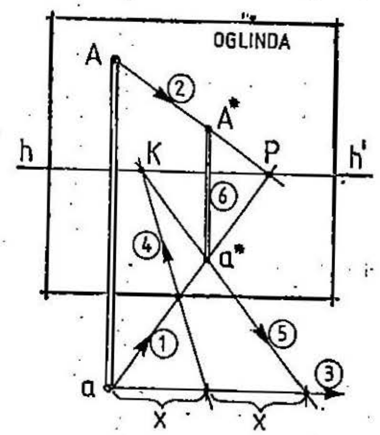


fig. 15.3.7

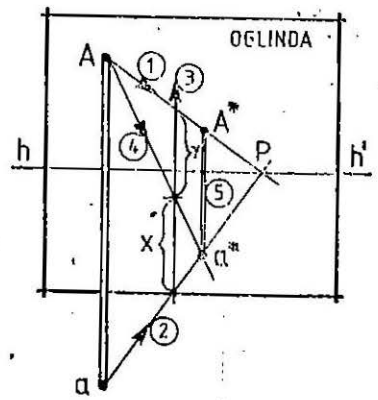


fig. 15.3.8

3) În cazul cînd oglinda este un plan vertical oarecare trebuie să se cunoască poziția observatorului față de oglindă, cu ajutorul căreia se află punctul de fugă F_{90} al direcției perpendiculare pe planul oglinzii. Fie în perspectivă oglinda dată prin urma ei orizontală **(U)**, verticala **(Aa)** și punctul principal de privire **P** (fig. 15.3.9). Problema se rezolvă fie prin diviziuni perspective, fie intersectînd planul oglinzii cu planul verticalei **(Aa)**, luat perpendicular pe oglindă.

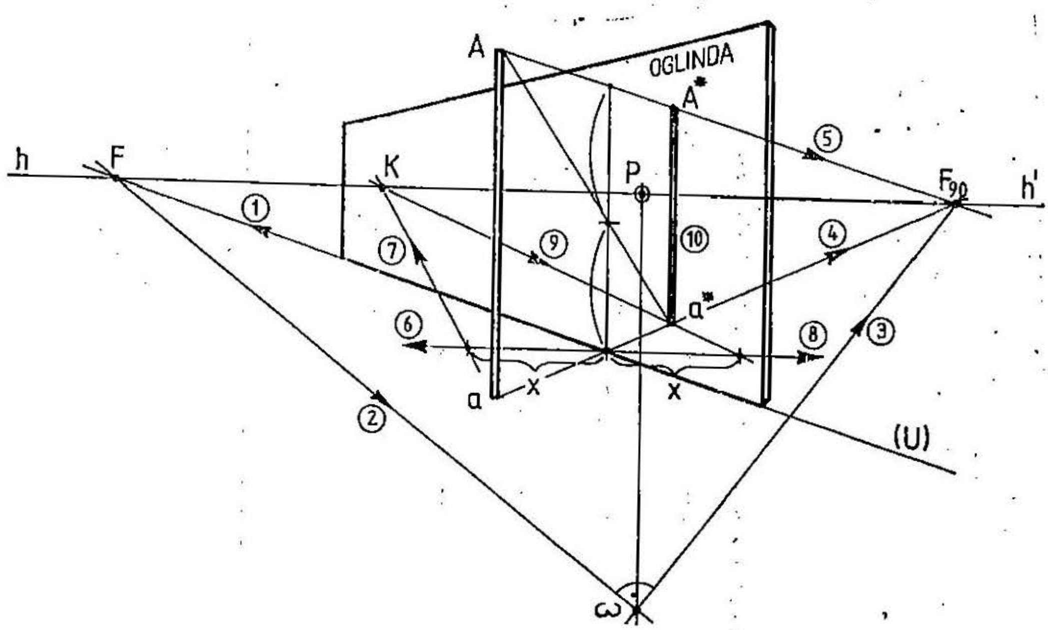


fig. 15.3.9

OGLINDA DE CAPĂT

Problema se rezolvă în plan frontal (fig. 15.3.10). Se intersectează planul frontal al verticalei cu planul de capăt al oglinzii. Pe dreapta de intersecție se duc perpendiculare și se construiește pe ele oglindirea prin simetrie.

OGLINDA ÎNCLINATĂ FRONTAL

Fie un cub în perspectivă frontală, în care se ia o oglindă înclinată frontal spre privitor (fig.15.3.11). Problema este de a găsi direcția perpendicularelor din extremitățile verticalei pe planul oglinzii. Se va rezolva problema pe fața din dreapta a cubului, făcînd analogia cu problema din proiecția ortogonală. Odată găsită direcția acestei perpendiculare pe oglindă, se află și punctul ei de fugă pe dreap-

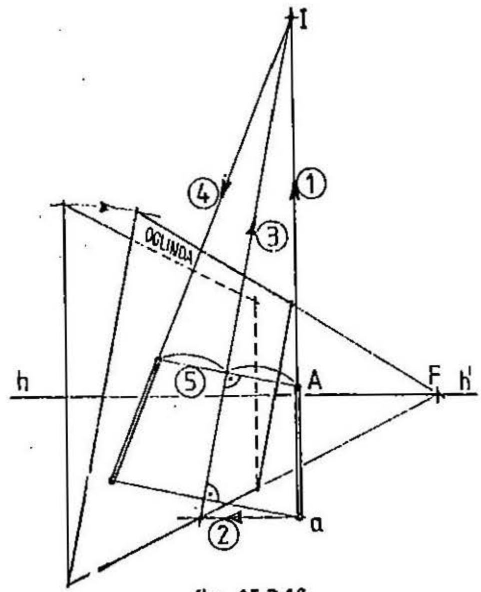


fig. 15.3.10

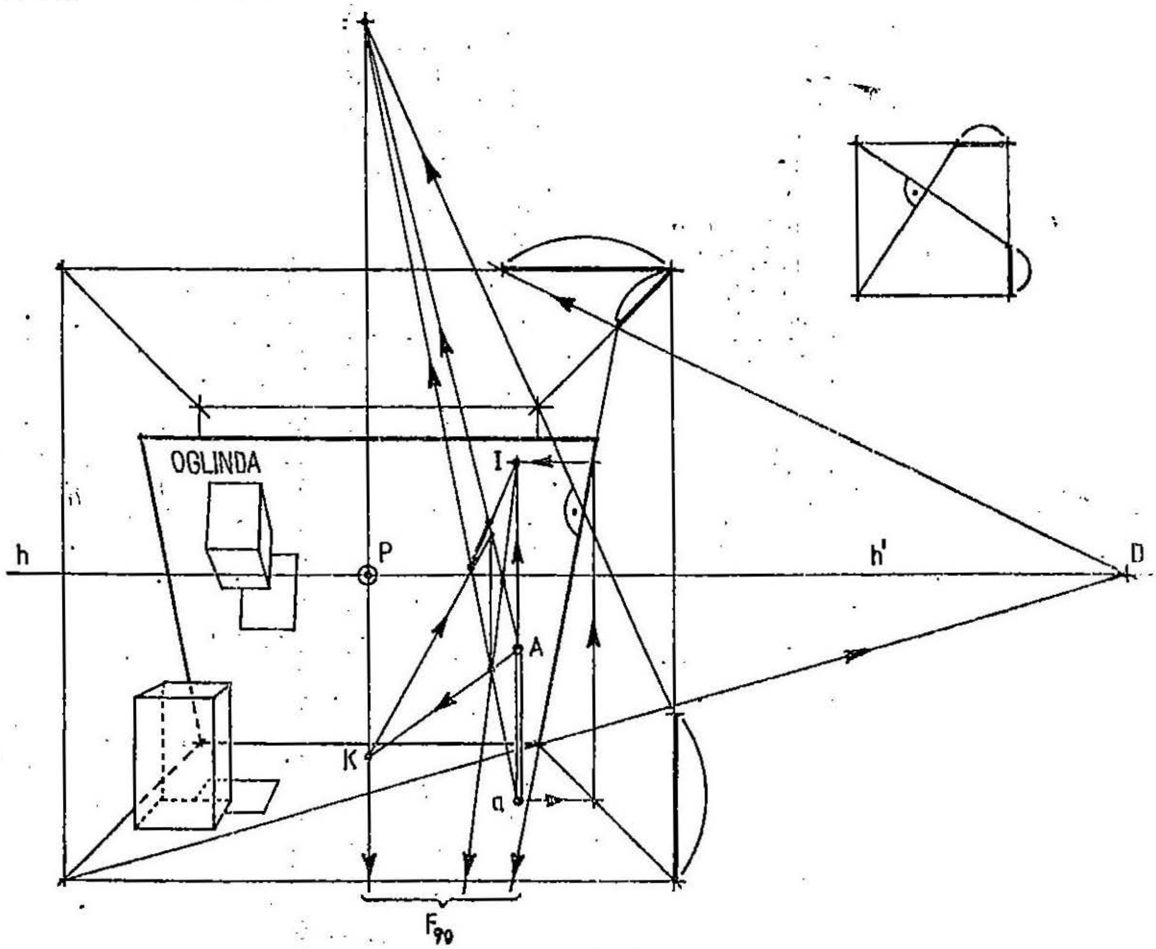


fig. 15.3.11

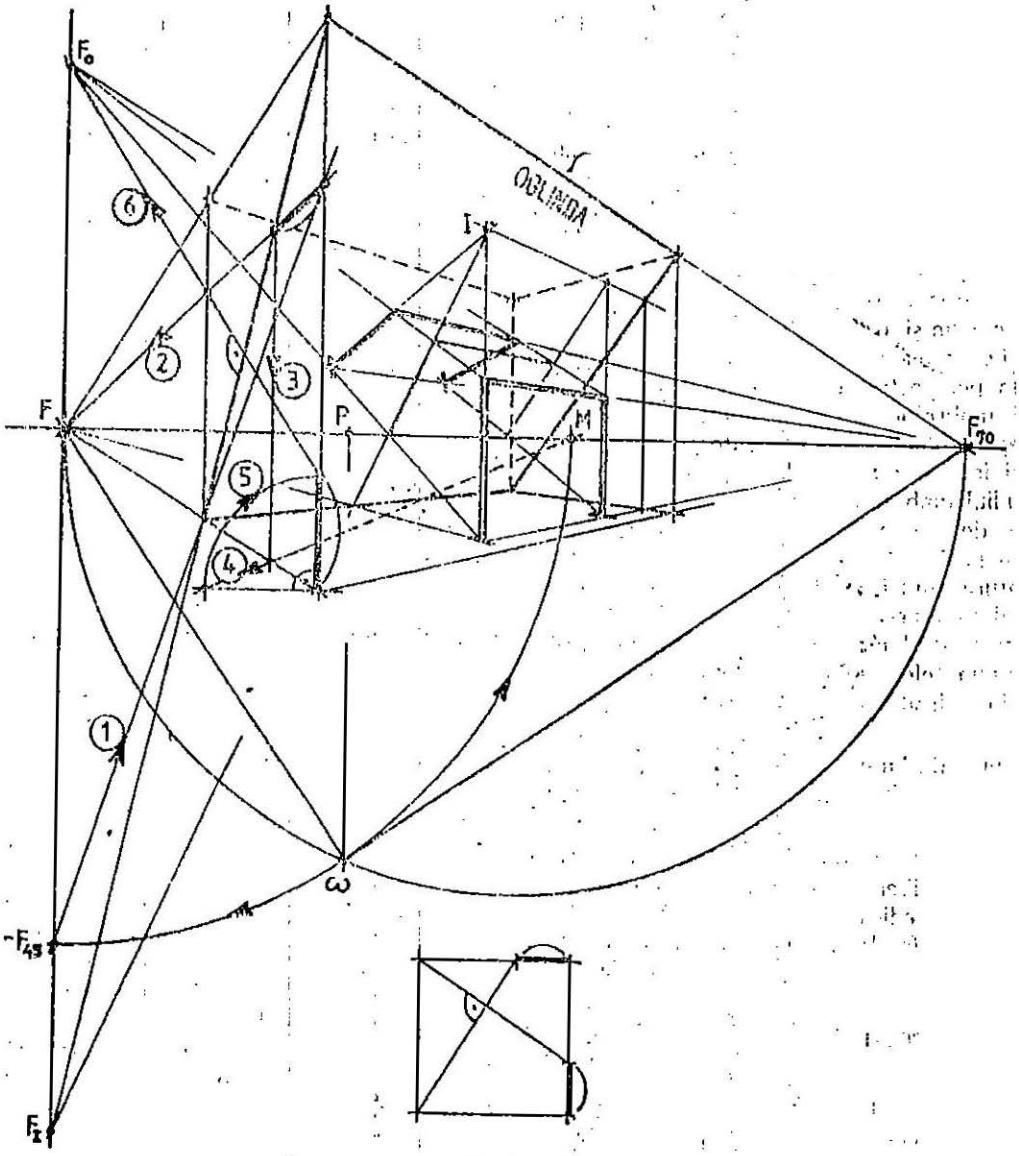


fig. 15.3.12

ta de fugă ce trece prin P. Se va construi simetricul verticalei în planul ei de capăt (care este perpendicular pe oglindă). Se intersectează acest plan de capăt vertical cu oglinda și se construiește simetricul (în perspectivă) față de dreapta de intersecție.

OGLINDA ÎNCLINATĂ OARECARE

Pentru a ușura rezolvarea acestei probleme se consideră oglinda drept planul diagonal al unei prisme drepte dreptunghiulare (fig. 15.3.12). Simetricul verticalei se va afla în planul ei vertical, care are ca dreaptă de fugă verticala ce trece prin punctul F. Acest plan este perpendicular pe oglindă. Pe fața stîngă a prismei se va afla direcția perpendiculară pe oglindă. Pe această față se construiește un pătrat și se procedează ca într-o proiecție ortogonală, folosind punctul — F_{45} și punctul de măsură M. Punctul de fugă al acestei direcții perpendiculare se află pe dreapta de fugă a fețelor verticale ale prismei, ce trece prin punctul F. Apoi se intersectează cu oglinda planul ce trece prin verticală și este perpendicular pe oglindă. Față de dreapta de intersecție, se construiește în perspectivă simetricul verticalei.

15.4. TRASAREA UMBRELOR ÎN PERSPECTIVĂ

GENERALITĂŢI

Umbrele în perspectivă întregesc senzaţia de relief şi adîncime, iar în combinaţie cu elementele de perspectivă aeriană contribuie la redarea unei imagini mai vii a aspectelor spaţiale. Pentru a uşura înţelegerea trasării umbrelor în perspectivă, studiul teoretic trebuie dublat de perspectiva de observaţie, cum şi în desenul după natură de foarte multe ori se face apel la aspectul teoretic al acestui studiu. În perspectiva de arhitectură cunoaşterea traseului umbrelor are o importanţă deosebită, atît în reprezentarea corectă a viitoarelor construcţii, cît şi în însuşi procesul de proiectare a lor. Deci, studiul umbrelor nu este un scop în sine, ci un mijloc de redare a formei şi a proporţiilor obiectului proiectat.
După natura sursei de lumină studiul umbrelor îmbracă două aspecte:
— cînd sursa de lumină este la distanţă finită, rezultă aşa-numitele umbre „la lumînare" sau „la bec" şi sînt folosite mai ales în perspectiva de interior;
— cînd sursa de lumină este considerată la infinit, rezultă umbrele „la soare" folosite în perspectiva de exterior.
Trasarea umbrelor în perspectivă este o problemă de perspectivă liberă, ce constă în intersecţii de drepte cu plane, adică intersecţiile dintre razele de lumină cu suprafeţele diferitelor obiecte.

SOARELE ÎN PERSPECTIVĂ

Pentru a uşura studiul trasării umbrelor în perspectivă se va aproxima soarele cu un punct situat la infinit. După cum s-a mai arătat, soarele poate fi reprezentat în tabloul de perspectivă în raport cu linia orizontului. Fiind socotit un punct la infinit, se va reprezenta soarele printr-un punct ce are proiecţia pe linia orizontului. În raport cu observatorul, soarele poate ocupa pe bolta cerească trei poziţii:
— soarele în faţa observatorului — soare real - se reprezintă în tabloul de perspectivă deasupra liniei orizontului (fig. 15.4.1, a);
— soarele în spatele observatorului — soare virtual — se reprezintă în tabloul de perspectivă sub linia orizontului (fig. 15.4.1, b);
— soarele lateral — în planul neutru — nu are reprezentare în tabloul de perspectivă, razele de lumină se iau paralele cu o direcţie aleasă (fig. 15.4.1, c).
În tabloul de perspectivă soarele mai poate fi reprezentat la răsărit sau la apus, cînd se confundă cu proiecţia sa pe linia orizontului (fig. 15.4.1, d).

UMBRA LA SOARE A PUNCTULUI ŞI A DREPTEI

Pentru a afla umbra punctului pe planul orizontal se intersectează raza de soare ce trece prin punctul respectiv, cu proiecţia ei ce trece prin proiecţia punctului (fig. 15.4.2). În acelaşi mod se află umbra verticalei. Din experienţa trăită cît şi din figura 15.4.2 se observă că umbra este de partea opusă soarelui, astfel că la un soare real umbra vine către privitor, iar la un soare virtual umbra se duce în profunzime. De asemenea, este cunoscut faptul că lungimea umbrei este în funcţie de înălţimea soarelui pe boltă. Cu cît soarele este mai sus pe boltă, cu atît umbra verticalei este mai scurtă. La un soare virtual umbra verticalei este cuprinsă toată în cîmpul vizual, indiferent de înălţimea soarelui pe boltă. În cazul soarelui real, umbra verticalei este cuprinsă în întregime în cîmpul vizual

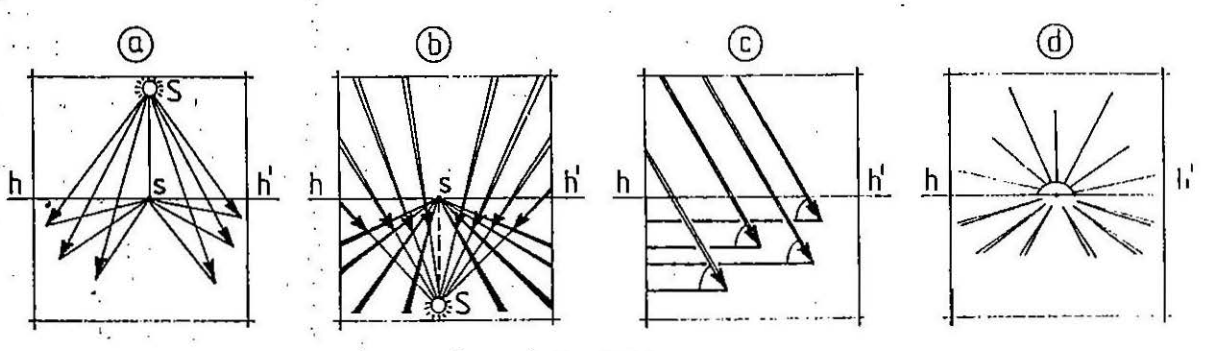


fig. 15.4.1

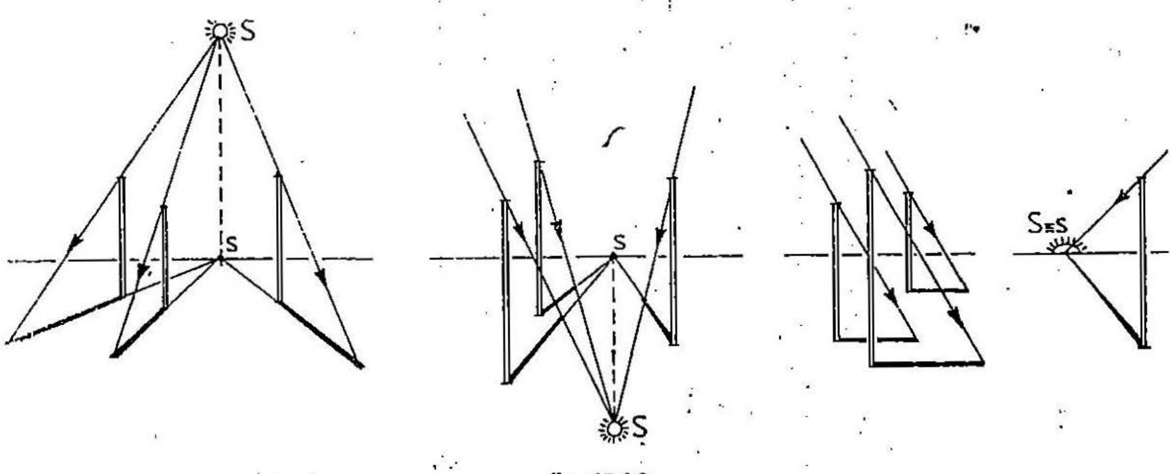


fig. 15.4.2

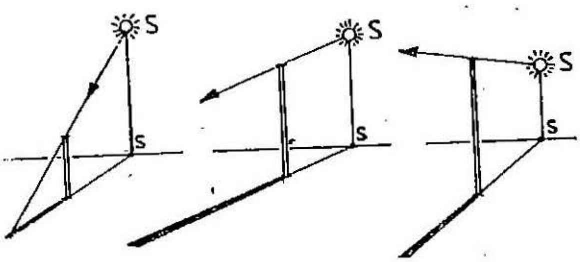


fig. 15.4.3

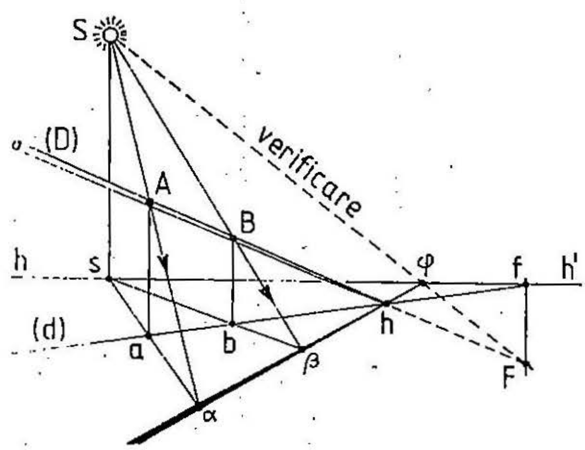


fig. 15.4.4

numai dacă soarele este foarte sus în raport cu înălțimea ei (fig. 15.4.3). Cunoscînd umbrele a două puncte se află umbra dreptei ce trece prin cele două puncte (fig. 15.4.4). Se observă că umbra pleacă din punctul de intersecție h al dreptei cu planul orizontal. Punctul φ este umbra punctului de fugă F al dreptei și se găsește pe linia orizontului unind soarele cu punctul de fugă F. Umbra punctului de fugă φ este necesară în cazul construirii umbrelor mai multor drepte paralele în spațiu și care sînt concurente în punctul F (fig. 15.4.5). Dreapta de nivel este concurentă cu umbra ei în punctul de fugă F. Deci pentru a construi umbra dreptei de nivel este suficientă construcția unui singur punct de pe ea (fig. 15.4.6). De aici rezultă construcția umbrelor mai multor verticale coplanare de aceeași înălțime (fig. 15.4.7). Fiecare punct de pe dreapta de nivel împreună cu proiecția lui pe planul orizontal determină cîte o verticală de aceeași înălțime. Deci, extremitățile umbrelor acestor verticale se găsesc pe o dreaptă concurentă în punctul de fugă F al dreptei de nivel, determinată de extremitățile acestor verticale. Pornind de la umbra pe planul orizontal se poate determina

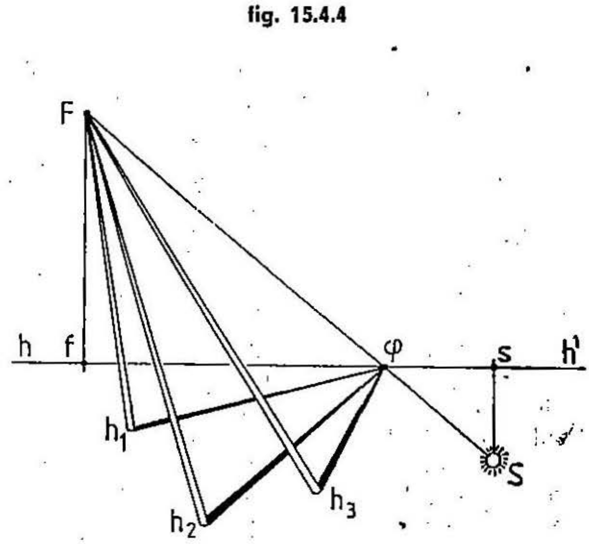


fig. 15.4.5

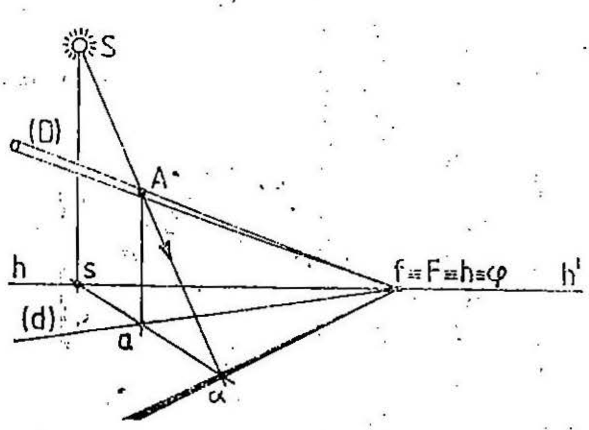


fig. 15.4.6

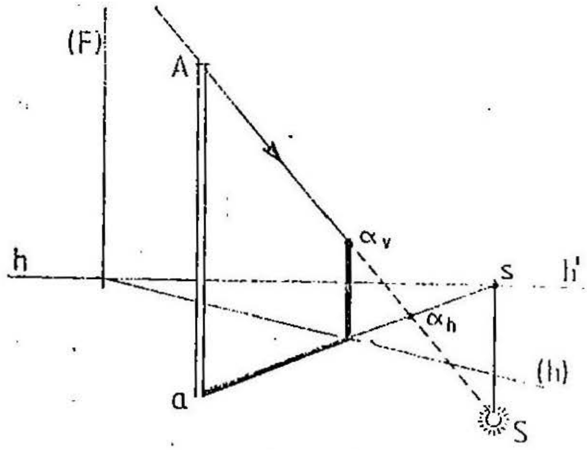


fig. 15.4.8

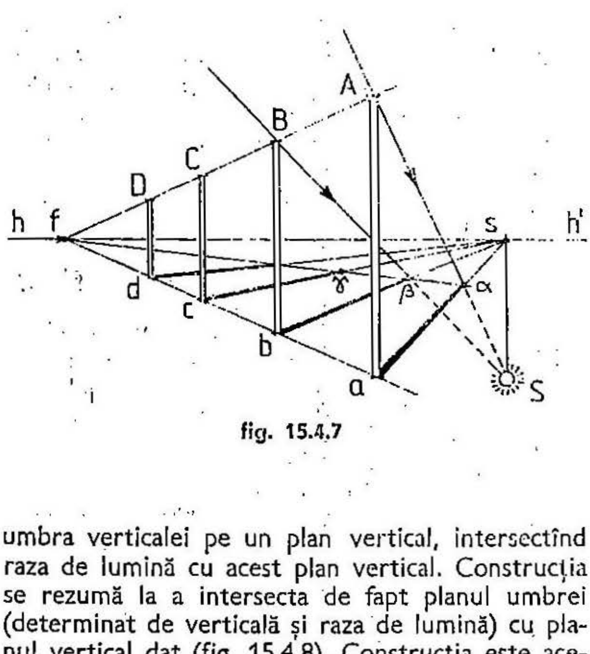


fig. 15.4.7

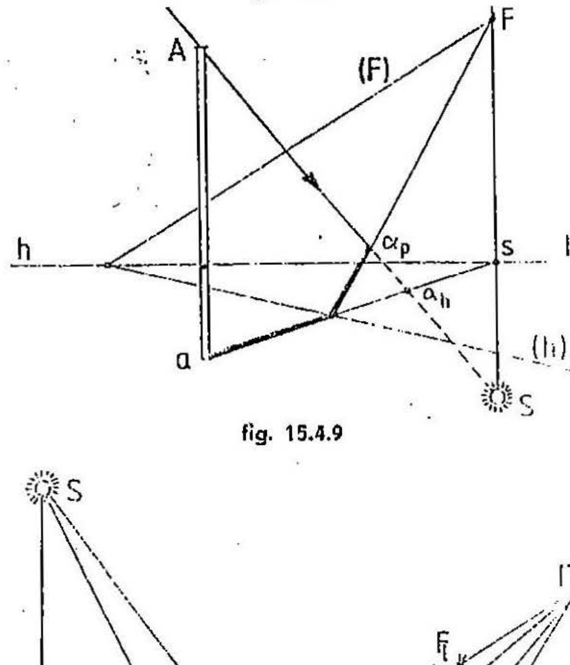


fig. 15.4.9

umbra verticalei pe un plan vertical, intersectînd raza de lumină cu acest plan vertical. Construcţia se rezumă la a intersecta de fapt planul umbrei (determinat de verticală şi raza de lumină) cu planul vertical dat (fig. 15.4.8). Construcţia este aceeaşi şi în cazul umbrei verticalei pe un plan oarecare (fig. 15.4.9).

Să se deseneze în perspectivă umbrele lăsate de stîlpii de iluminat pe o stradă în pantă. Problema este deci de a construi umbrele unor verticale pe un plan înclinat (fig. 15.4.10). Pentru a uşura rezolvarea acestei probleme se alege un stîlp chiar pe dreapta de intersecţie dintre planul înclinat şi planul orizontal. Umbra acestui stîlp (Aa) se determină intersectînd planul razelor de lumină cu planul înclinat dat. Umbra pe planul înclinat a acestui stîlp are ca punct de fugă punctul Φ, ce se găseşte pe dreapta de fugă a planului înclinat, la intersecţia cu verticala coborîtă din S. Punctul Φ este

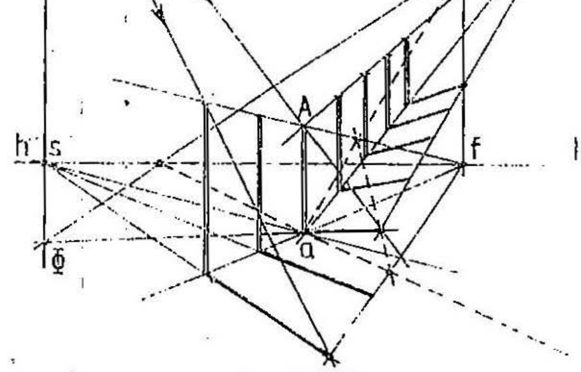


fig. 15.4.10

punctul de fugă al umbrelor acestor verticale pe planul înclinat dat.

Să se construiască umbrele unor drepte de nivel pe un plan vertical în cazul unui soare real. Umbra plecînd din punctul de intersecţie al dreptei de nivel cu planul vertical dat, problema se reduce la a intersecta raza de lumină, ce trece prin extremitatea dreptei de nivel, cu acest plan vertical (fig. 15.4.11). Se observă că umbrele celor două drepte de nivel sînt concurente în punctul Φ, ce se găseşte pe dreapta de fugă a planului vertical, la intersecţia cu dreapta FS (dreapta de fugă a planelor formate de razele de lumină şi de dreptele de nivel respective). Deci, o altă rezolvare a problemei constă în a afla punctul Φ — punctul de fugă al umbrelor. Această rezolvare se poate aplica şi în cazul unui soare virtual (fig. 15.4.12). În cazul soarelui real, umbrele sînt divergente către observator, iar în cazul soarelui virtual, umbrele sînt convergente către profunzime.

Astfel se poate construi foarte uşor umbra balconului pe faţadă (fig. 15.4.13).

POZIŢIILE SOARELUI ÎN RAPORT CU PERSPECTIVA OBIECTULUI

Pentru a trasa umbrele în perspectivă trebuie să se aleagă una din cele trei poziţii principale în care se poate găsi soarele în raport cu privitorul şi deci în raport cu obiectul considerat, deoarece distanţa dintre obiect şi privitor se consideră neglijabilă faţă de distanţa de la soare la obiect. Astfel, soarele poate fi real, virtual sau lateral (în planul neutru). Alegerea uneia din aceste poziţii se face în raport cu scopul urmărit, astfel ca unele feţe să fie luminate şi altele umbrite sau ca umbra purtată a obiectului să aibă o anumită direcţie şi întindere pe planul orizontal sau pe alte obiecte.

Odată aleasă poziţia soarelui sînt determinate feţele umbrite şi feţele luminate, deci separatoarea de umbră şi lumină. Separatoarea de umbră şi lumină este cea care aruncă umbra purtată (fig. 15.4.14).

Faţă de obiectul considerat, soarele poate fi ales astfel ca una din feţele verticale să fie luminată şi

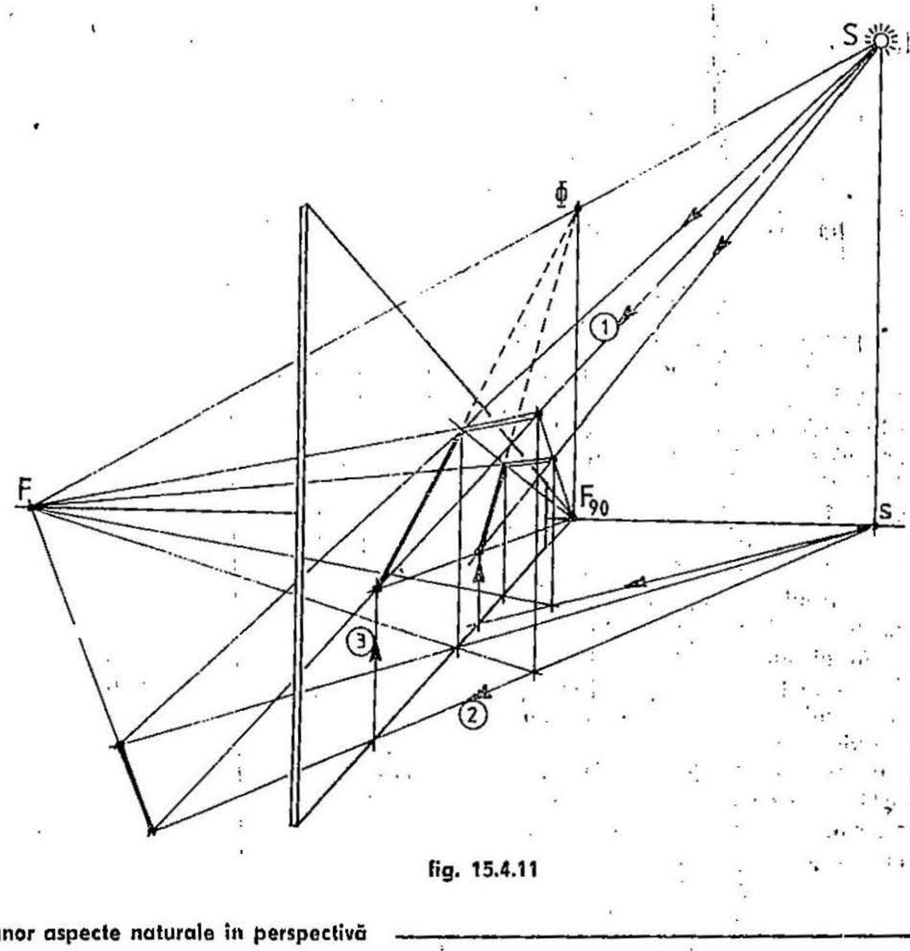


fig. 15.4.11

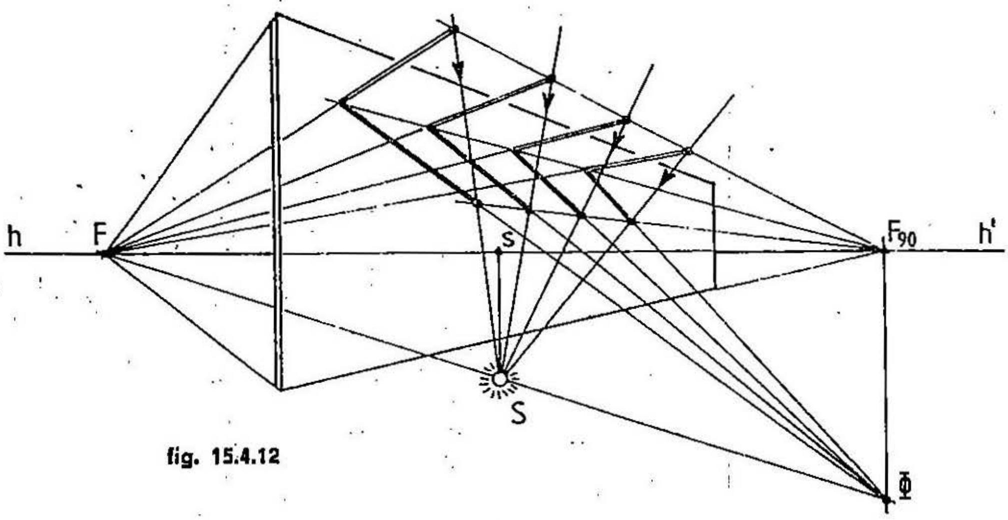


fig. 15.4.12

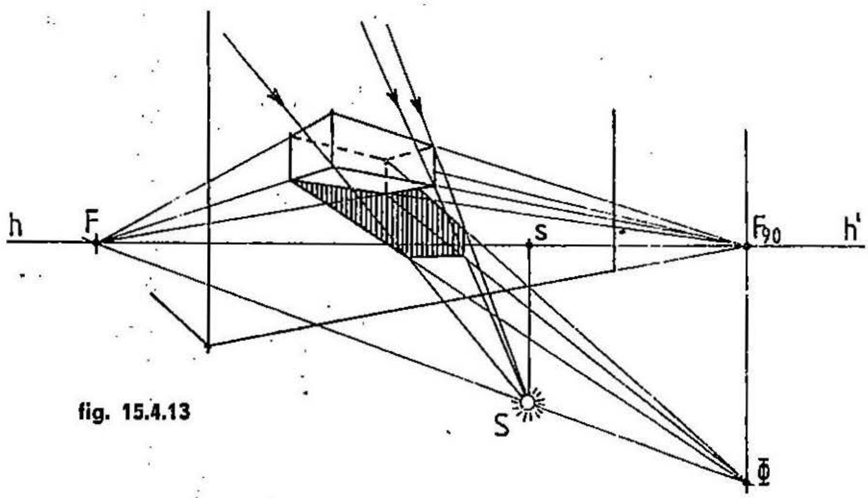


fig. 15.4.13

cealaltă umbrită — poziția soarelui este în afara punctelor de fugă — soare real (fig. 15.4.14) și soare virtual (fig. 15.4.15). Ambele fețe ale obiectului sînt luminate dacă soarele este virtual (în spatele observatorului) și se găsește între punctele de fugă (fig. 15.4.16). Dacă soarele se găsește între punctele de fugă, dar în fața observatorului (soare real) ambele fețe vizibile ale obiectului sînt în umbră proprie (fig. 15.4.17).
Pentru un soare în planul neutru, umbrele verticalelor sînt paralele cu linia orizontului. Soarele poate fi ales în planul neutru numai în cazul perspectivei la două puncte de fugă (fig. 15.4.18). Se observă că, în cazul unui soare real, umbra purtată a verticalei vine către privitor, iar în cazul soarelui virtual, umbra verticalei se duce către profunzime. Această observație ajută la rezolvarea problemei inverse, cînd se alege umbra și trebuie să se determine poziția soarelui; astfel : cînd umbra verticalei este paralelă cu linia orizontului, soarele este în planul neutru, cînd umbra este deasupra acestei paralele la linia orizontului soarele este virtual, cînd umbra este sub această paralelă soarele este real (fig. 15.4.19).
Pentru umbra proprie a obiectului se disting șase poziții importante ale soarelui (fig. 15.4.20): patru în afara punctelor de fugă (două pentru soare real și două pentru soare virtual, cînd rezultă o față luminată și una umbrită), una între punctele de fugă, cînd la soarele real rezultă ambele fețe vizibile întunecate, și alta la soare virtual (tot între punctele de fugă), cînd ambele fețe vizibile sînt luminate.
În cazul soarelui real, umbra purtată depinde de înălțimea acestuia pe boltă. Dacă înălțimea soarelui este egală sau mai mică decît dimensiunea în perspectivă a uneia din muchiile verticale ale obiectului, umbra acesteia pe planul orizontal nu

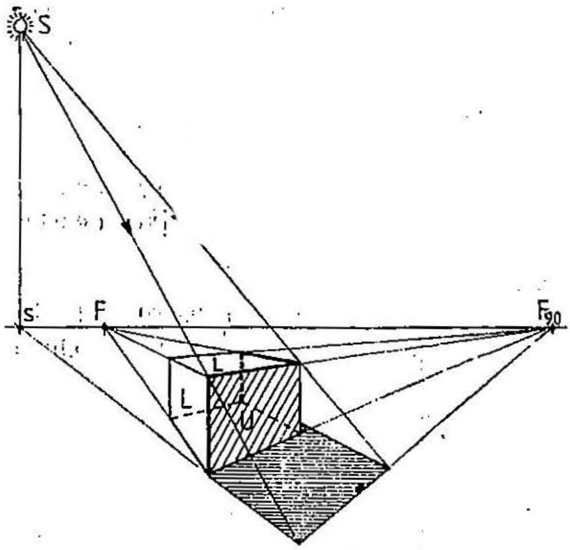


fig. 15.4.14

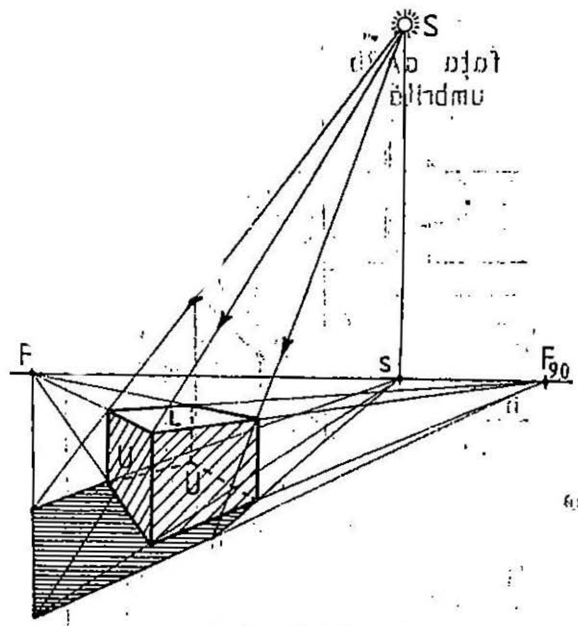


fig. 15.4.17

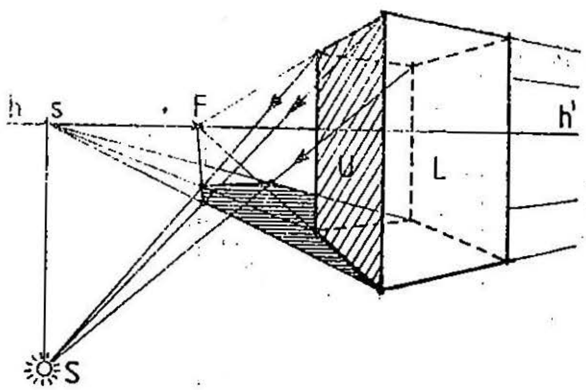


fig. 15.4.15

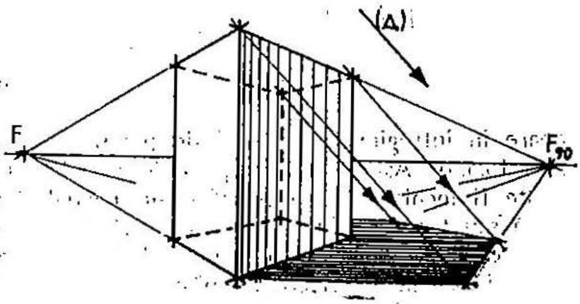


fig. 15.4.18

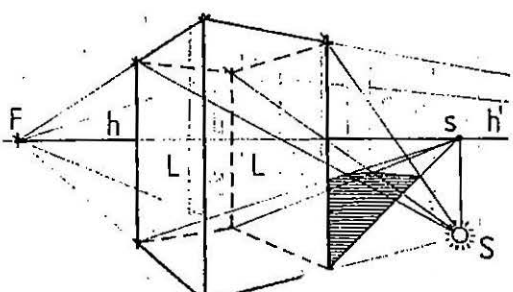


fig. 15.4.16

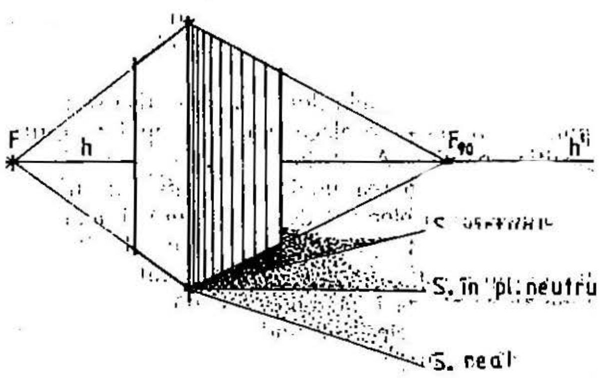


fig. 15.4.19

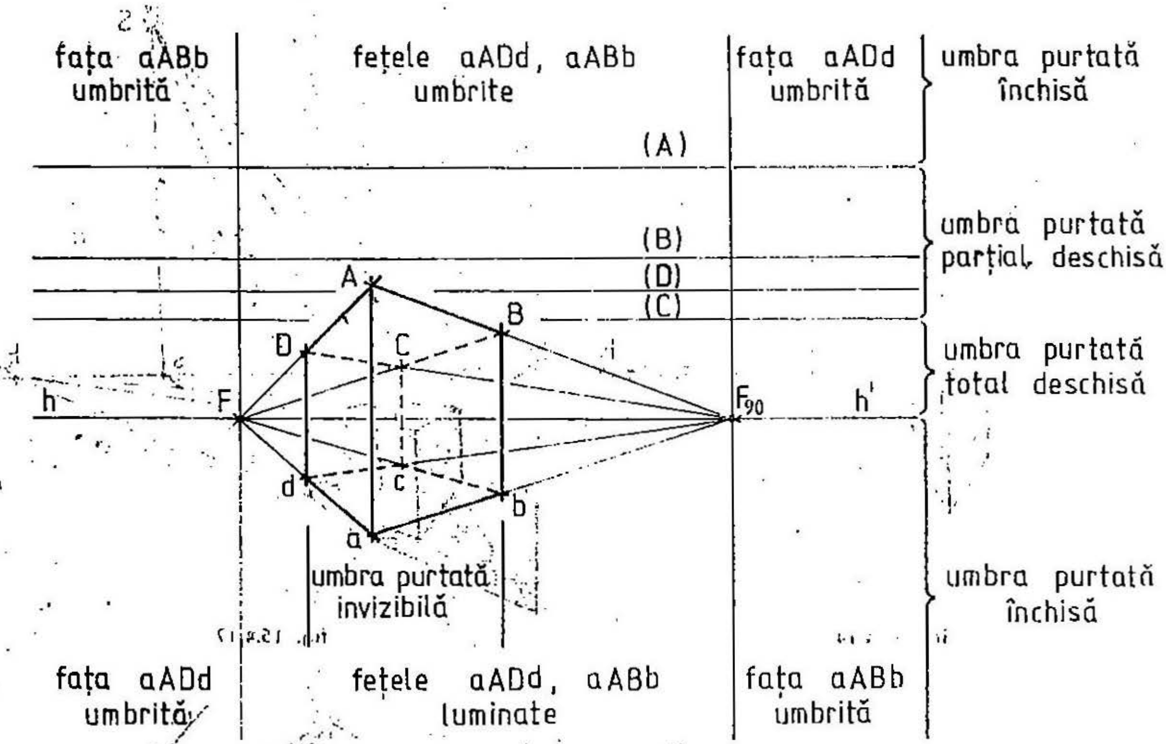


fig. 15.4.20

apare în întregime în tabloul de perspectivă (v. fig. 15.4.3). Astfel, umbra purtată a obiectului poate fi închisă în fața privitorului, parțial deschisă sau total deschisă, după cum înălțimea soarelui este mai mare sau mai mică decît înălțimea fiecărei muchii a obiectului, măsurate de la linia orizontului în sus (fig. 15.4.20).

În concluzie, pentru soarele real, înălțimea acestuia trebuie să fie suficient de mare pentru ca umbrele purtate să se închidă în fața privitorului și să nu fie prea lungi. Pentru soarele virtual nu se cere o asemenea condiție, dar pentru ca umbra purtată să fie vizibilă, el trebuie să fie luat în afara verticalelor de contur aparent al obiectului pus în perspectivă.

Problema trasării umbrelor în perspectivă se poate pune și invers — se alege umbra și apoi se caută poziția soarelui. Acest lucru apare necesar cînd se dorește obținerea unui anumit efect de umbră și lumină la un element de arhitectură și apoi trebuie să se traseze umbrele și pentru celelalte elemente. În practica perspectivei de arhitectură este bine să se aleagă întîi umbra dorită și apoi să se determine soarele. Alegînd întîi soarele, s-ar putea să se ajungă la efecte nedorite de umbră și lumină, efecte ce nu ar fi în avantajul obiectului pus în perspectivă. În figurile 15.4.21 și 15.4.22 s-a

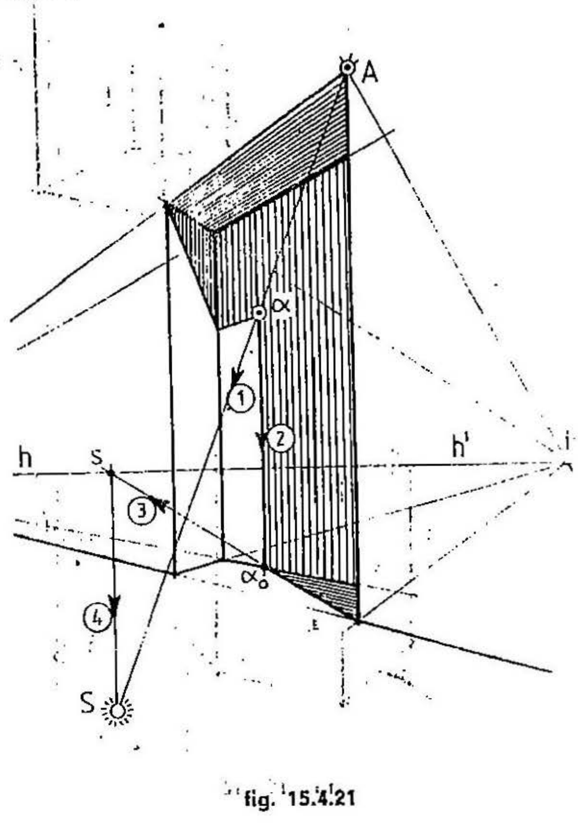


fig. 15.4.21

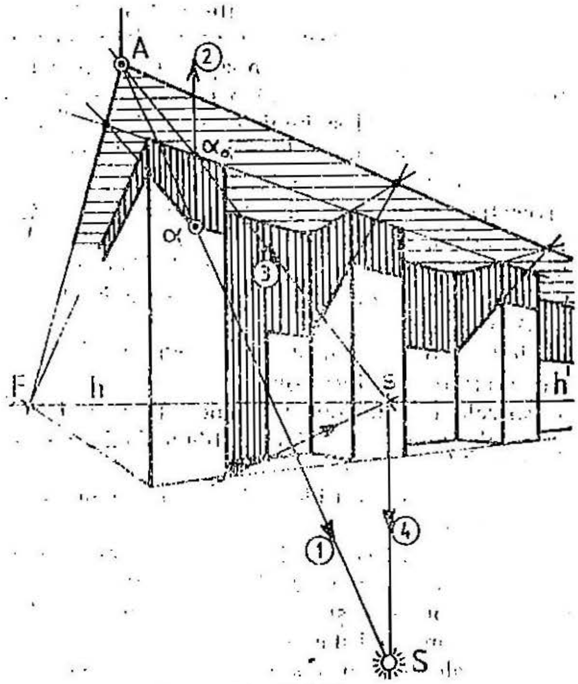


fig. 15.4.22

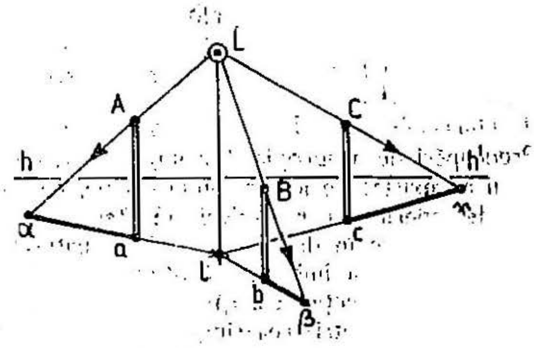


fig. 15.4.23

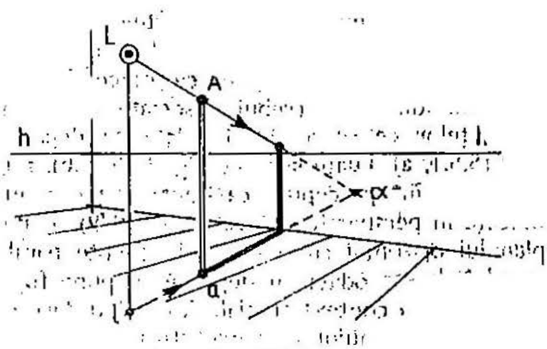


fig. 15.4.24

ales întîi umbra punctului A și apoi a fost det minat soarele în tabloul de perspectivă.

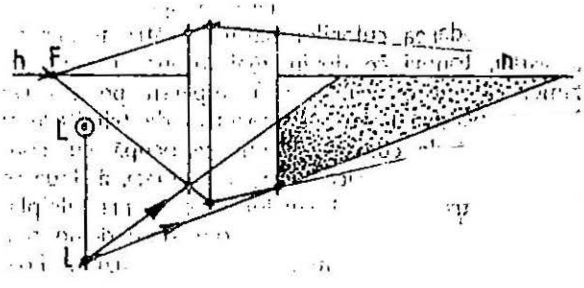
UMBRELE LA LUMINĂ ARTIFICIALĂ

Sînt cunoscute și sub denumirea de umbre „la lumînare" sau „la bec". Acestea sînt socotite surse de lumină punctuale la distanță finită. În tabloul de perspectivă liberă, o sursă de lumină punctuală la distanță finită se reprezintă printr-un bipunct (L, l), astfel că proiecția sursei pe planul orizontal (l) nu se mai găsește pe linia orizontului. În figura 15.4.23 se observă că umbrele unor verticale sînt concurente în proiecția sursei de lumină și sînt orientate divergent față de aceasta. Umbra pe plan vertical se determină ca și în cazul umbrei la soare — se determină întîi umbra pe planul orizontal și apoi se face intersecția cu planul vertical (fig. 15.4.24).

Spre deosebire de umbra la soare, în cazul umbrei la lumina artificială distingem două situații foarte frecvente:

— sursa de lumină are o cotă mai joasă decît înălțimea obiectului, deci umbra merge pînă la infinit (fig. 15.4.25);

— sursa de lumină se găsește deasupra obiectului și proiecția ei cade în interiorul bazei, deci toate muchiile feței superioare lasă umbră (fig. 15.4.26). Problema se complică foarte mult în cazul luminii artificiale cu mai multe surse de lumină.



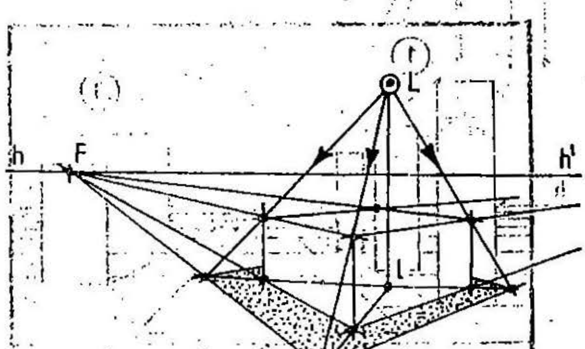


fig. 15.4.26

15.5. PERSPECTIVA AERIANĂ

GENERALITĂŢI

Preocupări de a apropia desenul de viziunea realului au existat de foarte multă vreme, dar odată cu descoperirea perspectivei, în Renaştere, studiul de redare în desen a aspectelor naturale s-a intensificat şi s-a îmbogăţit continuu. S-a observat că simpla proiecţie conică (perspectiva liniară) bazată pe geometrizarea simţului vederii nu este suficientă pentru a apropia desenul perspectiv de imaginea realităţii. Cele trei atribute ale perspectivei cu ajutorul cărora este realizată senzaţia de profunzime — micşorarea obiectelor odată cu depărtarea, concurenţa paralelelor ce schimbă forma obiectului, suprapunerea obiectelor aflate în plane diferite — trebuie asociate cu tratarea suprafeţelor ce se modifică odată cu depărtarea (fig. 15.5.1, a). Luate separat (fig. 15.5.1, b), aceste elemente sînt percepute ca figuri plane şi nu ca obiecte în perspectivă (*R. Arnheim*, 1979). Tratarea planului orizontal cu o reţea de drepte paralele, ce se îndesesc odată cu depărtarea, pune figurile plane într-un context spaţial. Această tratare diferenţiată a planului în perspectivă se poate face prin haşură, tentă, puncte sau culoare. În tratatul său de pictură Leonardo da Vinci arată că depărtarea poate fi redată şi fără perspectiva liniară, prin degradarea culorilor naturale către tonuri de albastru, tonuri ce devin mai intense în profunzime. Leonardo da Vinci a împărţit perspectiva în: perspectivă liniară, perspectivă de trimitere şi perspectivă de culoare. Prima se ocupă cu construcţia pur geometrică (care s-a studiat), a doua se referă la tratarea contururilor, care în primele planuri sînt mai precise şi în profunzime devin mai neclare, iar a treia tratează efectul de fuziune cromatică într-o singură tonalitate albăstrie, efect ce se verifică în peisaj prin perspectiva de observaţie. Ultimile pot fi cuprinse în aşa-numita „perspectivă aeriană". S-a arătat că perspectiva aeriană se ocupă cu degradarea luminii, umbrei şi a culorii în funcţie de distanţă şi de reflexe. Problema culorii nu face obiectul studiului nostru.

Proiecţia conică, pe care se bazează construcţia perspectivei, pierde o serie de efecte şi valori în interiorul zonelor de lumină sau de umbră, efecte şi valori care se pot observa şi reda în desenul după natură.

Studiul de pînă acum al perspectivei s-a bazat pe trei ipoteze simplificatoare:

— soarele este un punct luminos, situat la infinit;
— razele luminoase sînt rectilinii indiferent de mediul prin care trec;
— obiectul este considerat izolat şi într-un spaţiu vid.

Ca rezultat al acestor ipoteze, se obţin umbre perfect conturate şi negre la fel de intens pe toată suprafaţa, precum şi zone egal luminate, indiferent de forma şi distanţa obiectului faţă de observator. Realitatea nu confirmă toate acestea şi de aceea se corectează ipotezele simplificatoare cu o serie de elemente rezultate din experienţa perspectivei de observaţie, şi anume:

— soarele nu este un punct la infinit, ci o sferă situată la distanţă cunoscută şi de un diametru cunoscut; aceasta are ca rezultat introducerea efectului de penumbră;
— în atmosferă, razele de lumină nu sînt riguros rectilinii, ci se deformează în funcţie de densitatea mediului; acest fenomen nu produce modificări esenţiale, ci doar o vibraţie în delimitarea geometrică a umbrelor;
— obiectul nu este izolat şi într-un spaţiu vid, ci el este situat într-un mediu ambiant înconjurat de atmosferă, de la care primeşte (pe lîngă lumina

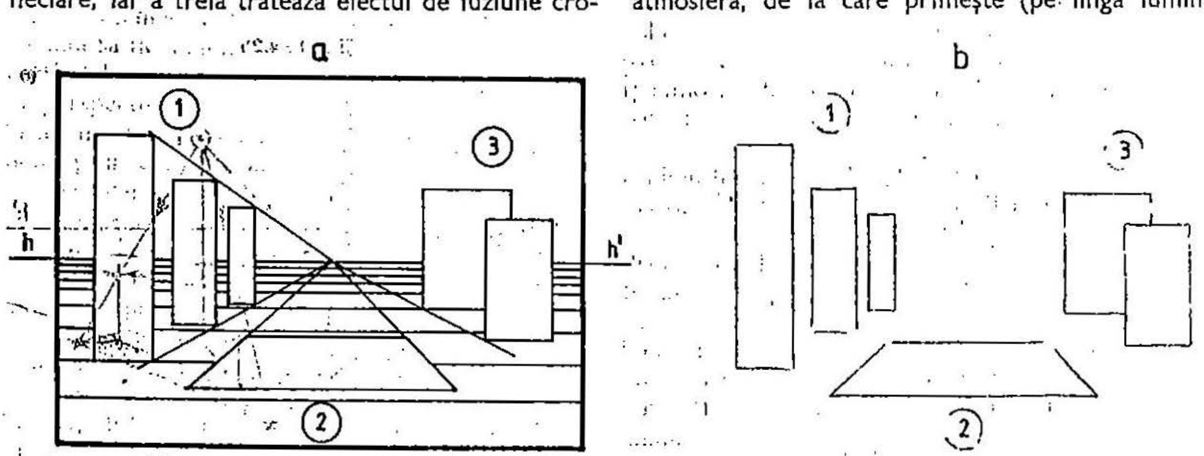


fig. 15.5.1

directă de la soare) o lumină indirectă, reflectată sau difuză.

Obiectele înconjurătoare și atmosfera devin surse de lumină care nuanțează umbrele și zonele luminate ale obiectului. În studiul perspectivei aeriene trebuie să se ia în considerație și caracteristicile obiectului — forma, materialul și culoarea, în funcție de care obiectele puse în aceleași condiții se comportă diferit.

PENUMBRELE ÎN PERSPECTIVĂ

În perspectivă soarele are forma unei elipse foarte apropiată de cerc, ale cărui dimensiuni depind de poziția lui în spațiu, de poziția observatorului și de distanța punctului de vedere față de tablou. O sursă de lumină ce nu este punctiformă și se găsește la o distanță finită de obiect are ca efect *fenomenul de penumbră*. Penumbrele sînt acele umbre mai puțin intense care mărginesc umbrele proprii și purtate ale obiectului și care fac ca delimitările acestor zone să fie mai puțin precise.

Această sursă de lumină determină cu obiectul două conuri de lumină limită, circumscrise celor două suprafețe — sursa și obiectul (fig. 15.5.2).

Aceste două conuri sînt înfășurătoarele tuturor conurilor de lumină determinate de punctele sursei luminoase cu obiectul considerat. Un con are vîrful S_1 dincolo de sursa de lumină, iar celălalt are vîrful S_2 între surse și obiect. Totdeauna conul S_1 are unghiul la vîrf mai mic decît conul S_2. Cele două conuri determină pe suprafața obiectului două curbe de contact — Γ_1 mai depărtată de sursă și Γ_2 mai apropiată de ea. Aceste curbe de contact determină pe suprafața obiectului trei zone. Punctele posterioare curbei Γ_1 (în raport cu sursa) nu primesc nici o rază de lumină, formînd umbra proprie a obiectului. Curba Γ_1 este separatoarea de umbră proprie. Punctele anterioare curbei Γ_2 care se găsesc în zona îndreptată spre sursă văd integral sursa. Aceasta este zona luminată a obiectului. Între curbele de contact Γ_1 și Γ_2 este zona de penumbră proprie, zonă din care se vede doar parțial sursa de lumină. Curba Γ_2 este separatoarea de penumbră proprie.

Pe un plan de proiecție cele două conuri de lumină descriu două curbe: curba γ_1, ce delimitează umbra purtată (în această zonă obiectul ascunde total sursa de lumină), și curba γ_2, ce delimitează în exteriorul lui γ_1 zona de penumbră purtată, din care se vede doar parțial sursa de lumină.

Pentru a ușura studiul se alege în perspectivă imaginea circulară a soarelui (S, s) în spațiul real, unde AB și CD sînt două diametre perpendiculare (fig. 15.5.3). Rezultă că dacă umbra punctului M

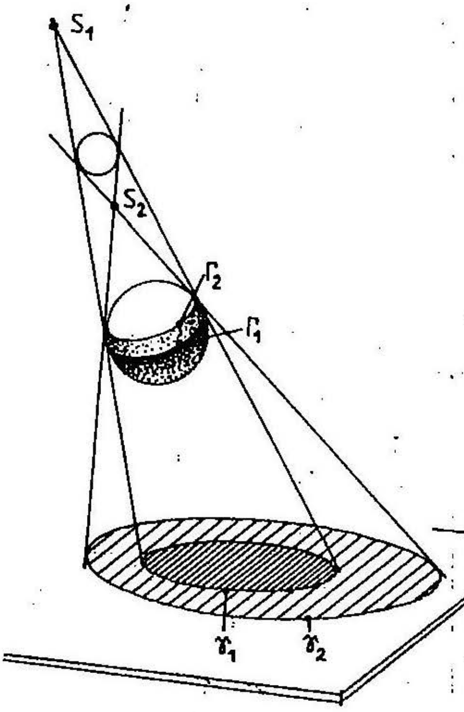


fig. 15.5.2

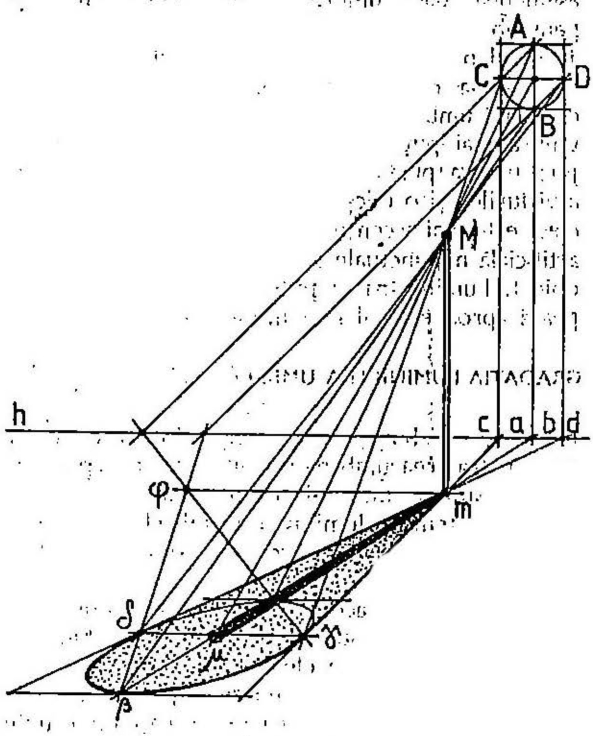


fig. 15.5.3

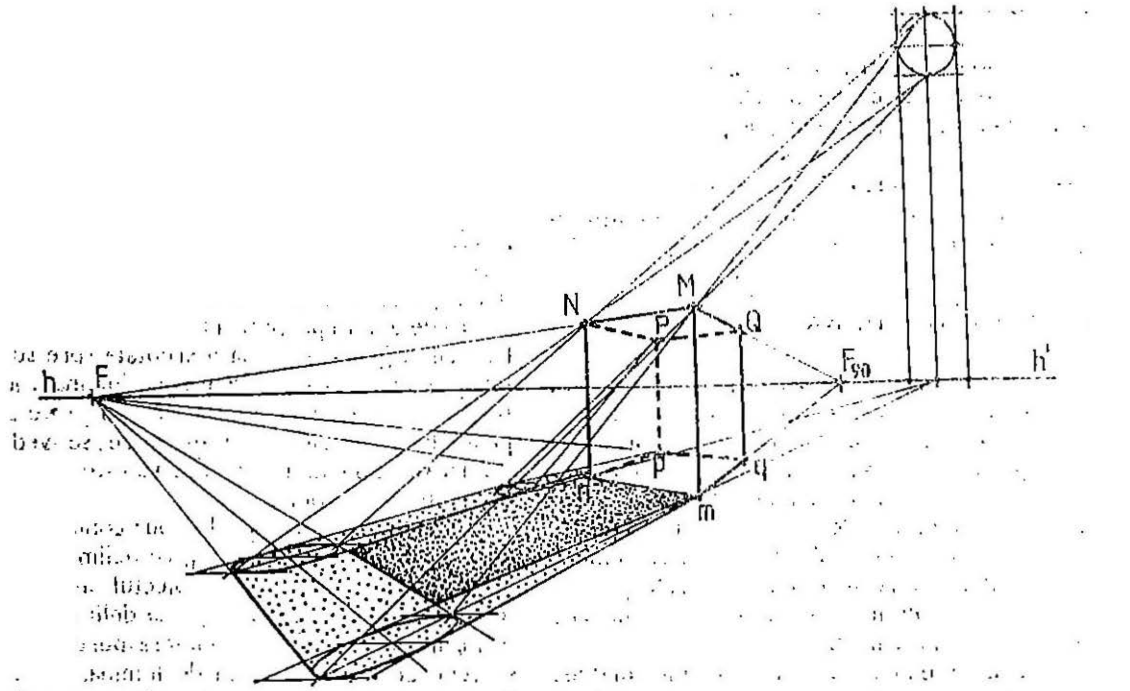


fig. 15.5.4

este punctul μ, penumbra lui este aria elipsei corespunzătoare cercului ABCD în perspectivă. De asemenea, dacă umbra verticalei Mm este $m\mu$, penumbra ei este $m\gamma\beta\delta m$.

În cazul prismei drepte dreptunghiulare se repetă construcția din figura 15.5.3 pentru fiecare vîrf care lasă umbră (fig. 15.5.4). Se observă o zonă de umbră mai puțin densă — penumbra, care înconjură umbra purtată. Apare un efect de rotunjire a vîrfurilor și o micșorare a umbrei purtate. Acest efect este mai accentuat în cazul surselor de lumină artificială nepunctuale și situate la distanțe mici de obiect. Lumina foarte puternică a soarelui estompează aproape total penumbra.

GRADAȚIA LUMINII ȘI A UMBREI

Pentru o mai bună redare a efectelor observate în natură, trasarea umbrelor prin proiecția conică se completează cu un studiu de modelare sau de gradație prin tente a luminii și a umbrelor proprii și purtate. Aceasta se realizează în desen prin tehnica „rendu"-ului.

Pentru a explica această tehnică de modelare a zonelor luminate sau umbrite ale unui obiect se face apel la o serie de elemente de *fotometrie.*

O sursă de lumină se caracterizează prin *intensitatea* ei I. Două surse de lumină de aceeași intensitate pot produce asupra ochiului efecte deosebite. O sursă de lumină se mai caracterizează și prin *lucirea* ei, adică prin intensitatea pe unitatea de suprafață. Zona luminată a unui obiect se caracterizează prin *iluminarea* ei E.

Iluminarea unei suprafețe într-un punct al ei este proporțională cu cosinusul unghiului (θ) *al razei incidente cu normala suprafeței în acel punct și invers proporțională cu pătratul distanței* (r) *a punctului la sursa de lumină:*

$$E = \frac{\cos\theta}{r^2}.$$

Rezultă că razele de lumină de egală incidență determină pe o suprafață puncte egal luminate, care formează *curbe de egală iluminare*. Două asemenea curbe de egală iluminare apropiate deter-

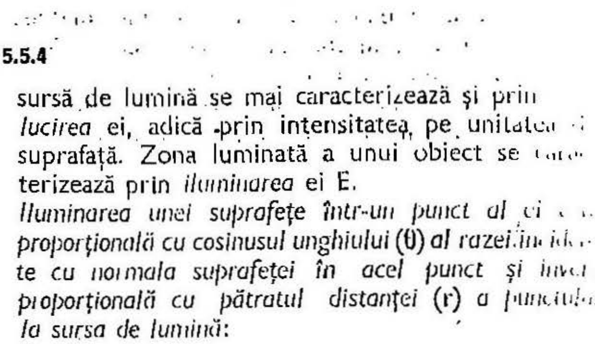


fig. 15.5.5

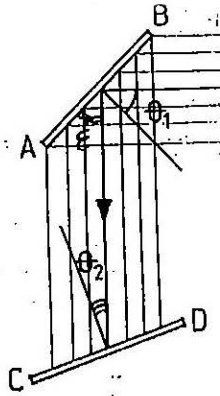
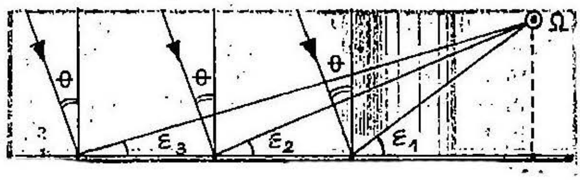
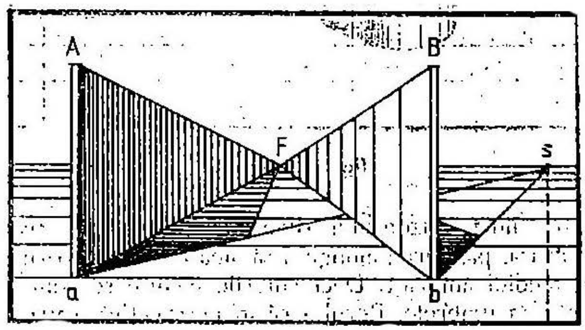


fig. 15.5.6





mină *zone egal luminate*. Acestea dau adevărata formă a obiectului (fig. 15.5.5). Fie un ecran AB care primește lumină directă de la soare și ecranul CD care primește lumină indirectă de la ecranul AB (fig. 15.5.6). Ecranul CD nu primește iluminarea proprie a ecranului AB, ci iluminarea lui în proiecție. Dacă un observator privește ecranul AB, primește de la acesta o *iluminare proiectată*, care depinde de unghiul de sub care este privit (ε) și de distanța de la care este privit ecranul. Se poate spune deci că iluminarea proiectată este proporțională cu proiecția suprafeței și invers proporțională cu pătratul distanței pînă la punctul de vedere.

Fie un plan orizontal luminat de soare sub unghiul θ. Fiecare punct A al planului orizontal produce punctului de vedere Ω o iluminare proiectată (fig. 15.5.7). Această iluminare descrește odată cu depărtarea punctului A și tinde către zero cînd A tinde către infinit. Deci, în perspectivă, iluminarea unui plan descrește către dreapta lui de fugă, tinzînd teoretic către zero. Acest fenomen se transpune în desenul perspectiv printr-o închidere a tentei sau o îndesire a hașurilor către linia orizontului. Experiența perspectivei de observație arată că umbrele — proprie și purtată — ale unui panou vertical se deschid către linia orizontului, ajungînd la iluminarea la care se închide un alt panou vertical luminat direct (fig. 15.5.8).

În tratatul său de perspectivă A. Gheorghiu dă exemplul unor panouri verticale colorate în două culori — jumătatea de sus într-o culoare închisă, iar cea de jos într-o culoare deschisă (fig. 15.5.9).



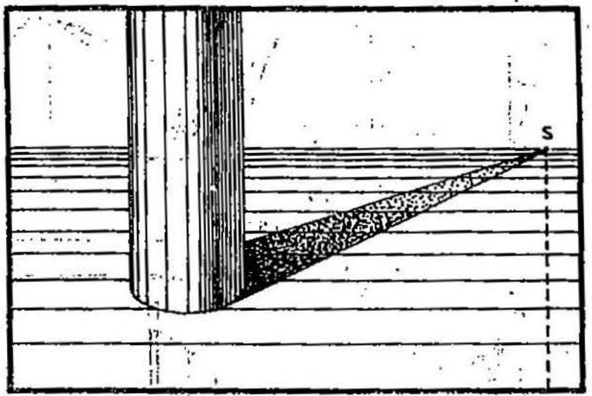


fig. 15.5.10

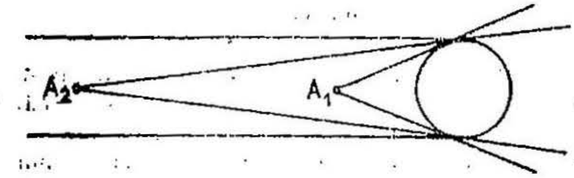


fig. 15.5.11

Către linia orizontului diferența de culoare se anulează, panourile ajungînd să aibă aceeași culoare cu mediul amplant. Deci culorile închise se comportă ca umbrele. Rezultă că în perspectivă, către linia orizontului, diferențele de tonuri se anulează, ajungîndu-se la o culoare unică și o iluminare uniformă, determinate de peisaj, de claritatea atmosferei și de poziția soarelui pe boltă.

Fie un cilindru vertical luminat de un soare virtual într-un caz și de un soare real în alt caz. În cazul soarelui virtual (fig. 15.5.10), umbra purtată se supune regulii enunțate, degradîndu-se, pînă ajunge să se piardă către linia orizontului. În cazul soarelui real (fig. 15.5.11), umbra purtată vine către observator și este mai închisă lîngă cilindru. Aici acționează alt fenomen — bolta cerească devine sursă de lumină difuză, care face ca umbra purtată să se degradeze către privitor. Punctul A_1, fiind mai aproape de cilindru, vede mai puțin din bolta cerească, de aceea este mai umbrit decît A_2. Suprapunînd cele două efecte — al depărtării și al luminii difuze atmosferice, se poate spune că umbrele purtate către linia orizontului se degradează mai repede decît cele purtate către observator. Atmosfera devenită sursă de lumină difuză degradează și umbra proprie a cilindrului din figura 15.5.10. Astfel, umbra proprie a cilindrului este mai deschisă către partea dreaptă, dînd naștere la un efect de contrast între zona luminată și cea de umbră proprie. Analizînd cazul a două sfere situate la distanțe diferite de un plan, se constată că umbra

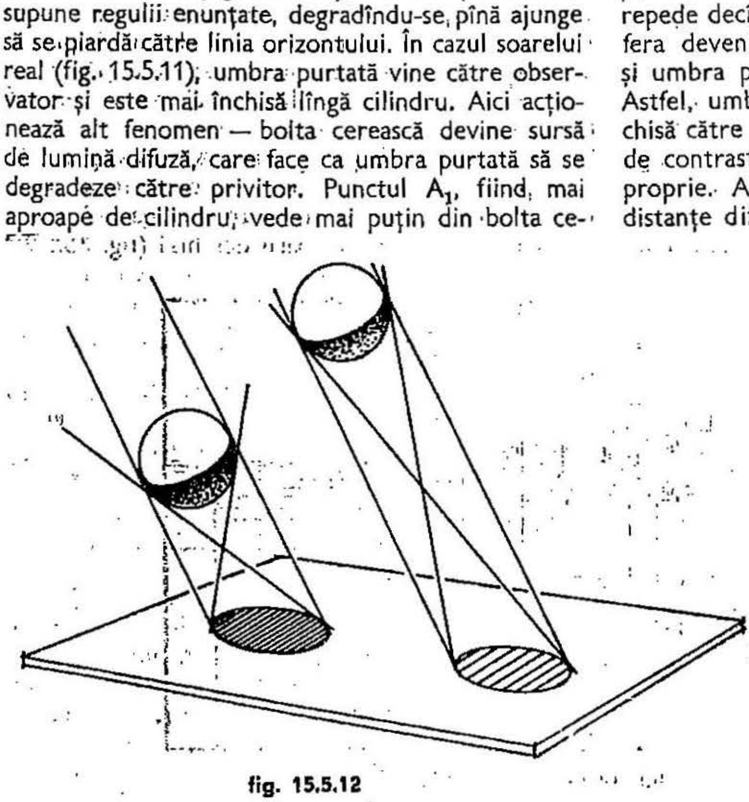


fig. 15.5.12

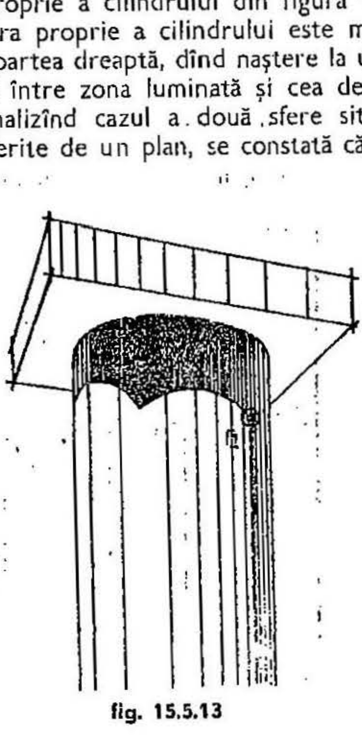


fig. 15.5.13

purtată pe planul mai apropiat este mai închisă decît umbra purtată pe planul mai depărtat (fig. 15.5.12).

Cînd sfera este mai aproape de planul pe care lasă umbră, ea acoperă mai mult din bolta cerească. Lumina difuză a bolţii cereşti degradează mai puternic umbra purtată, cînd sfera este mai departe de planul pe care lasă umbră. Planul la rîndul său devine sursă de lumină indirectă degradînd umbra proprie a sferei. Efectul este mai puternic, cînd sfera se află mai aproape de plan.

Rezultă deci că umbrele purtate se degradează pe măsură ce se depărtează de obiect, iar dacă obiectul atinge planul pe care lasă umbră, punctul de contact este cel mai închis punct al umbrei purtate.

S-a constatat, de asemenea, că umbrele proprii sînt mai deschise decît umbrele purtate.

Dacă un obiect lasă umbră peste un alt obiect (fig 15.5.13), această umbră purtată are zona ei cea mai închisă în vecinătatea zonei luminate şi se deschide pînă la punctul de pierdere (Q), cînd se contopeşte cu umbra proprie a obiectului.

MIJLOACE GRAFICE DE GRADARE A LUMINII ŞI A UMBREI

În desenul perspectiv gradaţia luminii şi a umbrei se realizează cu ajutorul haşurilor, tentelor şi punctelor.

Dacă se trasează pe un ecran alb o serie de benzi negre de lăţime n şi la distanţă a unele de altele (fig. 15.5.14), se constată că privite de la o anumită depărtare acestea se unifică într-o tentă uniformă cenuşie. Aceasta este *transparenţa* haşurii respective şi este determinată de raportul dintre albul suprafeţei şi totalul ei.

$$T_h = \frac{a}{n + a}.$$

Numărul de haşuri nu este luat la întîmplare, ci el este determinat de iluminarea suprafeţei, ţinîndu-se seama de unghiul sub care este privită acea suprafaţă şi de distanţa pînă la punctul de observaţie. În practică, transparenţa se la proporţională cu iluminarea acelei suprafeţe, iar tenta corespunzătoare se realizează prin haşuri negre. Albul reprezintă iluminarea directă, iar cantitatea de negru (în procente) din acea suprafaţă reprezintă degradarea iluminării suprafeţei respective.

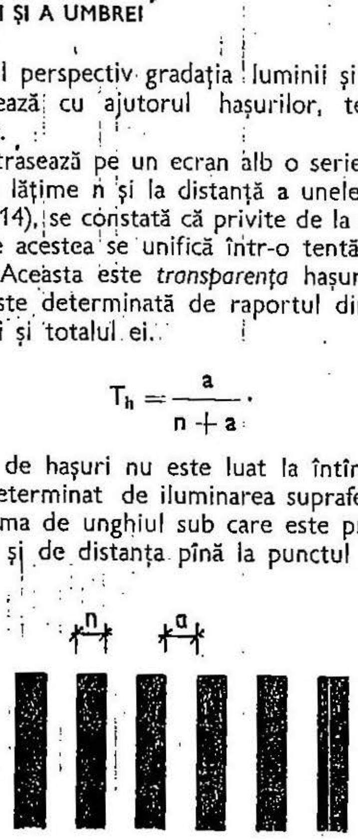


fig. 15.5.14

Fie o prismă dreaptă dreptunghiulară în cazul cînd cele două feţe vizibile sînt egal luminate (deci în proiecţie orizontală direcţia de lumină este bisectoarea celor două feţe). În perspectivă haşura celor două feţe se îndeseşte către linia orizontului prin diviziuni perspective, folosind aceeaşi unitate pentru ambele feţe (fig. 15.5.15). Acesta este un caz particular şi este bine să fie evitat, deoarece nu sugerează foarte bine perspectiva. Mai des întîlnit este cazul luminării inegale a celor două feţe vizibile ale prismei (fig. 15.5.16). Se consideră faţa din stînga luminată sub un unghi mai mare decît unghiul sub care este luminată faţa din dreapta; acest lucru face ca cele două feţe să se comporte

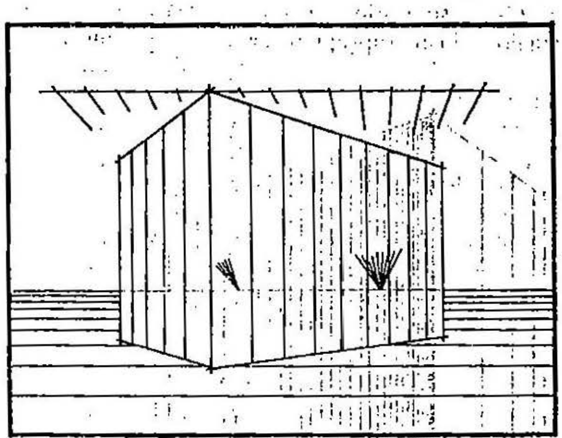


fig. 15.5.15

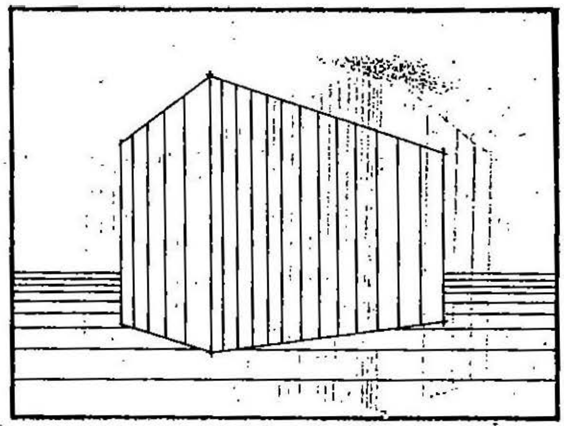


fig. 15.5.16

diferit. Fața din stînga se comportă ca o față în plină lumină, iar hașura ei se îndesește către linia orizontului. Fața din dreapta se comportă ca o față în umbră proprie, avînd o hașură ce se rărește odată cu depărtarea. Pentru a obține acest efect de degradare a hașurii către linia orizontului, A. Gheorghiu recomandă folosirea unui punct de fugă pe linia neutră (fig. 15.5.17). Acesta este de fapt un procedeu asemănător celui folosit la diviziunile perspective. O defectuoasă folosire a hașurilor duce la pierderea efectului de perspectivă (fig. 15.5.18). O schimbare bruscă a densității hașurii în cadrul aceleiași suprafețe are ca rezultat crearea unei muchii și deci modificarea formei obiectului (fig. 15.5.19), iar un gol poate crea o ieșire din planul suprafeței (fig. 15.5.20).

Gradația luminii și a umbrei se poate obține și prin tehnica punctelor. Hașurile verticale împart suprafața în dreptunghiuri de egală iluminare. Dacă se umplu aceste dreptunghiuri cu puncte, astfel ca densitatea lor să fie corelată cu iluminarea feței respective, se obține același efect ca și în cazul hașurilor. Prin suprapunerea aceleiași diluții de tuș negru se obțin tentele plate. Suprafața [...] parte în dreptunghiuri de egală ilumin[are] [...] fiecare dreptunghi se pornește totdeauna [...] tenta cea mai deschisă plus numărul de sup[rapuneri] corespunzător acestei zone de iluminare.

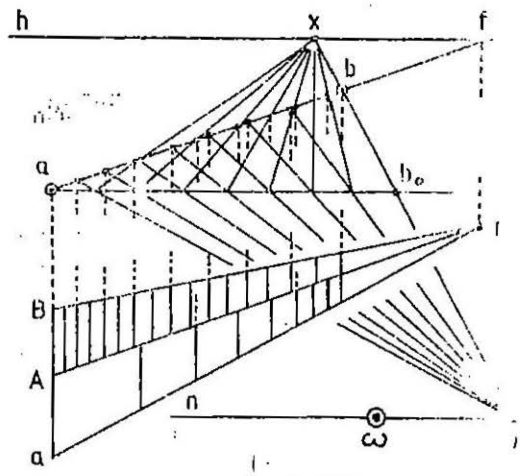


fig. 15.5.17

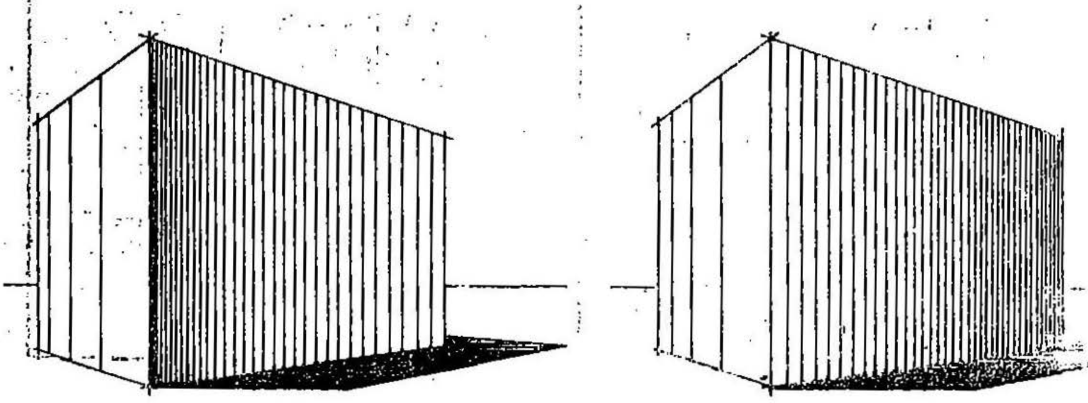


fig. 15.5.18

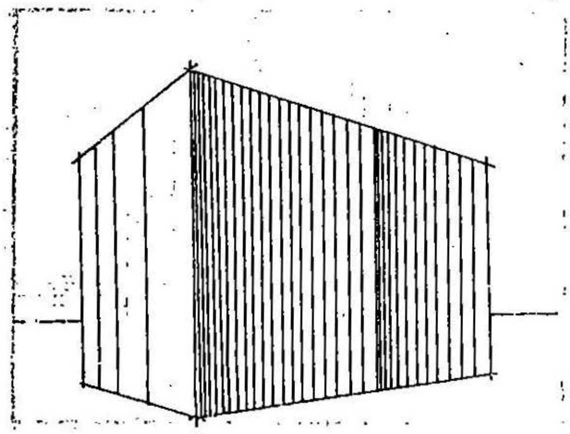


fig. 15.5.19

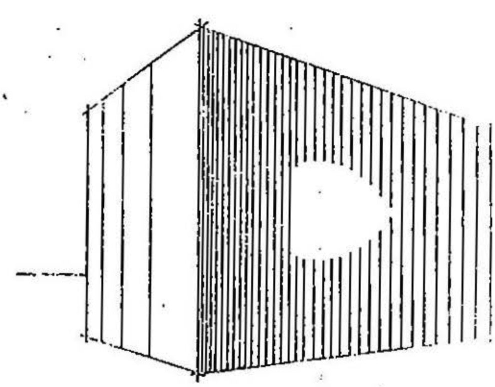


fig. 15.5.20

16.

PREZENTAREA UNEI PERSPECTIVE DE ARHITECTURĂ

16.1. GENERALITĂȚI

După cum s-a mai arătat, desenul de arhitectură este un desen precis, deci și perspectiva de arhitectură trebuie să prezinte o anumită rigurozitate, să exprime cît mai exact intențiile arhitectului. Și cînd îmbracă o formă mai tehnică și cînd exprimă „atmosfera" (cadrul în care se va integra construcția proiectată), perspectiva de arhitectură trebuie să fie cît mai puțin convențională, cu atît mai mult cu cît ea se adresează și nespecialiștilor — beneficiarii viitoarelor construcții. Am văzut care sînt mijloacele prin care desenul perspectiv poate fi apropiat mai mult de realitate. În acest capitol se vor aprofunda anumite aspecte pe exemple reale și se va arăta cum se finalizează o perspectivă de arhitectură, operație care dacă nu este bine făcută poate să ducă la pierderea efectului de perspectivă creat printr-o construcție corectă. Punerea în pagină, limitarea formatului și modul de închidere al perspectivei, construcția corectă a tuturor detaliilor în raport cu scara umană, alegerea și plasarea anturajului, modul de redare a profunzimii sînt probleme care trebuie să-l preocupe pe desenator, deoarece ele pot să întregească sau să distrugă efectul de perspectivă. Se insistă asupra faptului că toate acestea nu constituie niște rețete pentru obținerea unei bune perspective. Studiul teoretic trebuie neapărat completat cu un susținut exercițiu, fapt care face ca, după un număr mai mare de perspective construite, arhitectul să-și formeze o manieră proprie de exprimare și o ușurință de reprezentare a tuturor obiectelor imaginate.

16.2. PAGINAREA ȘI LIMITAREA TABLOULUI

La alegerea punctului de vedere s-a arătat că punctul principal de privire P trebuie să rezulte în centrul geometric sau cel puțin în zona centrală a obiectului. De asemenea, punctul principal de privire P trebuie să se găsească în zona centrală a tabloului pentru ca, atunci cînd se privește tabloul, direcția de privire să fie îndreptată în centrul perspectivei. Dacă între centrul tabloului și centrul perspectivei există o diferență mare în raport cu distanța între privitor și tablou, se creează efecte nedorite, imaginea perspectivei nemaiputînd fi recepționată în cele mai bune condiții. Acest lucru este și mai evident cînd tabloul de perspectivă este de mari dimensiuni; rezultă deci că perspectiva obiectului trebuie să ocupe zona centrală a tabloului (fig. 16.2.1). În funcție de tipul perspectivei limitarea tabloului se face diferit. Atît în perspectiva la nivelul ochilor, cît și în perspectiva cu orizont supraînălțat, punctul principal de privire P se găsește pe linia mediană a tabloului, dar obiectul pus în perspectivă ocupă poziții diferite pe verticala tabloului (fig. 16.2.2). În perspectiva la nivelul ochilor, linia orizontului se plasează în jumătatea de jos a tabloului, pentru ca obiectul să se profileze pe cer. Procedînd astfel nu se contravine cu nimic regulei enunțate mai înainte, pentru că de cele mai multe ori cerul nu capătă o tratare specială, iar punctul P rămîne în centrul imaginii create de obiect și pămîntul pe care stă; în felul acesta se apropie mai mult perspectiva de realitate. Cînd obiectul este mai înalt decît privitorul, se privește în sus și imaginea lui se profilează pe cer (fig. 16.2.3). În cazul perspectivei cu orizont supraînălțat, linia de orizont se plasează în jumătatea de sus a paginii. Folosind acest procedeu se creează senzația că se privește în jos, cum de altfel se petrec lucrurile în realitate. Cînd observatorul se află mai sus decît obiectul, de foarte puține ori privește în zare (deci orizontal), și nu-și îndreaptă privirea către obiectul vizat. În cadrul perspectivei pe tablou vertical, linia orizontului

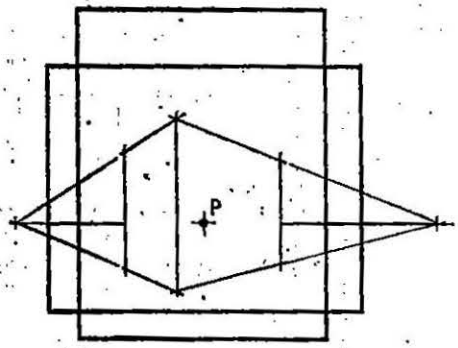


fig. 16.2.1

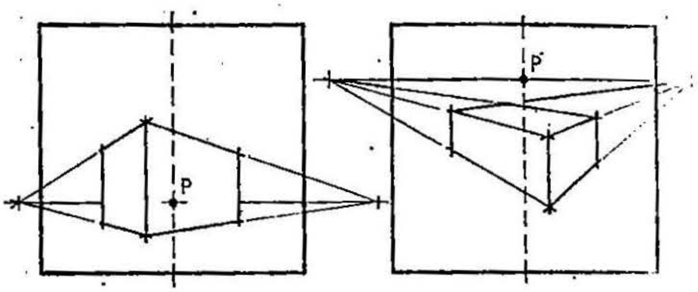


fig. 16.2.2

trebuie să facă parte din perspectivă, fiind materializată, prin diferite mijloace, după caz (munți și dealuri, nivelul mării sau pur și simplu linia dreaptă la care fug toate obiectele situate pe planul orizontal — fig. 16.2.4 și 16.2.5). Prezența liniei de orizont în perspectiva cu orizontul supraînlățat creează o scară metrică cu ajutorul căreia se pot face măsurători vizuale în perspectivă. Dacă limita tabloului nu cuprinde și linia orizontului, perspectiva pare că este de tip descendent pe tablou înclinat (fig. 16.2.6). Dar marile ansambluri trebuie privite de la mare distanță, iar imaginea creată este mai aproape de cea axonometrică. Perspectiva pe tablou înclinat de tip descendent se folosește, atunci cînd se privesc obiecte foarte mari de la distanțe relativ mici (fig. 16.2.7).

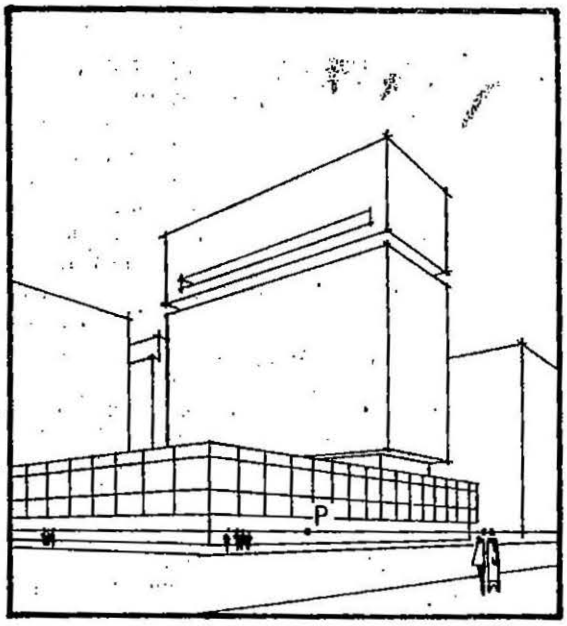


fig. 16.2.3

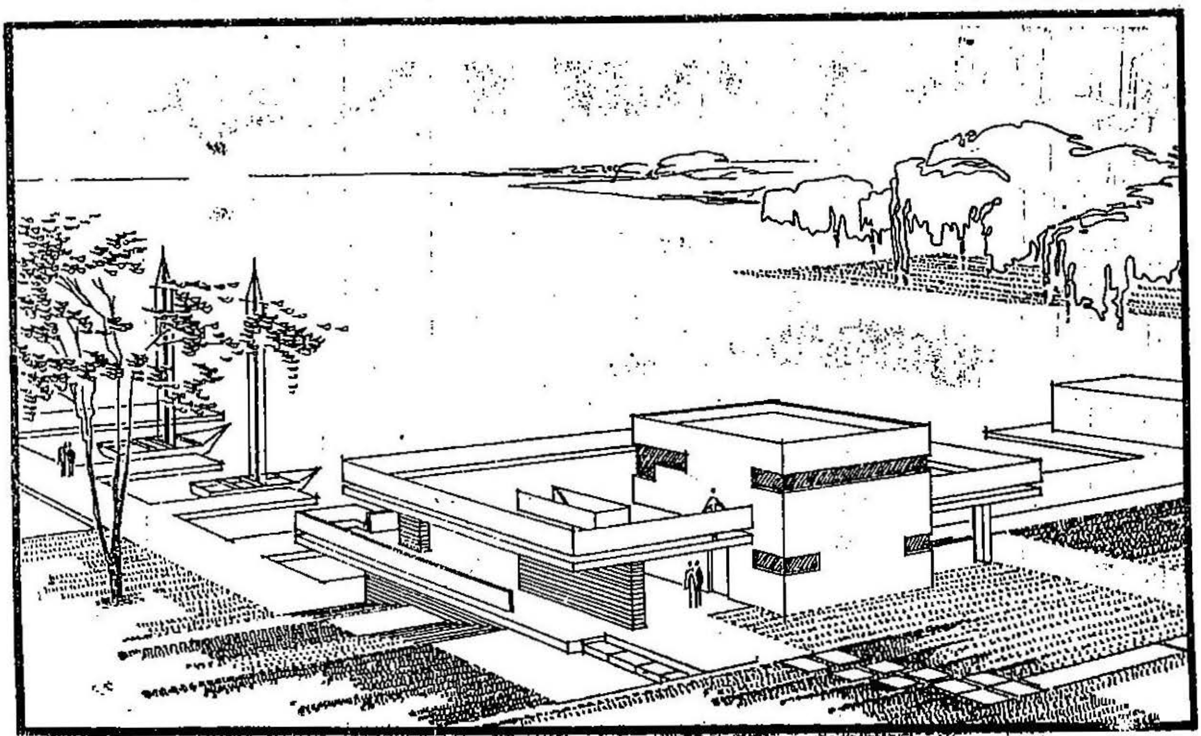


fig. 16.2.4

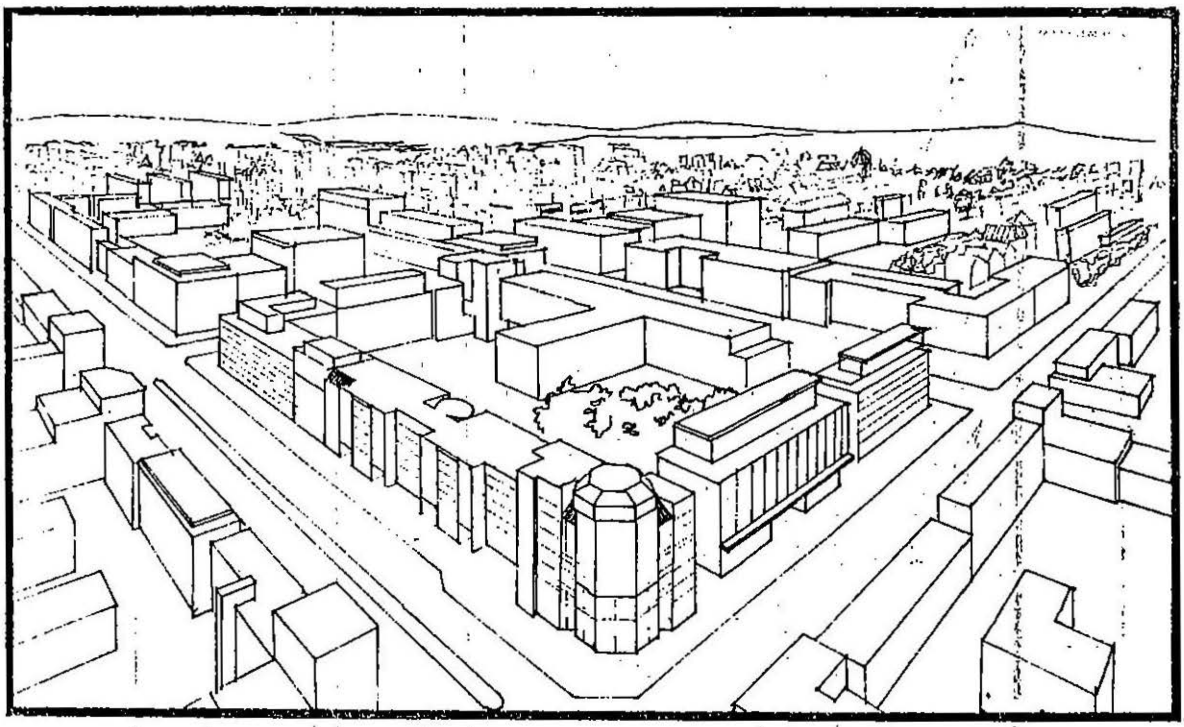


fig. 16.2.5

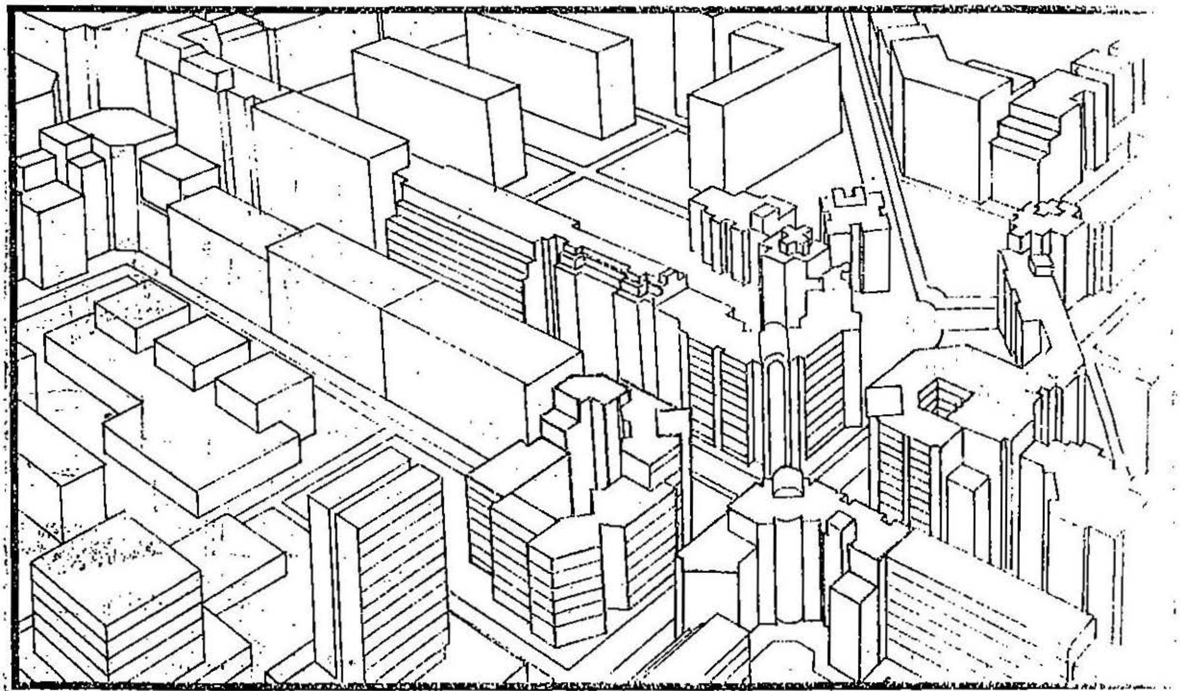


fig. 16.2.6

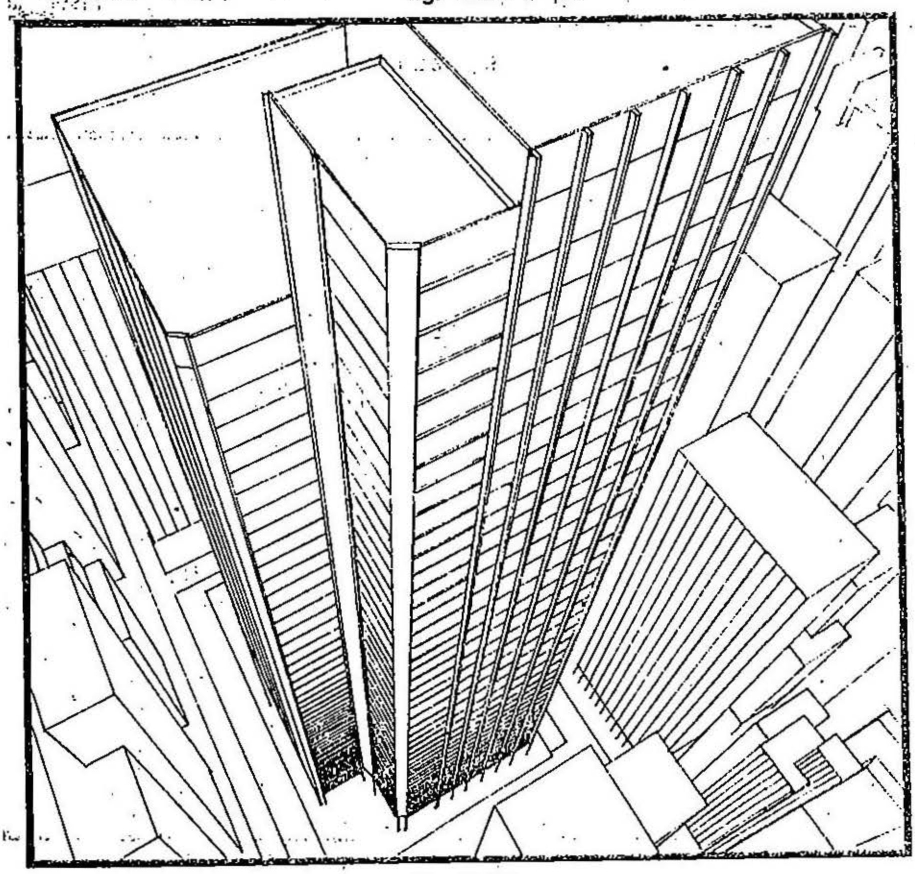


fig. 16.2.7

Pentru a închide o perspectivă pot fi folosite mai multe procedee. Unul dintre ele este cel de a închide perspectiva cu un chenar (rama tabloului) în care se oprește desenul (fig. 16.2.8). Acesta este procedeul cel mai simplu, dar și cel mai puțin indicat. De cele mai multe ori o perspectivă se închide după o formă grafică, dar care să nu contrazică efectul de perspectivă (v. fig. 12.6.6 și 16.2.9). La perspectiva de interior, așa cum s-a mai arătat, nu trebuie să se închidă perspectiva cu secțiunea încăperii (fig. 16.2.10). Perspectiva trebuie să creeze senzația că privitorul se află în interiorul camerei, deși, pentru construcție, punctul de vedere a fost plasat în afara ei (fig. 16.2.11).
Ca elemente de închidere pot fi folosite prim-planurile (formate din părți de clădiri, elemente de vegetație, mobilier urban etc.) și fundalurile care să redea mediul înconjurător (formele de relief sau mediul construit).

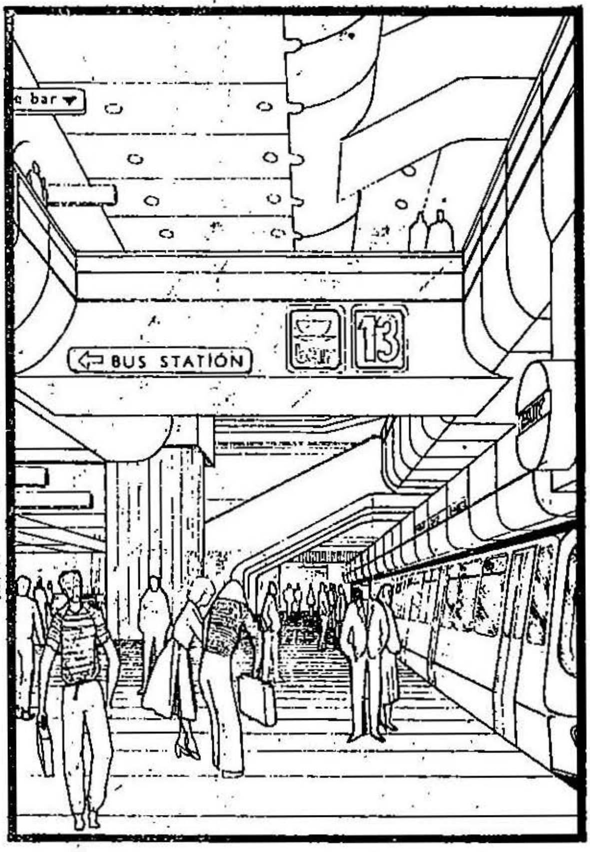


fig. 16.2.8



fig. 16.2.10

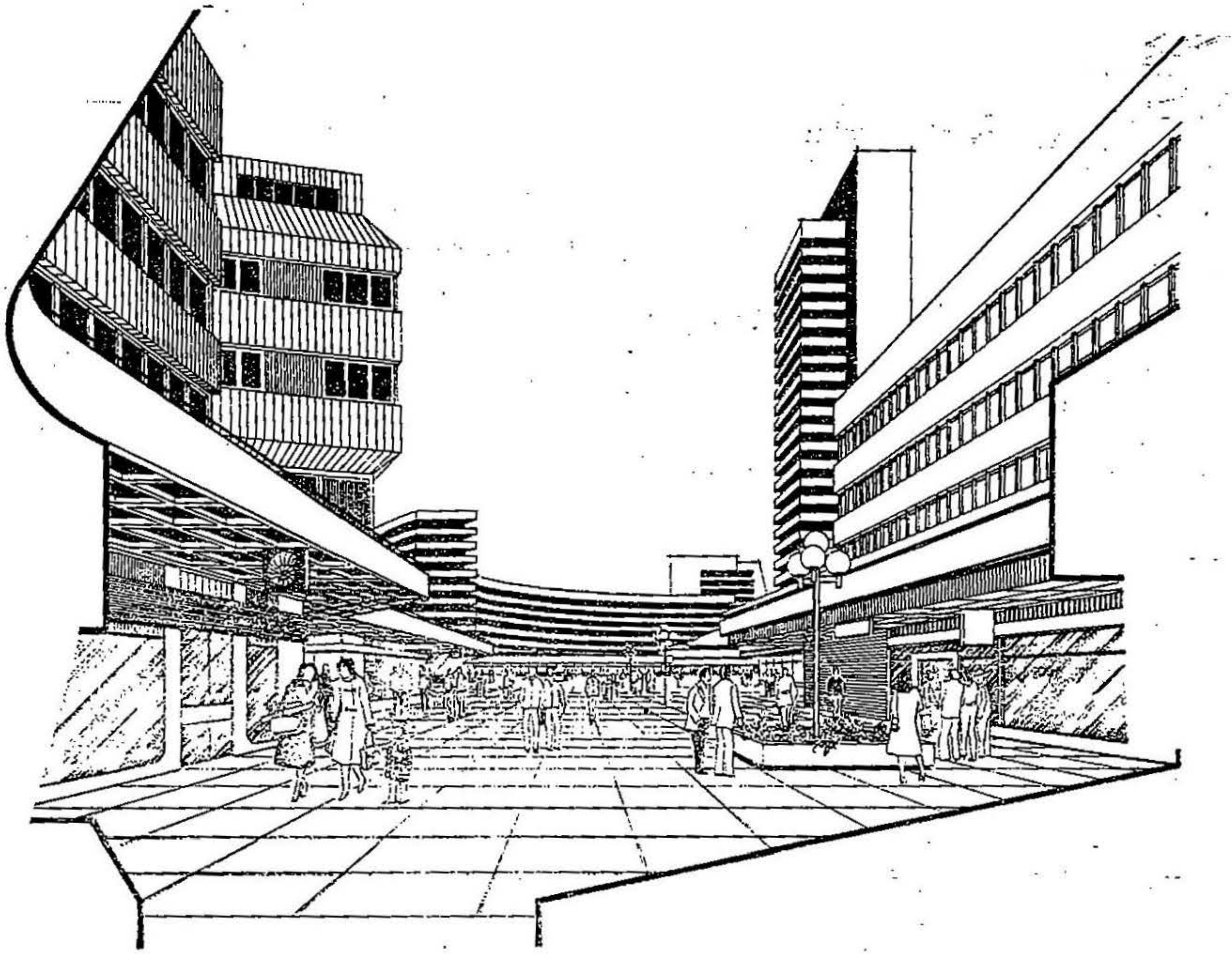


fig. 16.2.9

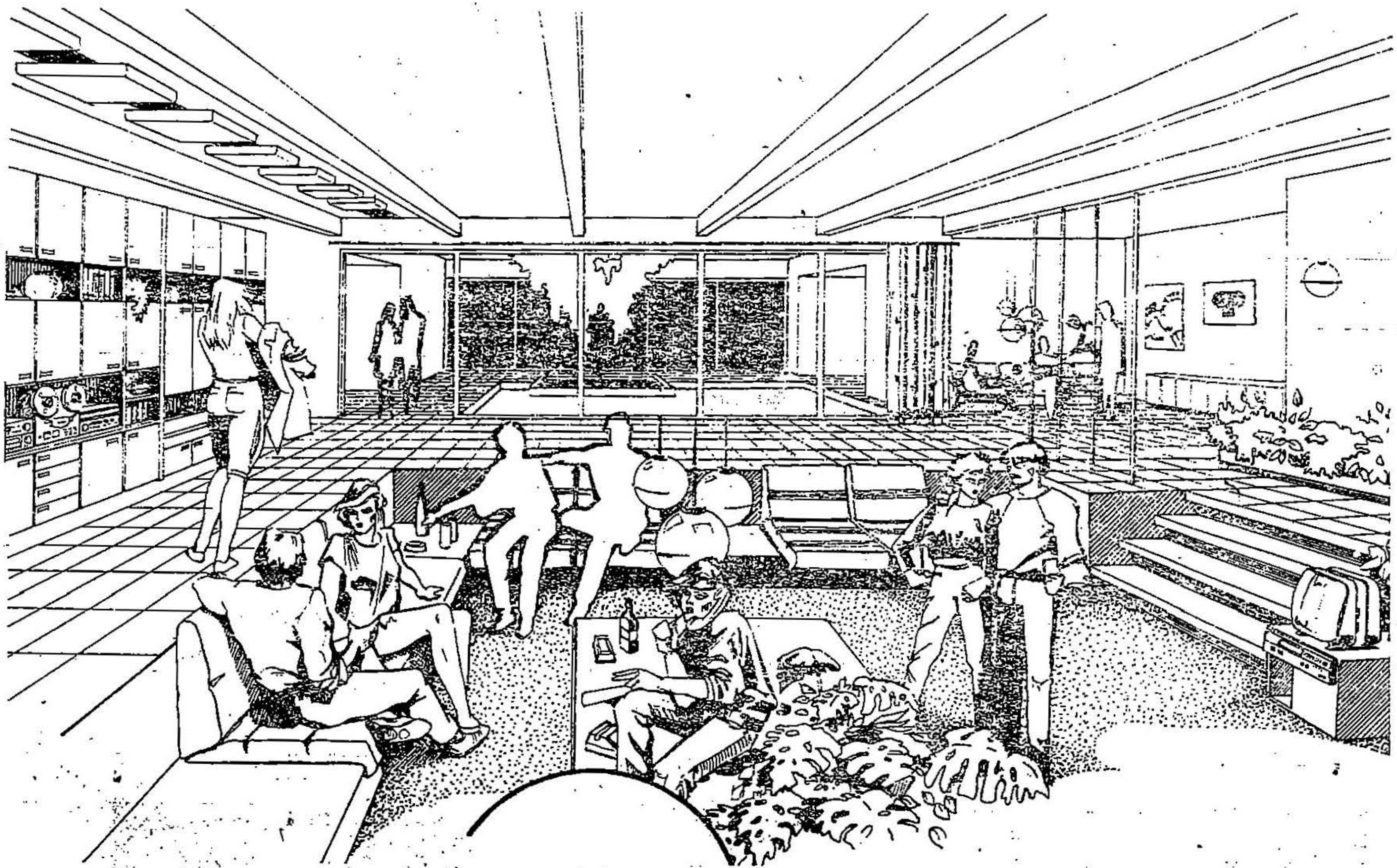


fig. 16.2.11

16.3. EFECTE NEGATIVE ÎN PERSPECTIVĂ

Efectele ce pot să apară într-o perspectivă pot fi voite, chiar căutate de desenator, dar de multe ori ele apar independent de voința desenatorului. Ne vom ocupa în special de efectele negative, care îndepărtează perspectiva desenată de imaginea realității. Aceste efecte nedorite pot avea următoarele cauze:

— o greșită alegere a punctului de vedere sau lipsa acestui studiu;

— construcția unor elemente din perspectivă „la ochi";

— extinderea perspectivei mai mult decît unghiul optim vizual;

— folosirea unor mijloace grafice ce pot schimba senzația de profunzime;

— o greșită plasare a elementelor de anturaj în tablou.

Construcția perspectivei cere o atenție deosebită pentru fiecare linie plasată în tablou. O singură linie trasată greșit poate duce la deformări sau chiar la schimbarea formei obiectului. În următoarele două exemple analizate, autorul (M. C. Escher) obține în mod voit efecte excesive de perspectivă. Astfel în figura 16.3.1 este ilustrată o cascadă. Verticala apei este adusă din profunzime în prim-plan de coloanele ce nu respectă legile perspectivei. În figura 16.3.2 se creează impresia că soldații ajung mereu în punctul de plecare, indiferent dacă urcă sau coboară; descoperiți cum a fost obținut acest efect.

Astfel de efecte sînt total nedorite cînd apar în cadrul perspectivei de arhitectură, care are drept scop să ușureze înțelegerea obiectului proiectat și nu invers. În figura 16.3.3 este ilustrată o perspectivă de tip frontal. Aparent lucrurile sînt în ordine, dar dacă se analizează cu atenție se ajunge la concluzia că o astfel de imagine nu poate fi percepută niciodată. Se observă că în partea dreaptă a perspectivei mai apare un punct de fugă. Acoperind una sau alta din părți (după semnul indicat), se obține o perspectivă frontală în stînga și una la două puncte de fugă în dreapta tabloului. În aceeași perspectivă se observă că muchiile superioare ale construcției laterale se întîlnesc în profunzime cu verticalele chiar pe muchia construcției frontale. Cele trei construcții par a fi unite, dar planul

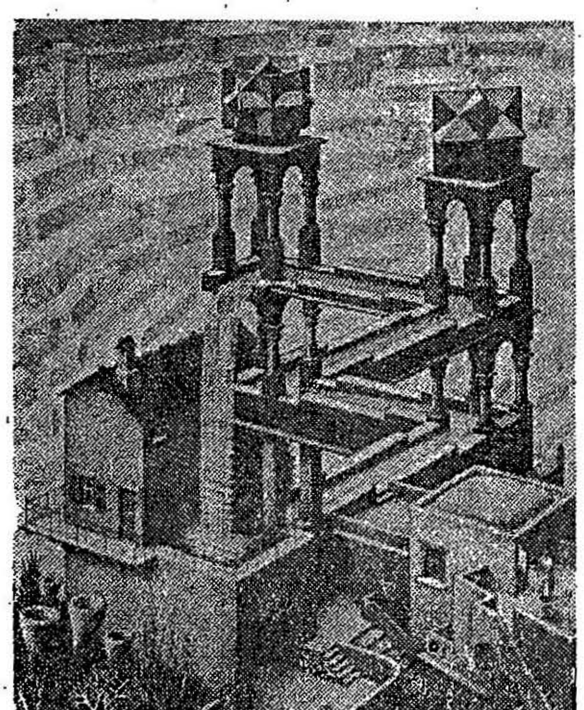


fig. 16.3.1

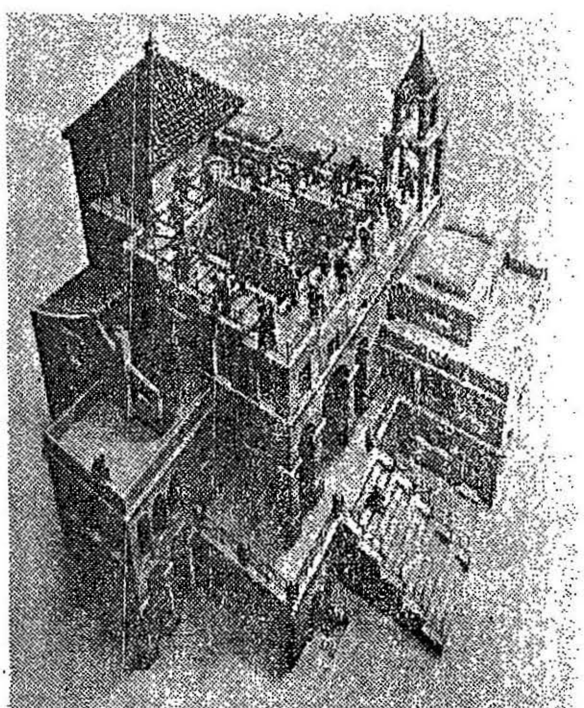


fig. 16.3.2

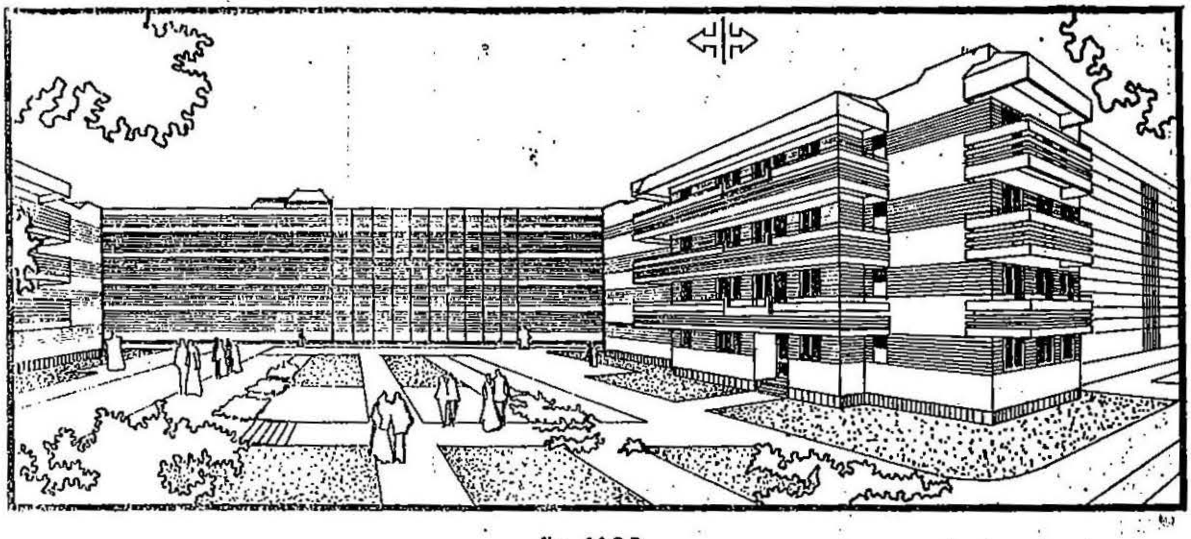


fig. 16.3.3

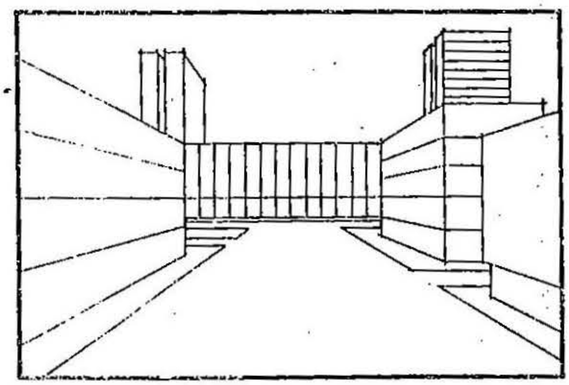


fig. 16.3.4

orizontal indică contrariul. Trebuie să se aibă grijă ca în perspectivă să nu se creeze astfel de confuzii. Muchiile importante ce definesc obiectul nu trebuie să se suprapună sau să rezulte în prelungire şi nici de maniera celor arătate mai sus (fig. 16.3.4). Aceste coincidenţe supărătoare, ce apar foarte frecvent la construcţia unei perspective, pot fi corectate direct în tablou, fără a altera cu nimic perceperea formei obiectului. Cînd această modificare nu este posibilă, trebuie reluat studiul de alegere a punctului de vedere.

Perspectiva la două puncte de fugă din figura 16.3.5 este extinsă foarte mult în dreapta punctului de fugă. Se creează şi aici senzaţia a două perspective suprapuse. În cazul perspectivei de colţ nici unul din punctele de fugă nu trebuie să se găsească în cadrul tabloului, perspectiva oprindu-se la distanţă mare de ele. Cînd unul din punctele de fugă este foarte aproape de obiect, el poate fi acoperit de un element în prim-plan (v. fig. 16.5.6). Este bine totuşi să se evite aceste situaţii. În perspectiva din figura 16.3.5 mai apar o serie de aspecte care dovedesc că perspectiva respectivă nu a fost riguros construită: casa este deformată, pomul din profunzime este prea înalt, iar lăţimea drumului este prea mică. În perspectiva frontală, creată în această imagine, drumul merge pînă la infinit (punctul de fugă). Este greu de presupus că un drum, oricît de lung ar fi, nu îşi schimbă la un moment dat direcţia. Deci, şi în cazul perspectivei frontale dreptele de capăt trebuie să fie oprite la distanţă de P, printr-un obiect ce închide perspectiva.

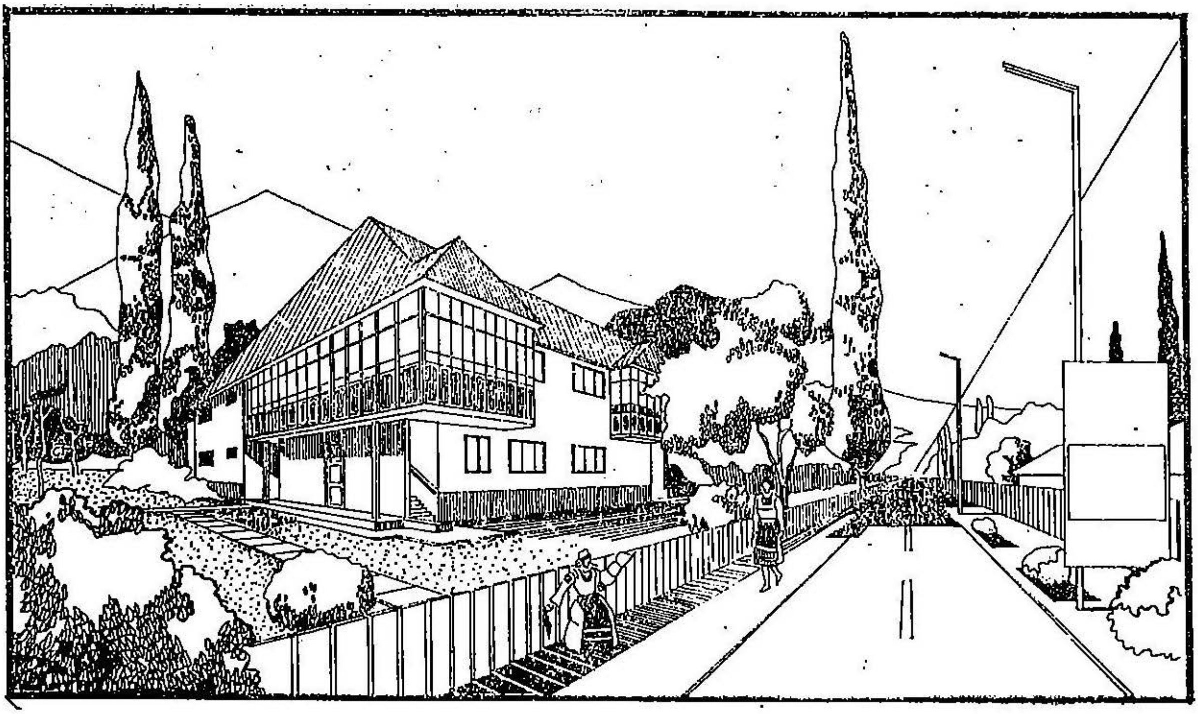


fig. 16.3.5

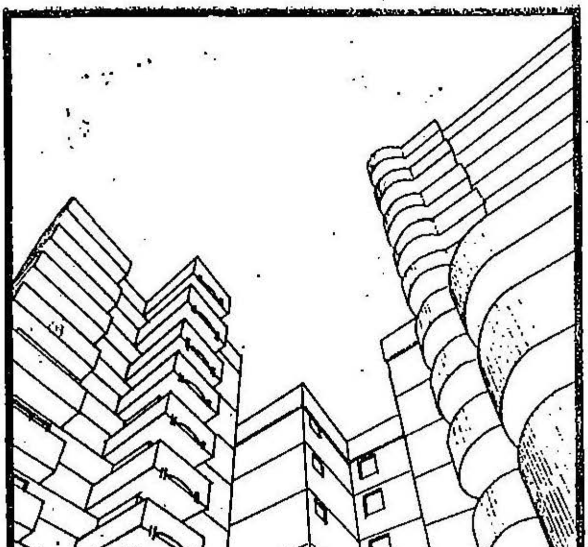


fig. 16.3.6

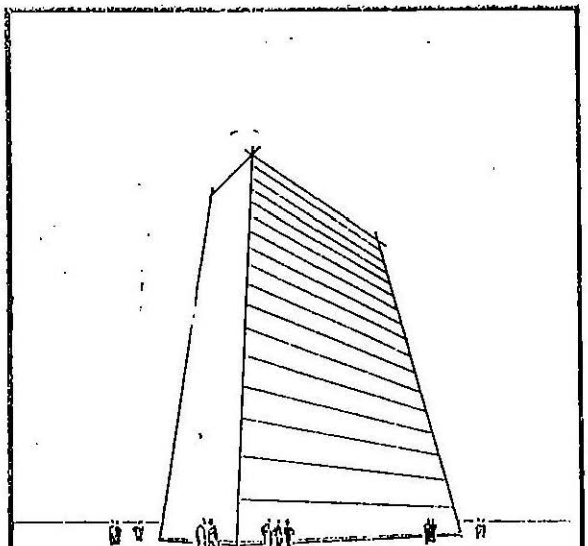


fig. 16.3.7

Şi la perspectiva pe tablou înclinat apar o serie de aspecte de care trebuie să se țină seama, deoarece această perspectivă se apropie cel mai mult de realitatea văzută. Convergența accentuată a verticalelor indică faptul că tabloul are o înclinație destul de mare și de la nivelul ochilor nu se pot cuprinde în cîmpul vizual nivelurile din partea de jos a construcției (fig. 16.3.6). Dacă într-o astfel de perspectivă se desenează și parterul, deformațiile devin supărătoare (fig. 16.3.7). Deci, pentru a putea cuprinde întreaga construcție, într-o imagine corectă pe plan înclinat, punctul de fugă al verticalelor va trebui să fie foarte sus. Verticalele ajung să fie aproape paralele, iar perspectiva pe tablou înclinat se apropie foarte mult de perspectiva pe tablou vertical. Același efect, de apropiere de obiect, se obține dacă se extinde foarte mult pe verticală perspectiva la nivelul ochilor, pe tablou vertical. Unghiul de sus ajunge chiar mai mic de 90°. Cînd acest unghi nu are laturile prea lungi, efectul nu este supărător (fig. 16.3.8).

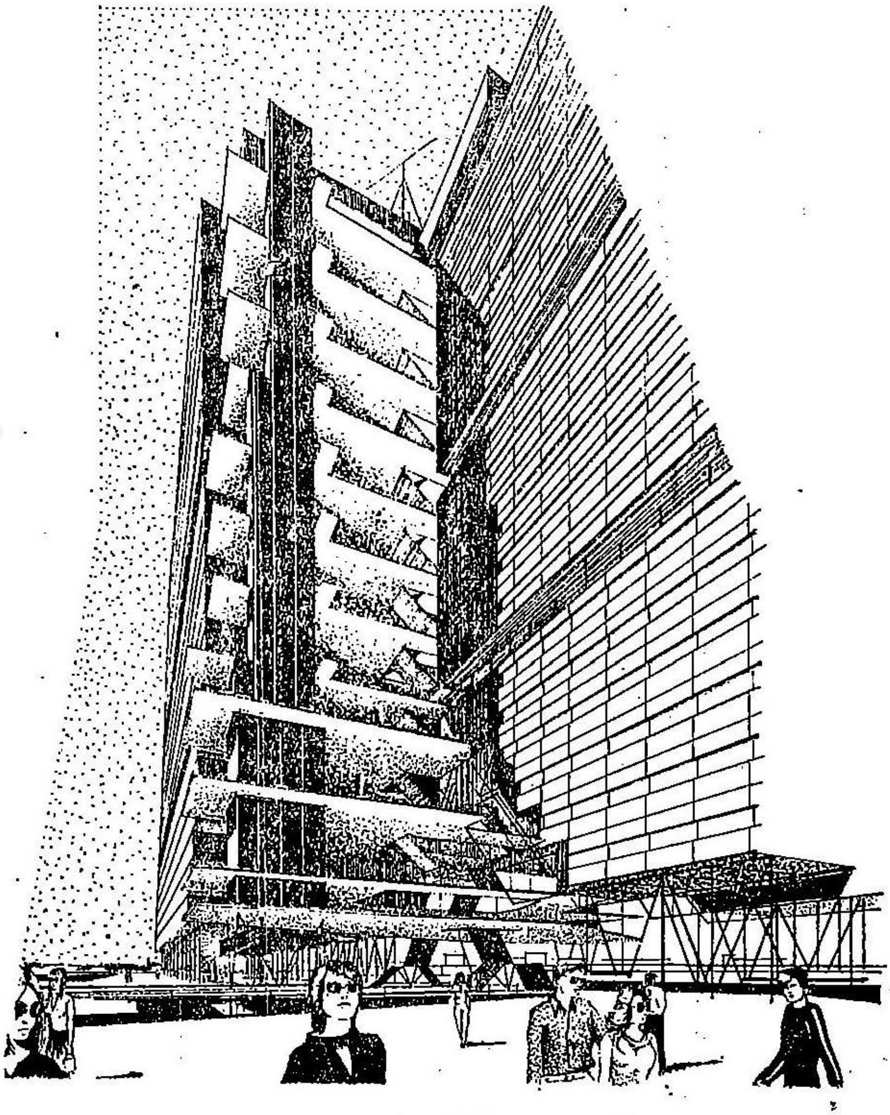


fig. 16.3.8

16.4. ALEGEREA ȘI PLASAREA ANTURAJULUI

Plasarea anturajului în perspectivă este o problemă metrică de perspectivă liberă. Această operație se face pe verticală în raport cu linia orizontului, iar în profunzime cu ajutorul punctelor de măsură. Fiecare element de anturaj trebuie construit la fel ca orice obiect pus în perspectivă (de exemplu, construcția unui autoturism — fig. 16.4.1). Acest capitol nu cuprinde tratarea grafică și modul de compunere al anturajului (acestea nu fac obiectul studiului nostru). Sînt analizate doar relațiile ce se nasc între anturajul ales și obiectul pus în perspectivă, relații care uneori pot influența negativ calitatea perspectivei. Studiul va fi exemplificat cu elemente de vegetație, dar problema este aceeași pentru orice element de anturaj ales.

Pomii nu trebuie să aibă aceeași formă cu obiectele puse în perspectivă (fig. 16.4.2 și fig. 16.4.3). Obiectele compuse pe forme sferice pot fi agrementate cu o vegetație dezvoltată pe înălțime (fig. 16.4.4), iar lîngă blocurile-turn pot sta pomi cu coroane rotunde (fig. 16.4.5). De asemenea se vor evita să se facă compoziții grafice între arhitectura obiectului și anturajul din perspectivă. Aceasta ar îngreuia citirea formei obiectului pus în perspectivă (de exemplu, formele munților compuse cu formele acoperișurilor și cu tratarea cerului — fig. 16.4.6). Elementele de vegetație nu trebuie să acopere obiectul de arhitectură (fig. 16.4.7) sau muchii importante, ce definesc forma acestuia (fig. 16.4.8). Plasarea vegetației trebuie făcută în așa fel ca ea să încadreze obiectul, fără să-l acopere, să creeze în același timp efectul de depărtare, să formeze un prim-plan care să servească și la închiderea perspectivei (fig. 16.4.9).

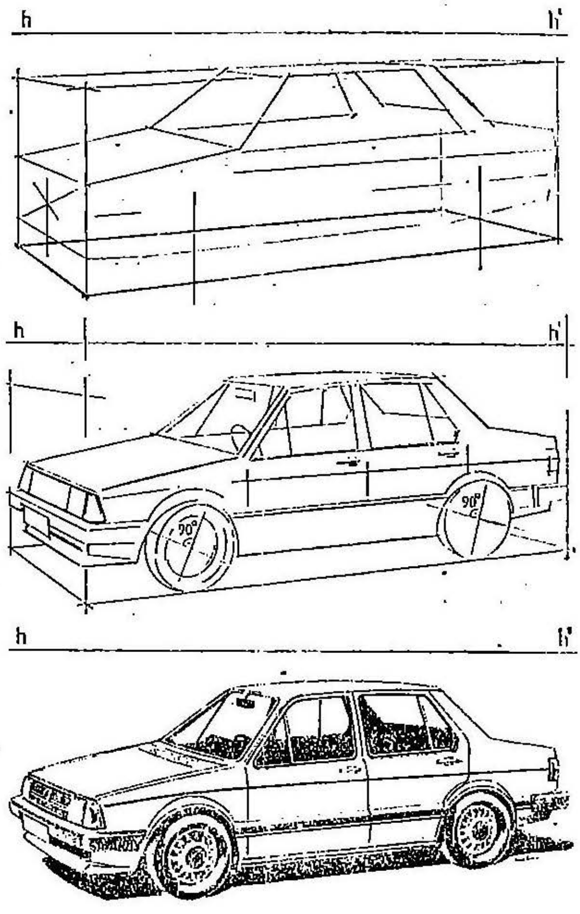


fig. 16.4.1

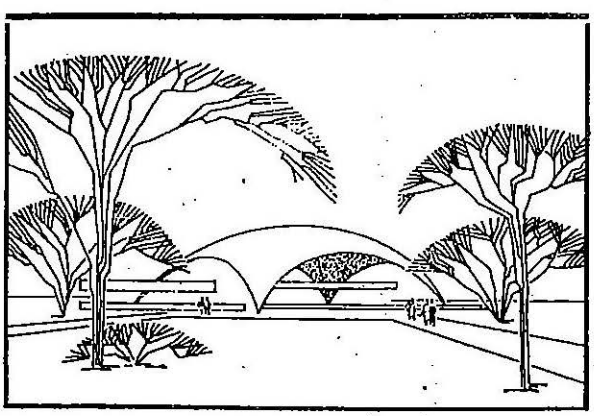


fig. 16.4.2

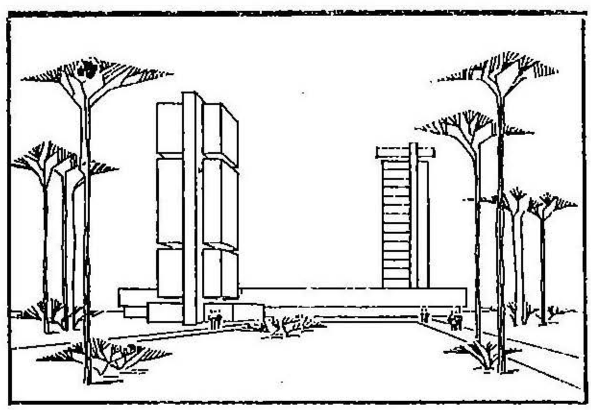


fig. 16.4.3

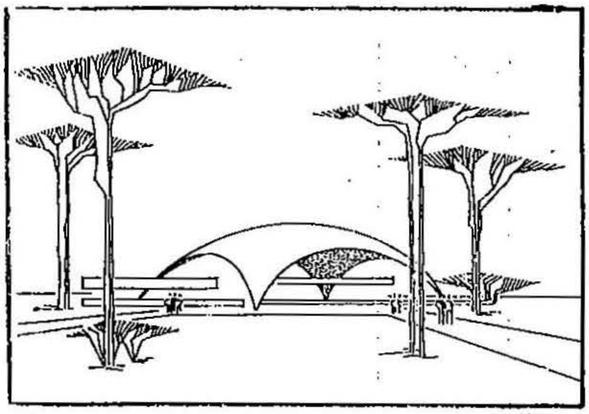


fig. 16.4.4

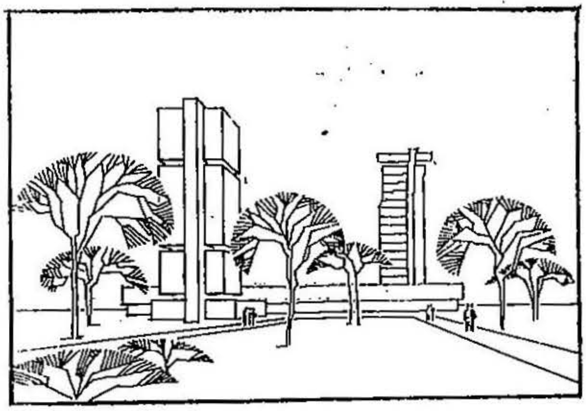


fig. 16.4.5

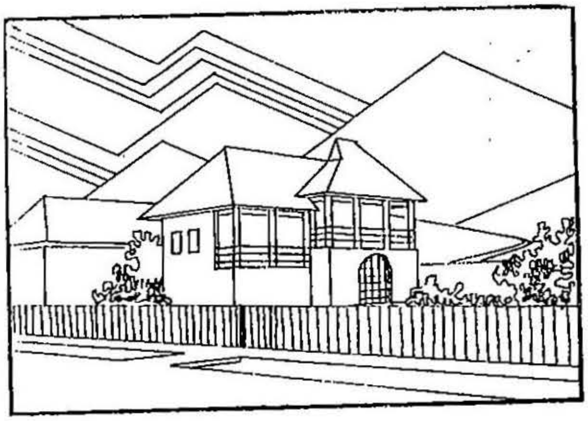


fig. 16.4.6

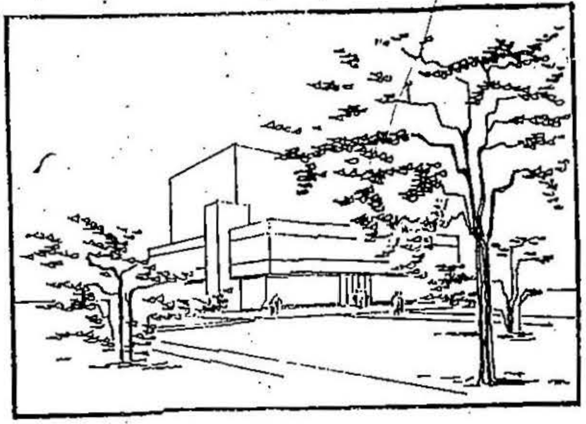


fig. 16.4.7

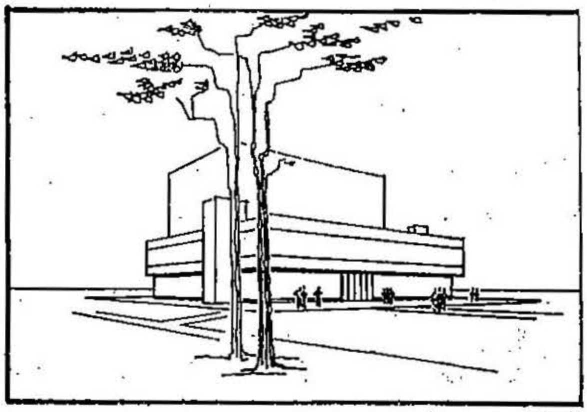


fig. 16.4.8

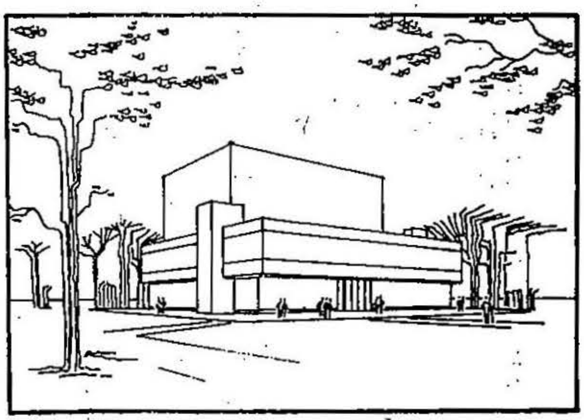


fig. 16.4.9

16.5. REDAREA PROFUNZIMII

În desenul perspectiv, profunzimea se realizează prin:

a). atributele perspectivei liniare — micşorarea obiectelor odată cu depărtarea, convergenţa paralelelor în profunzime (care atrage după sine schimbarea formei), suprapunerea planelor (suprapunerea contururilor aparente ale obiectelor);

b) atributele perspectivei aeriene — modelarea tratării suprafeţelor, modelarea contururilor obiectelor (diferenţierea planelor prin grosimea liniei de contur aparent), claritatea contururilor.

În continuare se pun în evidenţă cîteva modalităţi practice de redare a profunzimii în perspectiva de arhitectură, pe baza studiului teoretic făcut înainte.

Una din aceste modalităţi este tratarea planelor orizontale (planul orizontal al pămîntului, pardoselile şi plafoanele în perspectiva [illegible]).

Procedeul cel mai simplu este de a pune în evidenţă caroiajul (fig. 16.5.1). Analizînd cu atenţie acest procedeu, se observă că depărtarea [illegible] redată de dreptele care fug la punctul de fugă, ci de direcţia perpendiculară pe ele (acea unitate egală ce scade în profunzime). În figura 16.5.2 nu se poate aprecia corect cît de lungă este strada şi cît de departe de privitor este clădirea care închide perspectiva. Dacă se trasează pe desen direcţiile perpendiculare ale unităţilor egale, ce descresc în depărtare, se constată că strada este mult mai lungă decît s-a apreciat prima dată, iar clădirea ce închide perspectiva este (vizual) trimisă mult mai departe. Acest caroiaj poate fi materializat prin elemente de arhitectură care să mobileze planul din faţa construcţiei (jardiniere egale, alternanţe de suprafeţe dalate cu suprafeţe de vegetaţie, bănci şi alte elemente de mobilier urban — [illegible].5.3).

În cazul perspectivei de interior se poate proceda la fel (v. fig. 16.[illegible]11). Se observă că grinzile care fug în profunzime [illegible] redau suficient de bine perspectiva. Metoda [illegible] caroiajului pe planele orizontale este într-adevăr cea mai simplă şi mai rapidă, dar pentru a apropia desenul perspectiv de realitate, trebuie ca acest caroiaj să fie materializat într-un fel în perspectivă.

Diferenţierea planelor în perspectivă este o altă modalitate de a crea senzaţia de profunzime. Profunzimea poate fi redată prin tratarea diferenţiată a suprafeţelor şi a contururilor aparente ale obiectelor sau prin suprapunerea de pl[illegible].

Linia de contur aparent poate fi [illegible]tată diferit în funcţie de distanţa obiectului faţă de observator.

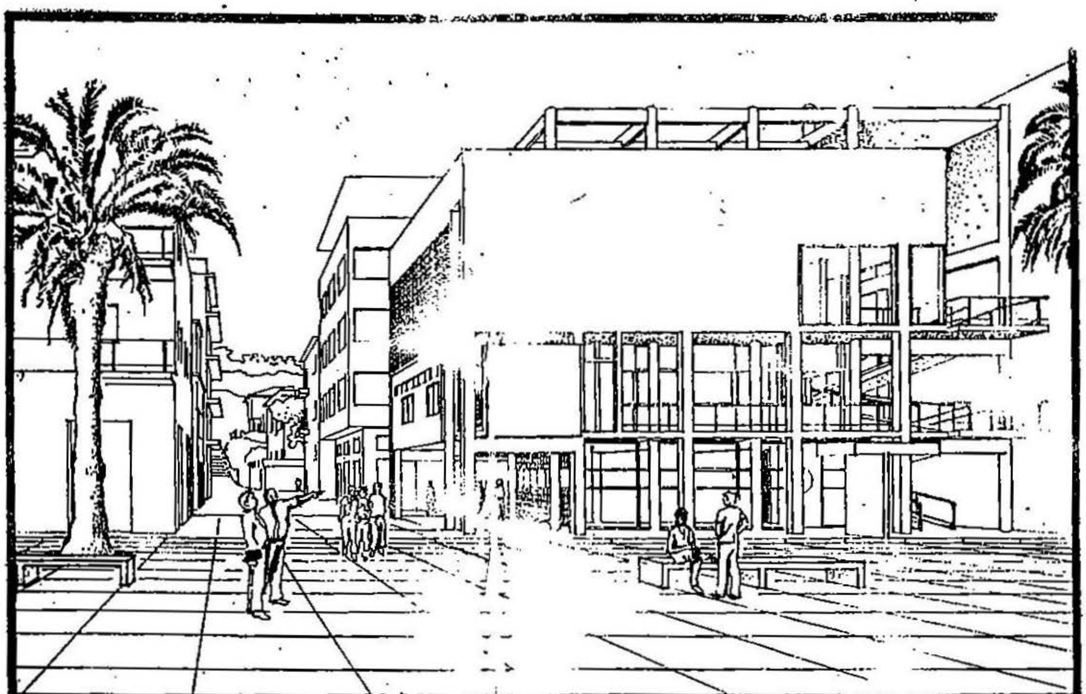


Fig. 16.5.1

Astfel, obiectele ce sînt mai aproape vor avea o linie de contur mai groasă şi mai precisă, iar pe măsură ce se depărtează de privitor au o linie de contur mai subţire şi mai puţin precisă (fig. 16.5.4). În felul acesta, obiectele pot fi detaşate unele de altele în funcţie de locul ocupat în perspectivă. Procedeul poate căpăta şi aspecte negative, atunci cînd linia groasă de contur îmbracă un ansamblu de mai multe obiecte, care trebuie detaşat de mediu (fig. 16.5.5).

Diferenţierea obiectelor de arhitectură se poate obţine şi prin tratarea diferenţiată a faţadelor. În planele apropiate, faţadele pot fi tratate pînă la detalii, în planele mai depărtate tratarea se opreşte la punerea în evidenţă a volumului, iar la depărtări foarte mari se desenează doar conturul aparent, care se poate chiar confunda cu mediul înconjurător.

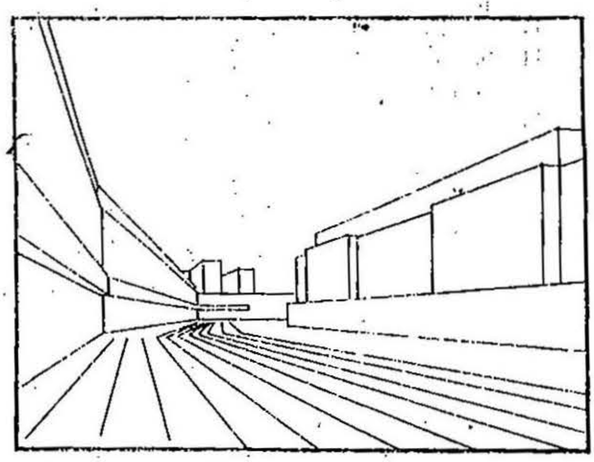


fig. 16.5.2

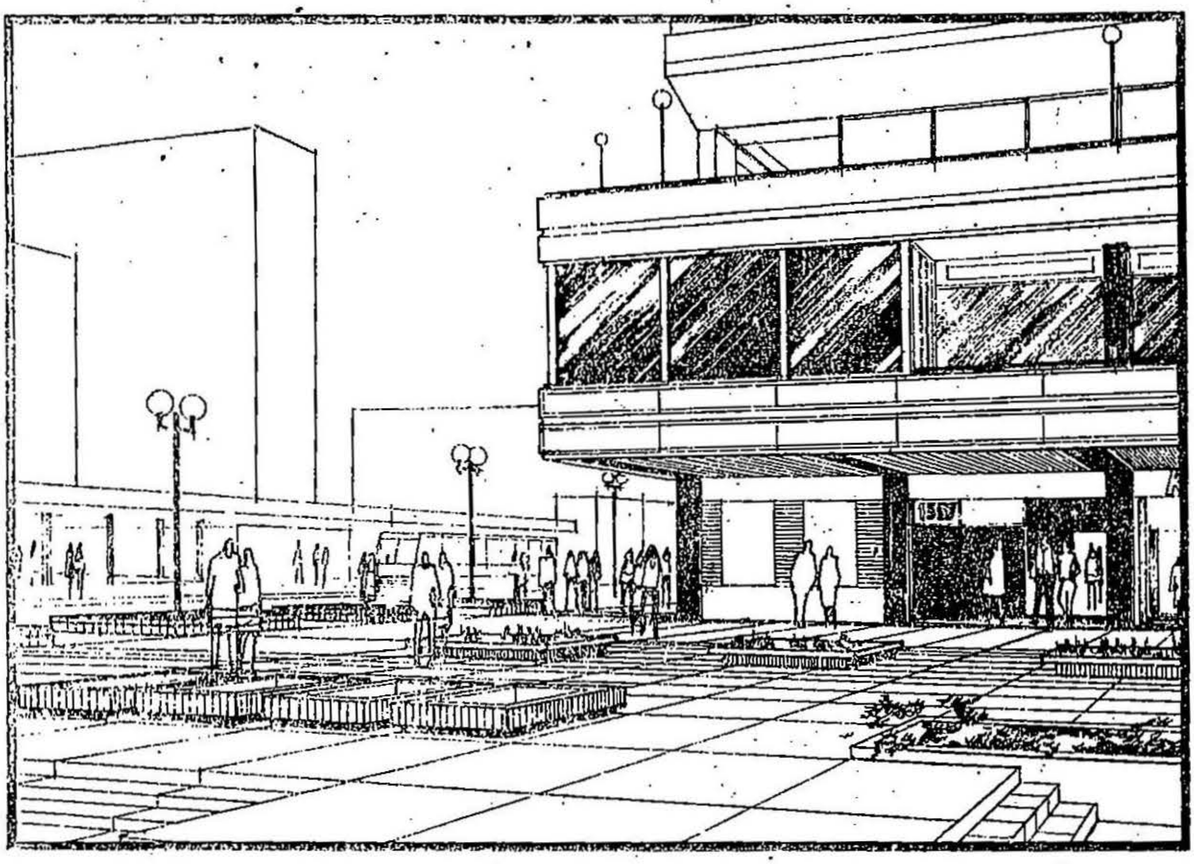


fig. 16.5.3

Această suprapunere de plane duce la observația că, mai ales într-o perspectivă la nivelul ochilor, linia de intersecție între volumul de arhitectură și planul pămîntului nu se vede în întregime (fig. 16.5.6). Ea este acoperită de elementele de anturaj (oameni, mașini, vegetație, alte obiecte) ce se găsesc între obiectul considerat și privitor. Apariția acestei linii în desen creează senzația de machetă și îndepărtează perspectiva de viziunea realului. În schimb, conturul aparent al volumului, ce se profilează pe cer sau pe alte elemente de fundal, trebuie desenat întreg și cu mare precizie. O altă problemă de care trebuie să se țină seama în redarea profunzimii este crearea prim-planurilor, cu ajutorul cărora se poate măsura distanța ce l separă pe privitor de obiectul considerat. Totodată prim-planurile reprezintă și o modalitate de închidere a perspectivei. Ca elemente de prim-plan se pot folosi detalii arhitecturale ale unor construcții din același plan cu privitorul, elemente de vegetație, automobile, oameni, elemente de mobilier urban etc. Diferența de scară dintre obiectele din prim-plan și cele mai depărtate de privitor creează o bună senzație de adîncime.

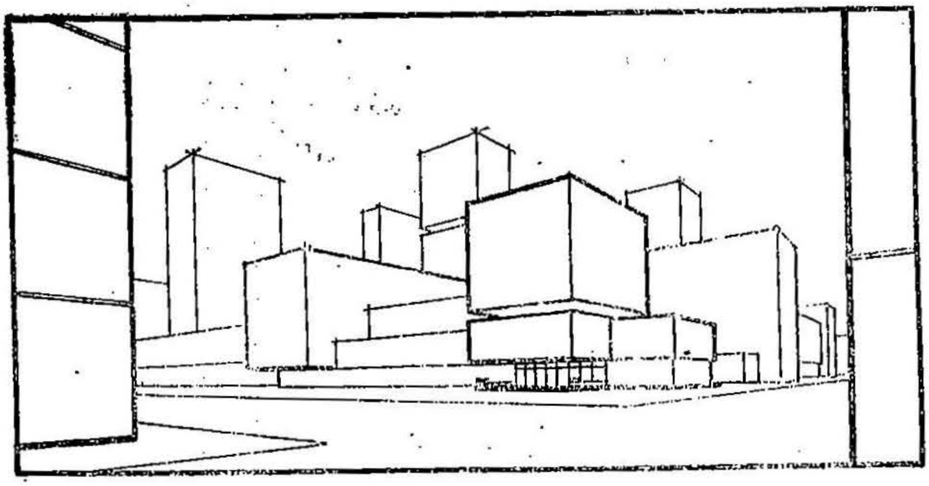


fig. 16.5.4

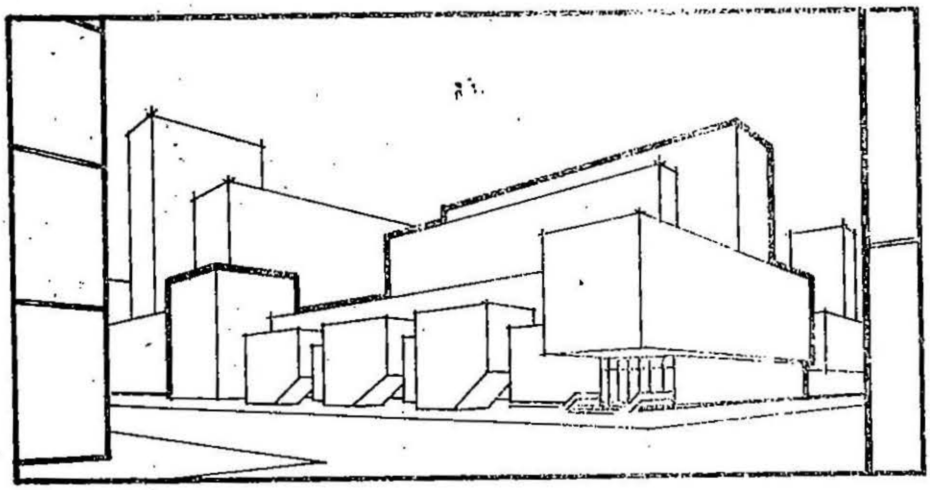


fig. 16.5.5

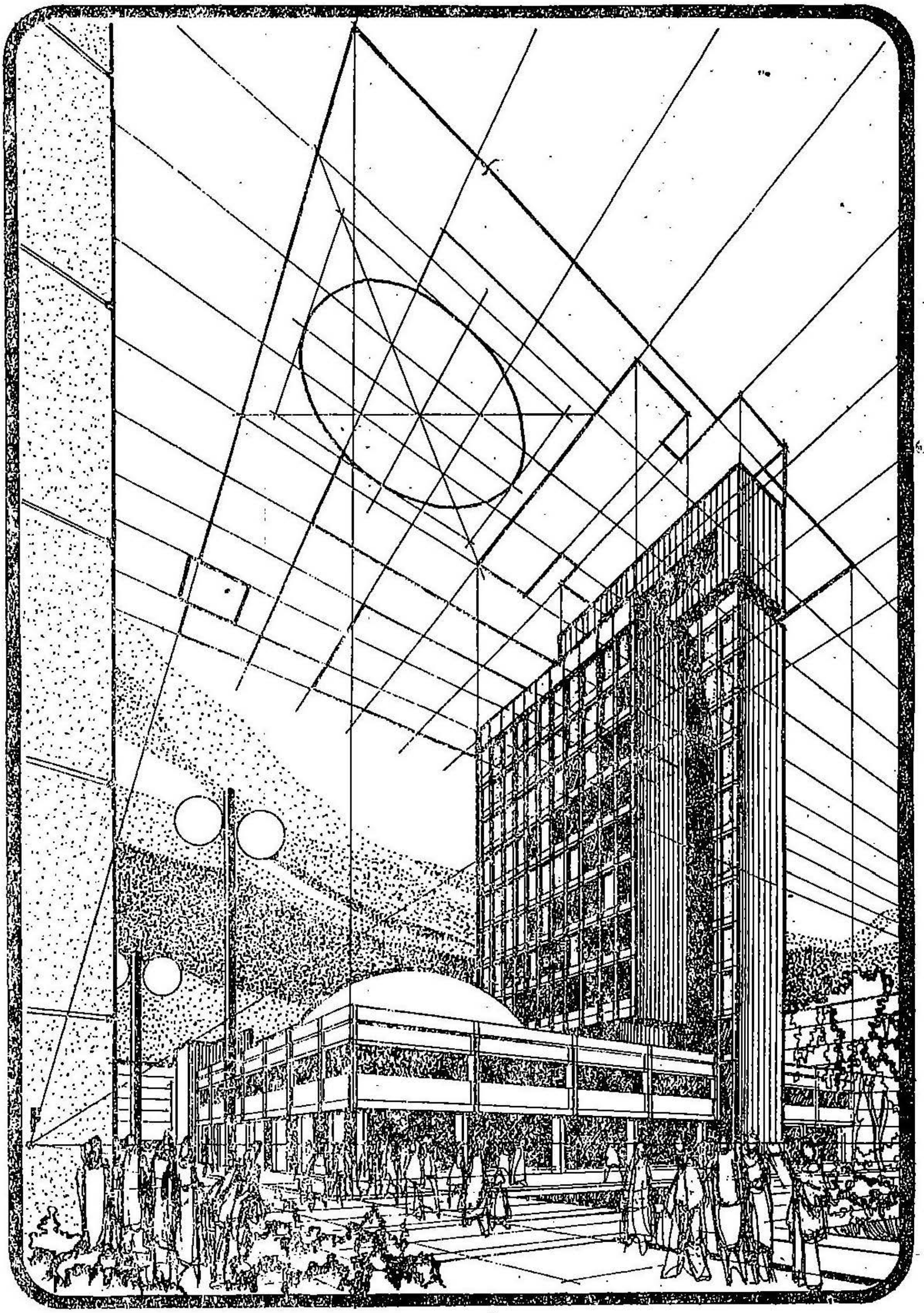


fig. 16.5.6

16.6. ALTE TIPURI DE REPREZENTĂRI PERSPECTIVE

Pentru a ușura înțelegerea organizării spațiilor interioare apare uneori necesară construirea unei secțiuni-perspective. Aceasta poate fi realizată la două puncte de fugă sau frontală. Secțiunea perspectivă frontală are avantajul că secțiunea verticală a casei, fiind frontală, poate fi construită la scară direct în tabloul perspectiv (fig. 16.6.1).

Pentru a prezenta corecta integrare a unui obiect de arhitectură într-un mediu construit sau într-un peisaj, se va recurge la așa-numitul fotomontaj. În cadrul reprezentărilor de arhitectură fotomontajul constă în obținerea unei singure imagini prin suprapunerea perspectivei obiectului de arhitectură peste fotografia amplasamentului dat. Este de fapt o suprapunere de două perspective. Pentru ca suprapunerea să se facă perfect trebuie ca pe fotografia mediului ambiant să se determine elementele sistemului perspectiv (punctul P, punctele de fugă, înălțimea orizontului), printr-o restituție perspectivă. Aceste elemente se vor folosi la construcția perspectivei obiectului proiectat. Va rezulta o imagine unică, foarte aproape de imaginea pe care o va avea privitorul după construirea casei pe amplasamentul dat (fig. 16.6.2). Același lucru se obține folosind în loc de perspectivă fotografia machetei viitoarei construcții. Pentru ca cele două fotografii să se suprapună perfect sînt necesare operații mult mai complicate; în plus, primul procedeu permite compunerea volumetriei chiar pe poza amplasamentului dat.

În figura 16.6.3 este prezentată o perspectivă de tip frontal, mobilată numai pe o parte. Deși obiectul pus în perspectivă nu are o compoziție concavă, perspectiva lui frontală nu deranjează, deoarece direcția paralelă cu tabloul este foarte scurtă. Cînd direcția paralelă cu tabloul este foarte scurtă sau inexistentă, se poate limita perspectiva frontală independent de punctul principal de privire P (fig. 16.6.4).

În final sînt prezentate două perspective la nivelul ochilor: una la două puncte de fugă, ansamblul avînd în plan o compoziție concavă (fig. 16.6.5); cealaltă este o perspectivă frontală a unei clădiri cu un plan dreptunghiular (fig. 16.6.6).

Într-o perspectivă frontală se poate reprezenta și un obiect ce se înscrie perfect într-o prismă dreaptă dreptunghiulară, dacă acest obiect prezintă direcții ce fug la P sau la alte puncte de fugă pe linia orizontului.

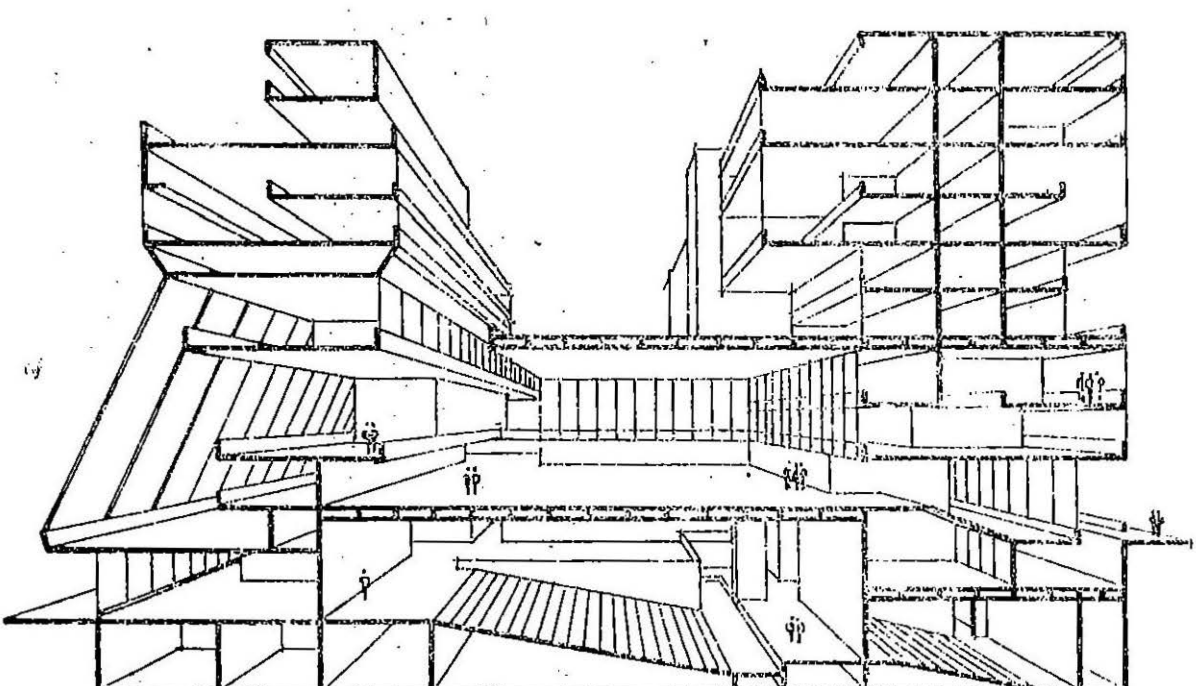


fig. 16.6.1

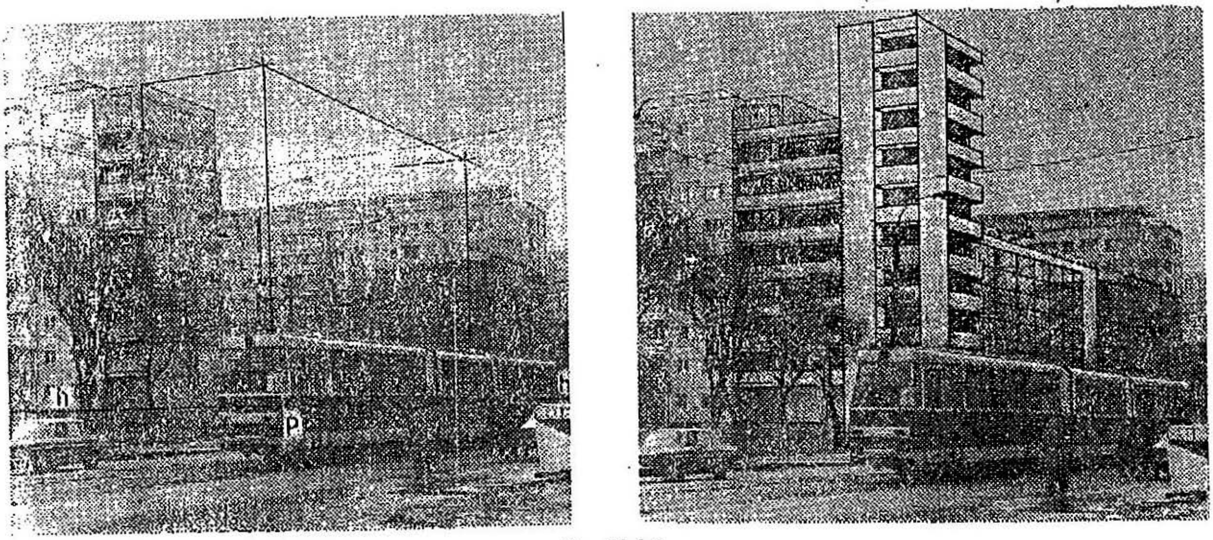


fig. 16.6.2

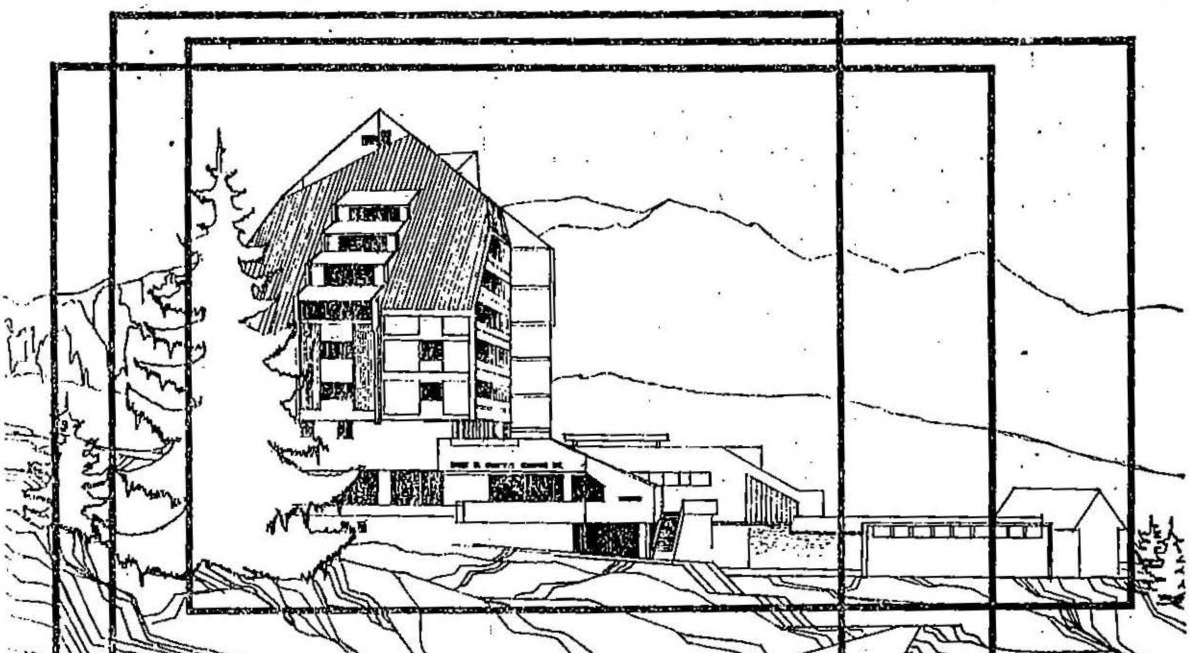


fig. 16.6.4

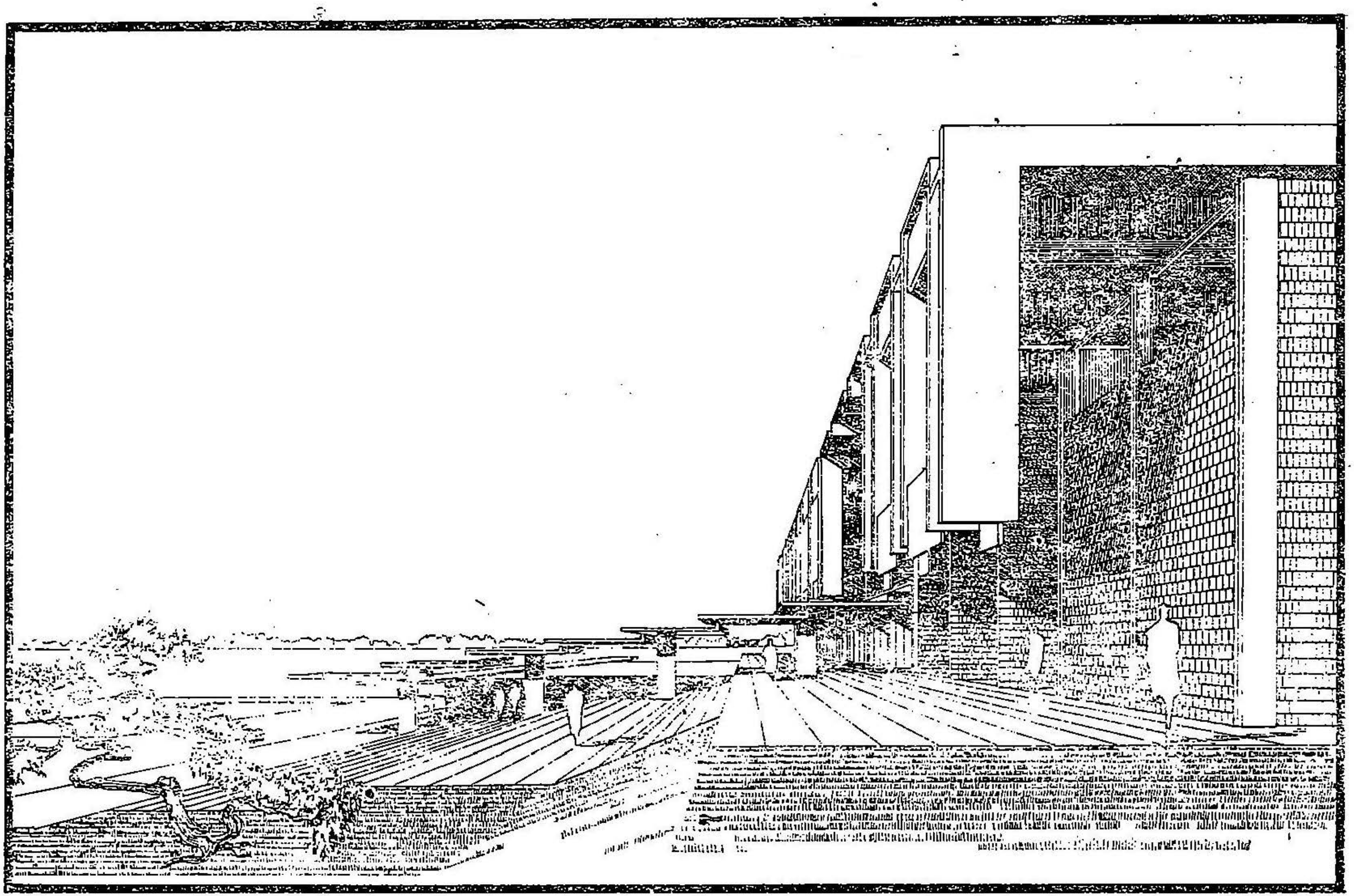


fig. 16.6.3

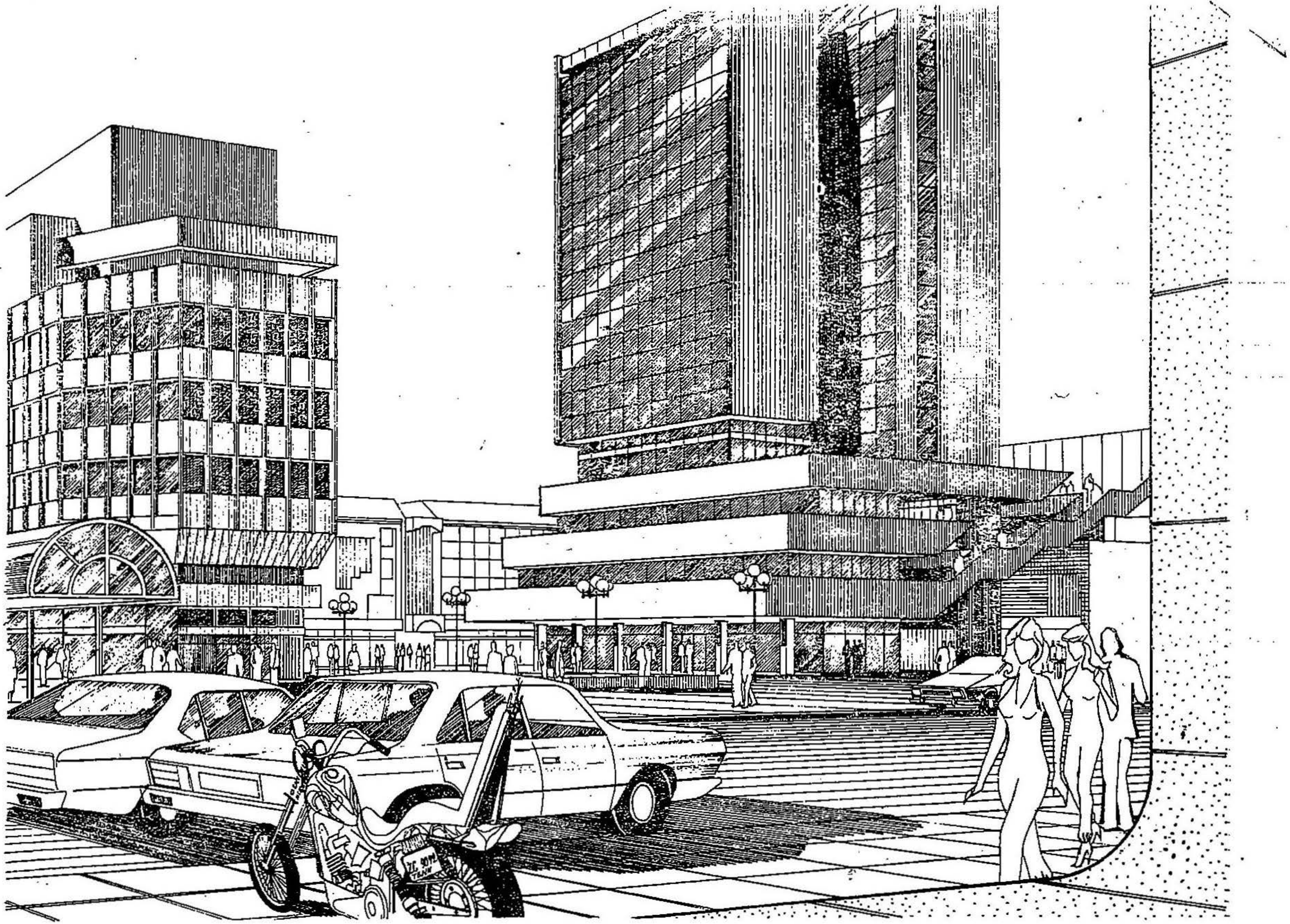


fig. 16.6.5

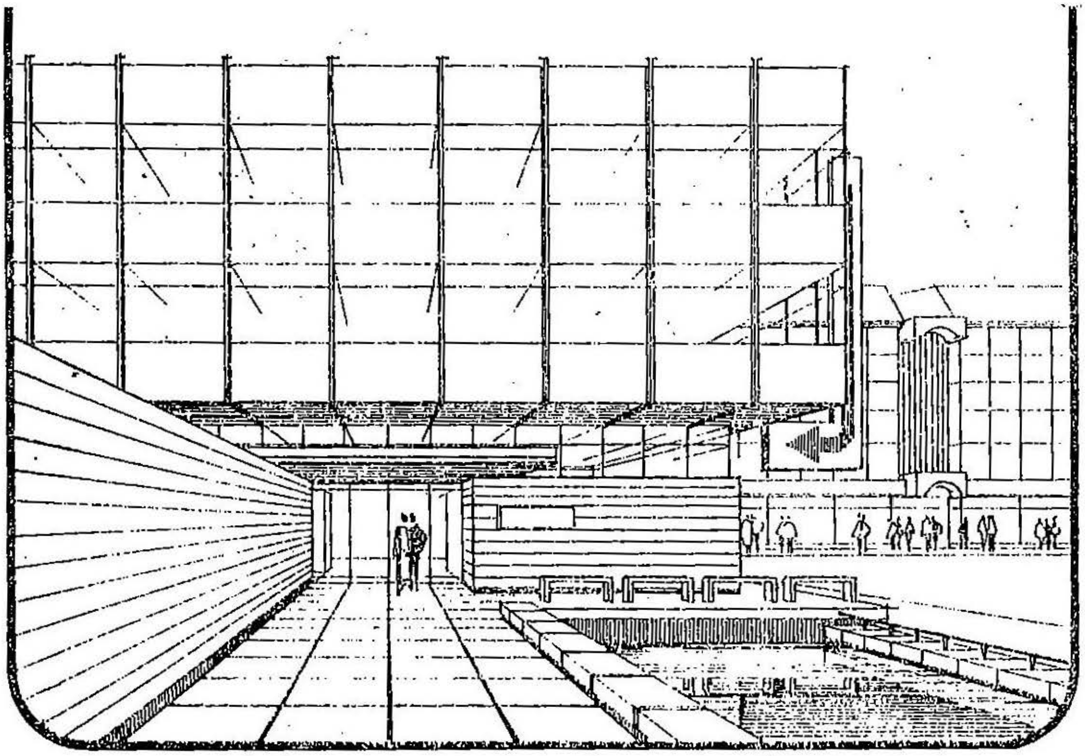


fig. 16.6.6

Pe intradosul coperților exterioare sînt ilustrate două perspective de prezentare: o perspectivă la două puncte de fugă cu orizontul supraînălțat și o perspectivă la două puncte de fugă cu oglindire.

Partea a treia

ANEXE

ANEXA 1

ELEMENTE DE GEOMETRIE ÎN SPAŢIU

Planul este suprafaţa care conţine toate punctele unei drepte aşezate pe el. O dreaptă împarte un plan în două *semiplane*.

Faţă de un plan, o dreaptă poate avea una din poziţiile (fig. A1.1):

— are un singur punct în plan;

— este conţinută în plan;

— este paralelă cu planul, atunci cînd nu are nici un punct comun cu planul situat la distanţă finită. Atunci cînd are un punct comun A, se spune că dreapta intersectează planul în A.

Un plan poate fi definit prin:

— trei puncte necoliniare (fig. A1.2);

— o dreaptă şi un punct exterior ei (fig. A1.3);

— două drepte paralele (fig. A1.4);

— două drepte concurente (fig. A1.5).

Două plane distincte, care au un punct comun, la distanţă finită, au o infinitate de puncte comune situate pe o dreaptă, dreapta de intersecţie a celor două plane (fig. A1.6). Două plane care nu au nici un punct comun la distanţă finită sînt paralele (fig. A1.7).

Printr-o dreaptă (D) trec o infinitate de plane care formează un fascicul avînd ca muchie dreapta (D) (fig. A1.8). Un plan al fasciculului este determinat

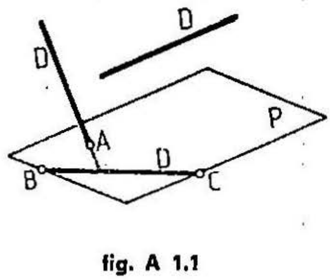


fig. A 1.1

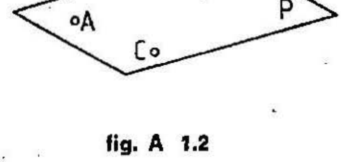


fig. A 1.2

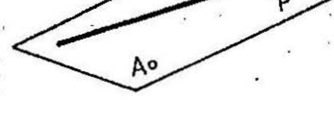


fig. A 1.3

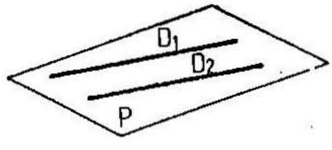


fig. A 1.4

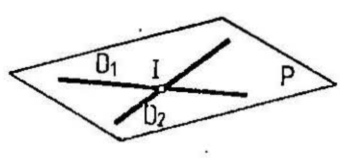


fig. A 1.5

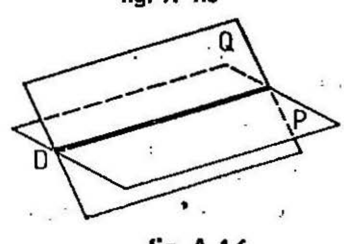


fig. A 1.6

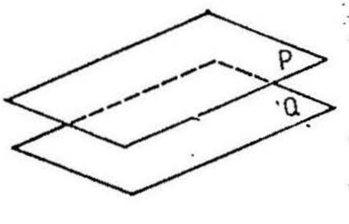


fig. A 1.7

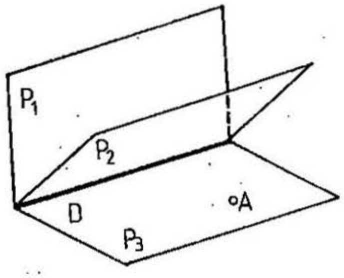


fig. A 1.8

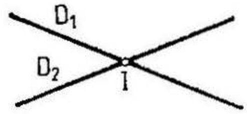


fig. A 1.9

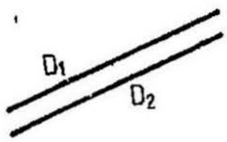


fig. A 1.10

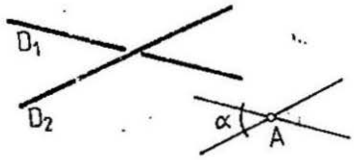


fig. A 1.11

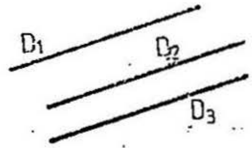


fig. A 1.12

prin muchie și un punct exterior ei. Un fascicul este determinat prin două plane ale sale $[P_1]$, $[P_2]$.

Două drepte distincte în spațiu pot:

— să fie concurente, cînd au un punct comun la distanță finită (fig. A1.9);

— să fie paralele, cînd nu au nici un punct comun, cu excepția punctului de la infinit (fig. A1.10);

— să nu aibă nici un punct comun și nici să fie paralele, atunci se zice că sînt strîmbe în spațiu (fig. A1.11). Unghiul a două asemenea drepte este, prin definiție, unghiul plan dintre paralelele la ele duse printr-un punct A din spațiu.

Două drepte paralele cu o a treia dreaptă (D_3) sînt paralele între ele (fig. A1.12).

Dacă o dreaptă (D) este paralelă cu un plan [P], orice plan [Q] care trece prin (D) taie planul [P] după o dreaptă (D_1) paralelă cu dreapta (D) (fig. A1.13).

Două plane $[P_1]$, $[P_2]$ paralele cu aceeași dreaptă (D) se taie după o dreaptă (D_1) paralelă cu (D) (fig. A1.14).

Orice dreaptă (D) dintr-un plan [P] paralel cu un plan [Q] este și ea paralelă cu planul [Q]. Invers, un plan [Q] paralel cu două drepte dintr-un plan [P] este paralel cu [P] (fig. A1.15).

Trei plane oarecare se taie două cîte două după trei drepte concurente (fig. A1.16). Această proprietate foarte importantă fundamentează transformările geometrice prin omologie și se aplică în numeroase probleme de geometrie descriptivă și perspectivă (de exemplu, intersecții de corpuri în dublu ortogonal sau în axonometrie etc.).

Două plane paralele [P], $[P_1]$ sînt tăiate de un al treilea plan [Q] după două drepte paralele (fig. A1.17).

Două plane paralele determină pe două drepte paralele segmente egale (fig. A1.18; $\overline{AB} = \overline{A'B'}$)

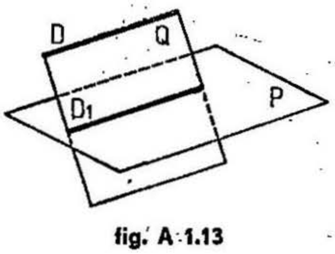


fig. A 1.13

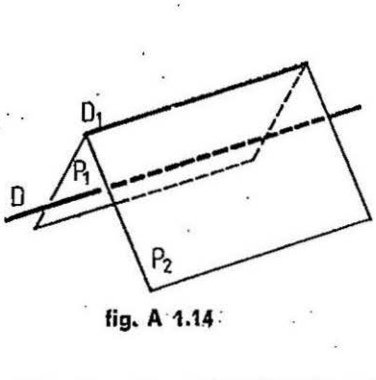


fig. A 1.14

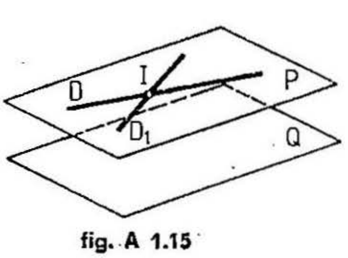


fig. A 1.15

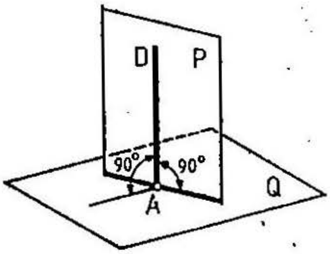


fig. A 1.25

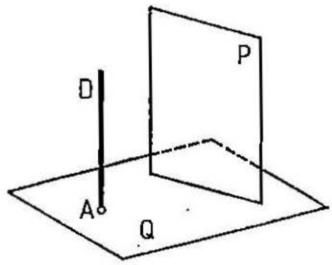


fig. A 1.26

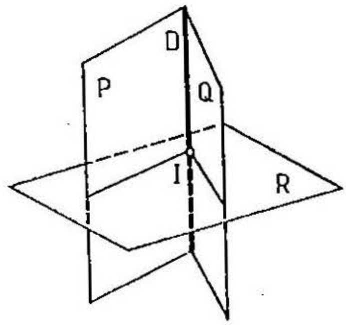


fig. A 1.27

Planul bisector al unui unghi diedru este planul care îl împarte în două diedre egale.
Dacă două plane sînt perpendiculare, orice perpendiculară pe intersecția lor și situată într-unul din plane este perpendiculară pe celălalt plan (fig. A1.25).
Un plan [P] este perpendicular pe un alt plan [Q], dacă conține o perpendiculară pe acesta sau dacă este paralel cu o asemenea dreaptă perpendiculară (D) (fig. A1.26). Un plan și o dreaptă perpendiculare pe același plan sînt paralele între ele.
Dacă două plane [P], [Q] sînt perpendiculare pe un al treilea plan [R], dreapta lor de intersecție (D) este perpendiculară pe planul [R] (fig. A1.27). Locul geometric al dreptelor proiectante ale punctelor unei drepte (D) pe un plan [P] este un plan perpendicular pe planul [P] (fig. A1.28), care se numește *plan proiectant*. Intersecția acestui plan cu planul P este o dreaptă (D'), *proiecția* dreptei (D) pe planul [P]. Unghiul pe care îl fac dreptele (D), (D') între ele măsoară unghiul dreptei (D) cu planul [P]; el este unghiul cel mai mic pe care îl face dreapta (D) cu o dreaptă oarecare a planului [P]. Proiecțiile unui segment pe două plane paralele sînt egale între ele.

Teorema celor trei perpendiculare. Dacă (D'), (Δ') sînt proiecțiile a două drepte din spațiu (D), (Δ) pe planul [P] (fig. A1.29), atunci două din proprietățile de mai jos au drept consecință a treia proprietate:
— dreptele (D), (Δ) sînt perpendiculare;
— una din drepte este paralelă cu [P];
— proiecțiile (D'), (Δ') sînt perpendiculare.
Unghiul poliedru este figura geometrică formată de mai multe plane concurente într-un punct O numit vîrf (fig. A1.30).
Intersecțiile planelor concurente se numesc muchii și mărginesc fețele poliedrului. Dacă unghiul poliedrului este situat de aceeași parte a fețelor se zice că este unghi convex.
Triedrul este unghiul poliedru cu trei fețe și trei muchii. Dacă triedrul are muchiile perpendiculare două cîte două, se zice că este un *triedru tridreptunghic* (fig. A1.31). În acest caz, fiecare muchie este perpendiculară pe fața determinată de celelalte două muchii.

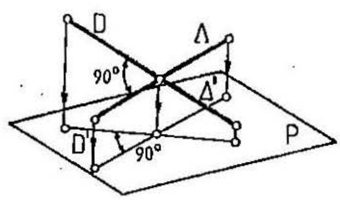


fig. A 1.29

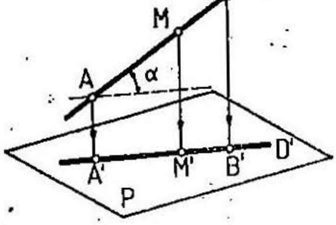


fig. A 1.28

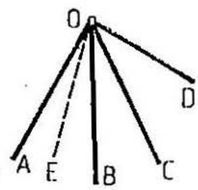


fig. A 1.30

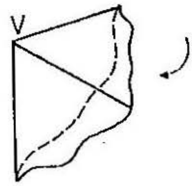


fig. A 1,31

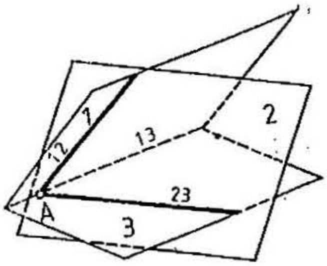


fig. A 1.16

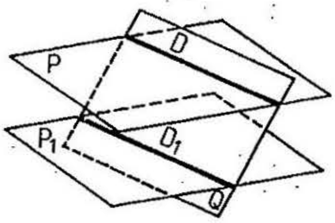


fig. A 1.17

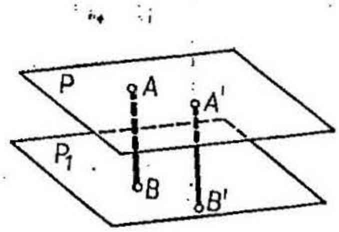


fig. A 1.18

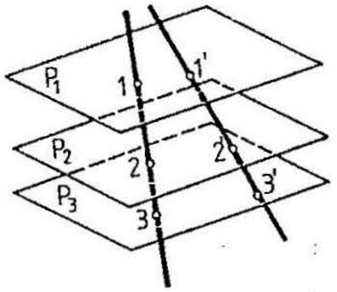


fig. A 1.19

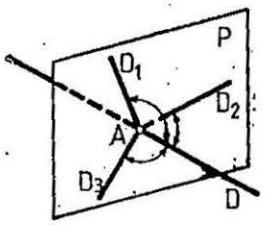


fig. A 1.20

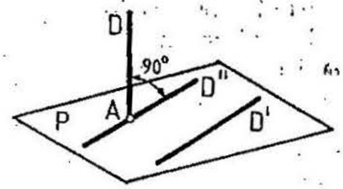


fig. A 1.21

Trei sau mai multe plane paralele determină pe două secante, segmente proporţionale (fig. A1.19; $\overline{12}/\overline{23} = \overline{1'2'}/\overline{2'3'}$).

Într-un punct **A** situat pe dreapta (**D**) se pot duce o infinitate de drepte perpendiculare pe ea, care formează un plan [P] perpendicular pe dreapta (D) (fig. A1.20). Dreapta (D) se numeşte normala pe planul [P]. Dintr-un punct exterior unui plan se poate duce o singură perpendiculară pe el. Un plan [P] are o infinitate de normale, toate paralele între ele.

O dreaptă (D) este perpendiculară pe o dreaptă (D') dintr-un plan [P], dacă este perpendiculară pe paralela ei dusă prin A (fig. A1.21).

O dreaptă perpendiculară pe un plan [P], va fi perpendiculară pe orice plan [Q] paralel cu [P] (fig. A1.22).

Pentru ca o dreaptă să fie perpendiculară pe un plan este suficient să fie perpendiculară pe două drepte concurente ale planului. Printr-un punct al spaţiului se poate duce un plan şi numai unul perpendicular pe o dreaptă. Două plane perpendiculare pe o dreaptă sînt paralele între ele.

Dacă dintr-un punct **O** exterior unui plan se duc pe acest plan perpendiculara şi mai multe oblice, atunci (fig. A1.23):

— perpendiculara **OA** este mai mică decît orice oblică **OB**;

— toate oblicele egal depărtate de piciorul perpendicularei (punctul A) sînt egale şi invers.

Unghiul diedru a două semiplane [P] şi [P_1] (care formează feţele unghiului) este prin definiţie egal cu unghiul plan V dintre dreptele de intersecţie a celor două feţe [P] şi [P_1] pe un plan [Q] perpendicular în punctul O pe muchie (fig. A1.24).

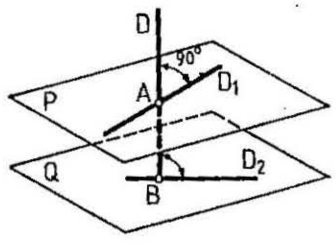


fig. A 1.22

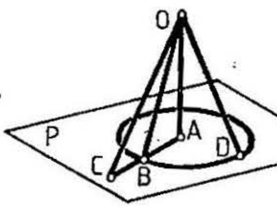


fig. A 1.23

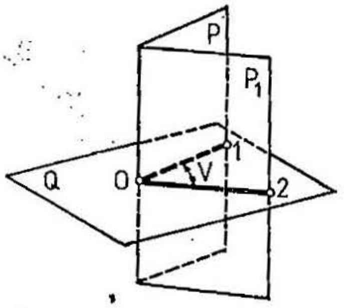


fig. A 1.24

ANEXA 2

PROBLEME DE LOCURI GEOMETRICE PLANE

Se numeşte *loc geometric* figura formată din mulţimea tuturor punctelor din plan (sau din spaţiu) care se bucură de o aceeaşi proprietate. Locurile geometrice se definesc:
— printr-o relaţie metrică ce caracterizează toate punctele locului geometric;
— prin intersecţia a două familii de curbe (sau de suprafeţe în spaţiu) care depind de un parametru şi ale căror puncte comune aparţin locului geometric.

EXEMPLE DE LOCURI GEOMETRICE PLANE

a. Locul geometric (L. G.) al tuturor punctelor situate la o distanţă dată de un punct dat este un cerc cu centrul în punctul dat şi de rază egală cu distanţa dată (fig. A2.1).
b. Locul geometric al tuturor punctelor situate la o distanţă dată de o dreaptă dată se compune din două drepte paralele cu dreapta dată şi aflate la distanţa dată de dreapta dată (fig. A2.2).
c. Locul geometric al tuturor punctelor egal depărtate de două puncte date este mediatoarea segmentului care uneşte cele două puncte (fig. A2.3).
d. Locul geometric al tuturor punctelor situate la distanţă egală de două drepte date îl constituie cele două bisectoare (perpendiculare una pe cealaltă) ale unghiurilor dintre cele două drepte date (fig. A2.4).
e. Locul geometric al tuturor punctelor din care se vede un segment dat sub un unghi dat este un arc de cerc care are drept coardă segmentul dat (fig. A2.5).
Construcţia arcului capabil de unghiul dat α se face observînd că unghiul sub care se vede segmentul $\overline{AB}$ din centrul cercului este 2α (fig. A2.6).
Pentru a determina deci centrul cercului căruia îi aparţine arcul capabil de $\sphericalangle\alpha$, se intersectează mediatoarea segmentului $\overline{AB}$ cu o dreaptă dusă din A la unghiul complementar lui α (adică $90° - \alpha$).
f. Locul geometric al tuturor punctelor pentru care distanţele la două puncte date se află într-un raport dat m: n este un cerc (fig. A2.7).
g. Locul geometric al tuturor punctelor pentru care distanţele la două drepte date se află într-un raport dat m: n este alcătuit din două drepte care trec prin punctul de intersecţie al dreptelor date (fig. A2.8). Exemplul d reprezintă un caz particular al lui g.
h. Locul geometric al tuturor punctelor pentru care pătratele distanţelor la două puncte date au o diferenţă constantă a^2 este o dreaptă perpendiculară pe dreapta care uneşte cele două puncte (fig. A2.9).
i. Locul geometric al tuturor punctelor pentru care pătratele distanţelor la două puncte date au o sumă constantă a^2 este un cerc cu centrul în mijlocul segmentului care uneşte cele două puncte (fig. A2.10).
k. Locul geometric al tuturor punctelor pentru care distanţele la două drepte date au o sumă sau o diferenţă date îl constituie un sistem de patru drepte (fig. A2.11).

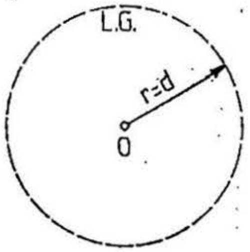


fig. A 2.1

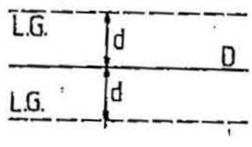


fig. A 2.2

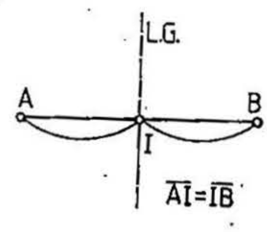


fig. A 2.3

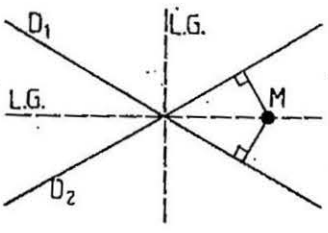


fig. A 2.4

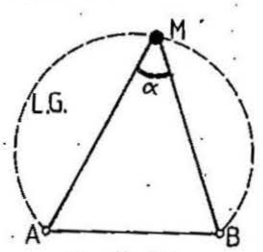


fig. A. 2.5

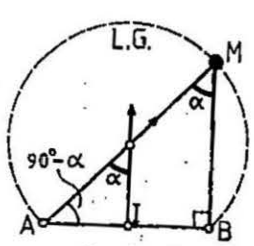


fig. A 2.6

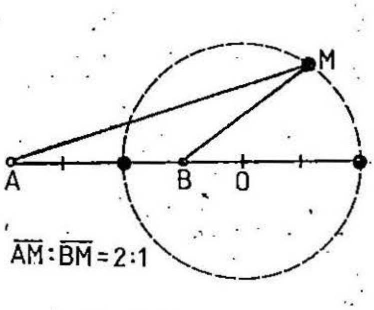


fig. A 2.7

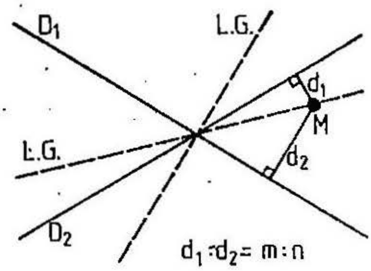


fig. A 2.8

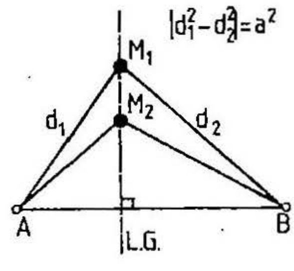


fig. A 2.9

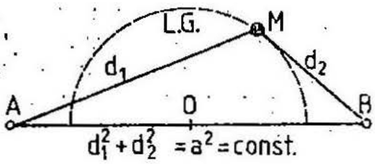


fig. A 2.10

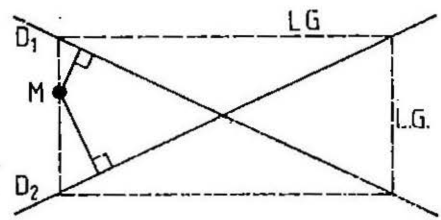


fig. A 2.11

În problemele propuse spre rezolvare mai jos se folosește următoarea *convenție de notații*: se vor nota vîrfurile unui triunghi oarecare cu A, B și C, laturile cu a, b și c, înălțimile cu h_a, h_b și h_c, medianele cu m_a, m_b și m_c, iar bisectoarele cu w_a, w_b și w_c. Raza cercului înscris în triunghiul ABC va fi notată cu r, raza cercului circumscris triunghiului ABC va fi notată cu ρ, iar razele cercurilor exînscrise triunghiului ABC vor fi notate respectiv cu ρ_a, ρ_b, și ρ_c.

Problemele 1...20 se rezolvă prin aplicarea directă a unuia sau a mai multor locuri geometrice plane dintre cele zece exemple precedente. La fiecare problemă se indică în paranteză locul geometric ce trebuie folosit pentru rezolvarea ei.

1. Construiți un cerc de rază dată care trece prin două puncte date (a).

2. Construiți un cerc de rază dată care trece printr-un punct dat și este tangent la o dreaptă dată (a și b).

3. Construiți un cerc de rază dată care trece printr-un punct dat și este tangent la un cerc dat (a).

4. Construiți un cerc de rază dată care este tangent la o dreaptă dată și la un cerc dat (a și b).

5. Construiți un triunghi, cunoscînd a, h_a și m_a (a și b).

6. Construiți un cerc care trece printr-un punct dat și este tangent la o dreaptă dată sau la un cerc dat într-un punct dat (c).

7. Construiți un cerc tangent la două drepte paralele și care trece printr-un punct dat (d și a).

8. Găsiți punctul din care două segmente date se văd sub unghiuri date (e).

9. Găsiți punctul pentru care distanțele la trei drepte se află în raportul dat m: n: q (g).

10. Într-un triunghi oarecare, găsiți punctul pentru care distanțele la cele trei vîrfuri ale triunghiului se află în raportul dat m: n: q (f).

11. Găsiți punctul din care două cercuri date se văd sub unghiuri date (a).

12. Construiți cercul al cărui centru se află pe o dreaptă dată și a cărui circumferință se află situată la distanțe date de două drepte date (k).

13. Construiți punctul pentru care tangentele la trei cercuri date să aibă aceeași lungime (h).

14. Într-un triunghi dat, găsiți punctul care, unit cu vîrfurile triunghiului, determină trei triunghiuri echivalente (de arii egale).

15. Circumscrieți un pătrat unui triunghi echilateral astfel încît cele două figuri să aibă un vîrf comun (e și c).

16. Într-un triunghi, găsiți punctul din care cele trei laturi se văd sub unghiuri egale (e).

17. Găsiți punctul din care trei cercuri date se văd sub unghiuri egale (f).

18. Într-un patrulater dat, găsiți punctul pentru care distanțele la două laturi opuse să aibă o sumă dată, iar distanțele la celelalte două laturi să se afle într-un raport dat m: n.

19. Găsiți punctul de pe circumferința unui cerc dat pentru care suma distanțelor la două drepte date să fie minimă (k).

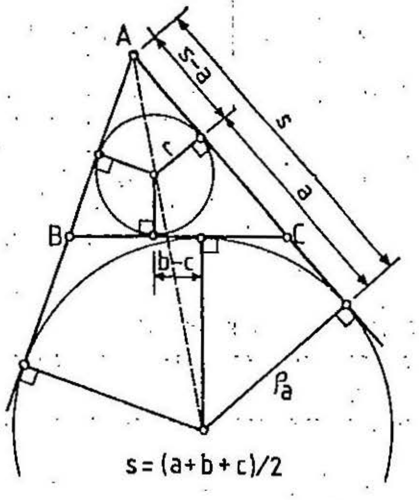


fig. A 2.12

20. Pe o masă de biliard circulară, două bile A și B sînt plasate pe același diametru, în poziții oarecare. Determinați direcția de lansare a unei bile, astfel încît, după ricoșeul din circumferință, să lovească pe cea de a doua bilă.

INDICAȚII ȘI PROPRIETĂȚI SUPLIMENTARE NECESARE REZOLVĂRII PROBLEMELOR 21 ... 35

Se introduc în figură elementele date. Se examinează atent figura, pentru a găsi liniile și unghiurile care, fără a fi date, se pot determina ușor cu ajutorul elementelor date. Se caută apoi o porțiune a figurii ce poate fi determinată de elementele date și poate servi la găsirea celorlalte părți ale figurii finale. În special se urmărește găsirea unor triunghiuri auxiliare ce au trei elemente cunoscute.
Pentru a introduce laturile unui triunghi, sumele sau diferențele lor, se pot utiliza cercul înscris în triunghi și cele trei cercuri exînscrise (fig. A2.12). Dacă se notează cu s semiperimetrul triunghiului ABC, adică $s = (a + b + c)/2$, rezultă:

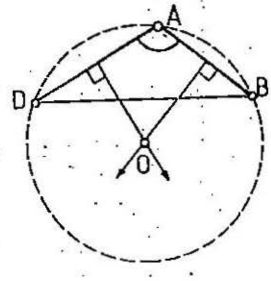


fig. A 2.13

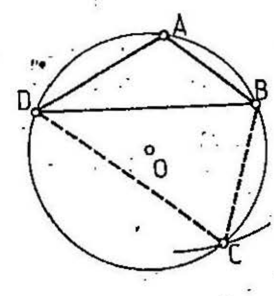


fig. A 2.14

— cercul înscris determină pe laturile triunghiului ABC segmente egale cu $s-a$, $s-b$ și $s-c$ respectiv;
— distanța de la vîrful A la punctele de tangență ale cercului exînscris de rază ρ_a este s;
— distanța dintre punctul de tangență al cercului exînscris și cel al cercului înscris este a;
— distanța dintre punctele de tangență la latura a ale cercurilor înscris și exînscris de rază ρ_a este $b-c$ sau $c-b$; cele două puncte de tangență sînt egal depărtate de vîrfurile B și C.

21. Construiți un patrulater inscriptibil, cunoscînd $\measuredangle A$, $\measuredangle ABD$, $\overline{AC}$ și $\overline{BD}$. Se construiește întîi $\triangle ABD$. La intersecția mediatoarelor laturilor $\overline{AB}$ și $\overline{AD}$ se obține centrul cercului circumscris (fig. A2.13). Vîrful C se obține la intersecția cercului circumscris cu arcul de cerc de lungime $\overline{AC}$ dus din A (fig. A2.14).

22. Construiți un triunghi ABC, cunoscînd a, r și h_b; se notează piciorul înălțimii h_b cu D. Triunghiul dreptunghic BDC se construiește intersectînd semicercul construit pe $\overline{BC}$ cu un arc de cerc de lungime h_b dus din B (fig. A2.15). Se duce apoi bisectoarea din C și, la distanța r de $\overline{BC}$, se obține centrul cercului înscris. Ducînd tangenta la acest cerc din B se obține triunghiul ABC (fig. A2.16).

23. Construiți un triunghi ABC, cunoscînd a, $b + c$ și h_b.

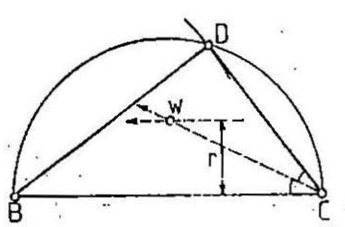


fig. A 2.15

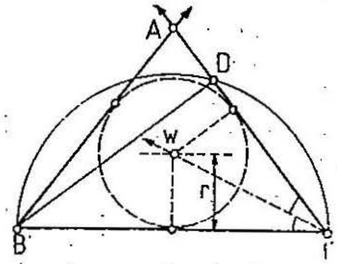


fig. A 2.16

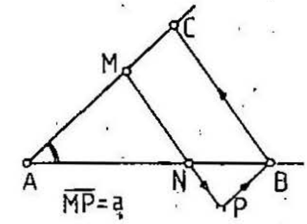


fig. A 2.17

24. Printr-un punct dat, duceţi o dreaptă care să aie două laturi ale unui triunghi astfel încît punc-tele de intersecţie şi extremităţile celei de a treia aturi să se afle pe un cerc.

25. Construiţi un triunghi ABC, cunoscînd a, h_b şi m_a.

26. Construiţi un triunghi ABC, cunoscînd h_a, m_a şi b.

27. Se dau două puncte A şi B şi o dreaptă ce trece prin B. Determinaţi pe dreaptă două puncte X şi Y egal depărtate de B şi astfel încît segmentul $\overline{XY}$ să fie văzut din punctul A sub un unghi dat.

28. Se dau trei puncte A, B şi C şi o dreaptă ce trece prin A. Construiţi un cerc ce trece prin A şi B şi taie dreapta dată într-un punct D, astfel încît dreapta $\overline{DC}$ să fie tangentă la cerc.

29. În triunghiul ABC duceţi o dreaptă $\overline{XY}$ paralelă la $\overline{BC}$, astfel încît $\overline{XY} = \overline{XB} + \overline{YC}$.

30. Printr-un punct dat, duceţi o dreaptă care să determine într-un unghi dat un triunghi de perimetru dat.

31. Construiţi un triunghi, cunoscînd ρ, ρ_a şi w_a.

32. Construiţi un triunghi, cunoscînd ρ, ρ_a şi $b-c$.

33. Construiţi un triunghi, cunoscînd a, ρ şi $b+c$.

34. Construiţi un triunghi, cunoscînd a, ρ şi $b-c$.

35. Construiţi un triunghi, cunoscînd h_a, ρ şi $a+b+c$.

PROBLEME DE CONSTRUCŢII GEOMETRICE CARE SE POT REZOLVA PRIN OMOTETIE

În problemele 36...39 se dau lungimea unui segment şi anumite unghiuri şi rapoarte. Pentru rezolvare, se face abstracţie de lungimea dată şi se construieşte o figură care să aibă unghiurile şi rapoartele date. Figura astfel rezultată este asemenea cu cea căutată şi care se poate obţine prin omotetie, introducînd lungimea segmentului dat.

36. Construiţi un triunghi cunoscînd $\sphericalangle A$, a şi b: c. Se face abstracţie de lungimea a şi se construiesc pe laturile unghiului $\sphericalangle A$ două segmente $\overline{AM}$ şi $\overline{AN}$ aflate în raportul b:c. Triunghiul ANM este asemenea cu triunghiul căutat ABC (fig. A2.17). Se prelungeşte $\overline{MN}$ pînă în P, astfel încît $\overline{MP} = a$. Se duce prin P o paralelă la $\overline{AM}$ care intersectează latura $\overline{AN}$ în B. Vîrful C se obţine ducînd prin B o paralelă la $\overline{MN}$.

37. Construiţi un pătrat cunoscînd diferenţa dintre diagonală şi latură.

38. Construiţi un triunghi, cunoscînd A, b şi a: c.

39. Construiţi un triunghi, cunoscînd h_a, h_b şi h_c.

În problemele 40...46 figura trebuie să aibă o poziţie determinată faţă de anumite linii sau puncte date. În acest caz trebuie să se facă abstracţie de una din condiţiile problemei, astfel încît să se obţină un sistem de figuri asemenea şi poziţionate asemănător. Figurile căutate se obţin uşor prin asemănare (proiecţie centrală sau conică). Condiţia de care se face abstracţie iniţial poate fi:

— un segment de lungime dată;

— un punct care trebuie să se afle pe o dreaptă dată;

— o dreaptă care trebuie să treacă printr-un punct dat.

40. Într-un triunghi ABC înscrieţi un alt triunghi abc, astfel încît laturile sale să fie paralele cu trei drepte date.

41. Înscrieţi un pătrat într-un triunghi dat.

42. Construiţi un triunghi isoscel, cunoscînd înălţimea şi mediana corespunzătoare uneia din cele două laturi egale.

43. Se dau două raze într-un cerc. Duceţi o coardă care să fie împărţită de cele două raze în trei părţi egale.

44. Înscrieţi un triunghi isoscel într-un cerc, cunoscînd suma dintre înălţime şi bază.

45. Pe o dreaptă dată (D) determinaţi un punct M care să se afle la distanţă egală de un punct dat A şi de o dreaptă dată (Δ).

Rezolvare. Problema este foarte interesantă, întrucît soluţia cea mai evidentă pare a fi intersecţia dintre dreapta (D) şi o parabolă cu focarul în A şi axa dreapta (Δ). Într-adevăr, toate punctele de pe parabolă satisfac condiţia de a fi egal depărtate de punctul A şi de dreapta (Δ). Această construcţie geometrică nu este riguroasă întrucît parabola se construieşte prin puncte (fig. A2.18). Acesta este cazul multor probleme de construcţii geometrice rezolvate prin intersecţii de locuri geometrice mai complicate (elipse, parabole, hiperbole etc.). Construcţia riguroasă se obţine prin omotetie. Se face abstracţie de punctul dat A. Se presupune că soluţia căutată este punctul M_1 (fig. A2.19). Punctul A_1 dat ar trebui deci să se afle pe cercul de rază r_1 cu centrul în M_1, pentru a satisface condiţiile problemei. Întrucît punctul A se află de fapt în afara cercului de rază r_1, adevărata configuraţie va fi mai mare (şi asemenea) cu cea presupusă. Se va folosi deci punctul I de intersecţie al dreptelor (D) şi (Δ) drept centru de omotetie (fig. A2.20). Intersectînd pe AI cu cercul de rază r_1 se obţine punctul A_1. Se duce apoi prin punctul A o paralelă

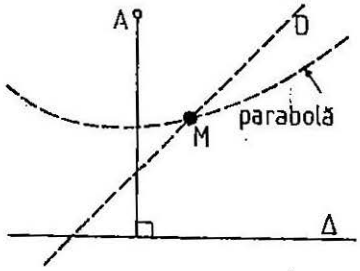


fig. A 2.18

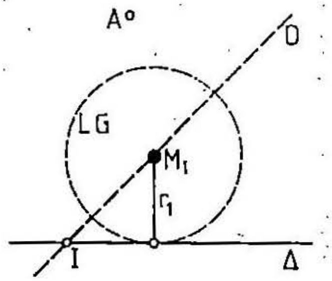


fig. A 2.19

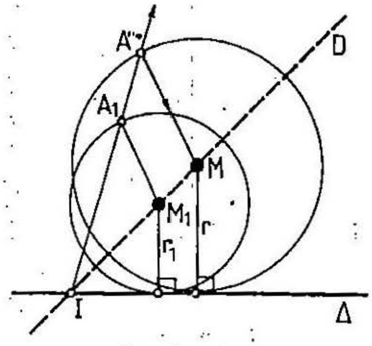


fig. A 2.20

la A_1M_1 şi se obţine punctul căutat M. Întrucît se observă că punctul A se află pe un cerc asemenea cu cercul r_1 şi care are centrul în M, problema se poate reformula astfel: construiţi cercul care trece printr-un punct dat, are centrul pe o dreaptă dată şi este tangent la o altă dreaptă dată.

46. Construiţi un cerc care să treacă prin două puncte date şi să fie tangent la o dreaptă dată.

ANEXA 3

CONSTRUCŢII GRAFICE UZUALE

Trasarea mediatoarei unui segment de dreaptă. Fie segmentul de dreaptă $\overline{AB}$ (fig. A3.1). Cu vîrful compasului în A şi apoi în B, se trasează două arce de cerc de aceeaşi rază (mai mare decît jumătatea segmentului $\overline{AB}$). Se unesc cele două puncte de intersecţie ale arcelor de cerc. Rezultă mediatoarea 12 a segmentului $\overline{AB}$.

Trasarea unei perpendiculare printr-un punct dat, pe un segment de dreaptă. Fie O punctul dat pe segmentul $\overline{AB}$ (fig. A3.2). Cu piciorul compasului în punctul O se determină două puncte 1 şi 2 pe $\overline{AB}$, egal depărtate de O. Din punctele 1 şi 2 se duc două arce de cerc asemănător construcţiei precedente. Rezultă dreapta 34, perpendiculară în punctul O pe $\overline{AB}$.

Trasarea unei perpendiculare pe un segment dat printr-un punct exterior. Se aşază piciorul compasului în punctul C (punct exterior segmentului $\overline{AB}$) şi se duce un arc de cerc (fig. A3.3). Arcul de cerc taie segmentul $\overline{AB}$ în punctele 1 şi 2, din care se duc arce de cerc de rază egală, care se intersectează în punctul 3. Dreapta C3 este perpendiculara căutată.

Trasarea unei perpendiculare în punctul extrem al unui segment dat. Să se traseze o perpendiculară în punctul B pe segmentul $\overline{AB}$ (fig. A3.4). Se aşază piciorul compasului în punctul B şi se trasează un arc de cerc de rază $\overline{1B}$. Cu aceeaşi rază se duce un arc de cerc din punctul 1. Cele două arce se intersectează în punctul 2. Se uneşte punctul 1 cu punctul 2 şi se prelungeşte cu segmentul $\overline{23}$ egal cu segmentul $\overline{12}$. Dreapta 3B este perpendiculara căutată.

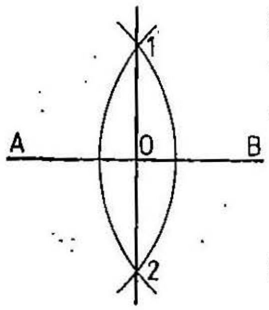


fig. A 3.1

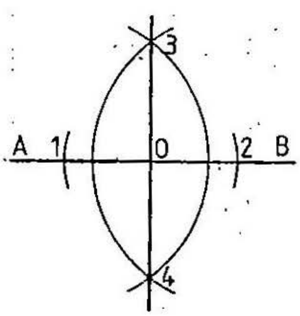


fig. A 3.2

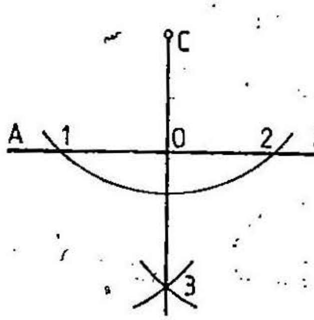


fig. A 3.3

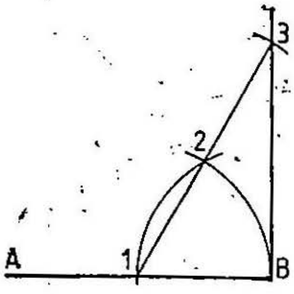


fig. A 3.4

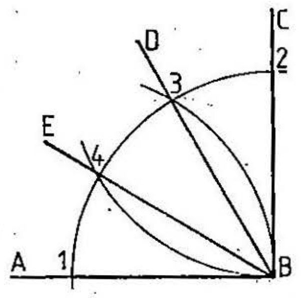


fig. A 3.5

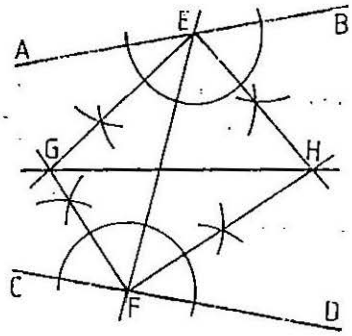


fig. A 3.6

Împărțirea unui unghi drept în trei părți egale. Se așază piciorul compasului în punctul B și se duce un arc de cerc care taie $\overline{AB}$ și $\overline{BC}$ în punctul 1, respectiv 2 (fig. A3.5). Din punctele 1 și 2 se duc arce de cerc de rază $\overline{1B}$. Ele intersectează primul arc în punctele 3 și 4. Dreptele BE și BD împart unghiul drept în trei părți egale.

Construirea bisectoarei unui unghi cu vîrful inaccesibil. Se duce o secantă oarecare EF (fig. A3.6). Se construiesc bisectoarele unghiurilor formate de secantă și de cele două laturi ale unghiului dat. La intersecția acestor bisectoare se află punctele G și H. Dreapta GH este bisectoarea căutată.

Trasarea printr-un punct exterior a unei drepte concurente cu două drepte date. Fie dreptele AB și CD concurente inaccesibil (fig. A3.7). Se cere să se ducă prin punctul exterior E o dreaptă concurentă cu cele două drepte. Se formează cu punctul E un triunghi care se sprijină în punctul F pe CD și în punctul G pe AB. Triunghiul poate fi absolut oarecare sau se pot lua laturi după anumite unghiuri pentru facilitarea construcției (de exemplu, EF poate fi verticală). Dintr-un punct I ales arbitrar pe dreapta CD se duce o dreaptă paralelă cu FG care taie pe AB în L și apoi o altă dreaptă paralelă cu EF (fig. A3.8). Ducînd din L o paralelă la EG, aceasta intersectează paralela la EF în H, alcătuind astfel un triunghi asemenea cu triunghiul EFG. Dreapta EH este dreapta căutată.

Construirea pentagonului regulat atunci cînd se cunoaște latura. Prin punctele A și B (unde AB este latura) se duc două arce de cerc cu raza egală cu latura (fig. A3.9). În punctul B se ridică o perpendiculară pînă în punctul F situat pe arcul AC. Cu centrul în N (mijlocul laturii AB) și cu raza NF se duce un arc de cerc pînă în G (pe prelungirea lui AB). Cu centrul în A și apoi în B, și cu raza AG se duc două arce de cerc care dau punctele E și C la intersecția cu primele două arce și punctul D la intersecția cu mediatoarea lui AB.

Construirea hexagonului regulat atunci cînd se cunoaște latura. Din punctele A și B (unde AB este latura) se duc două arce de cerc de rază egală cu latura AB (fig. A3.10). Intersecția lor (punctul O) este centrul cercului circumscris hexagonului regulat. Se duce deci un arc de cerc cu centrul în O și raza egală cu latura AB; se obțin punctele F și C.

Ducînd alte două arce egale cu centrele în F și C, se obțin punctele E și D.

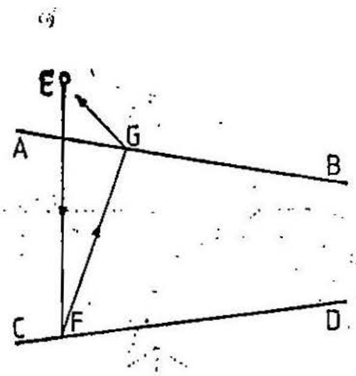


fig. A 3.7

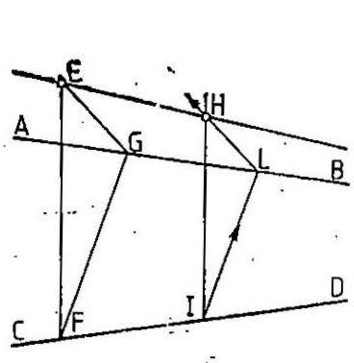


fig. A 3.8

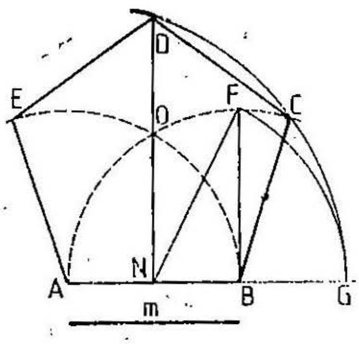


fig. A 3.9

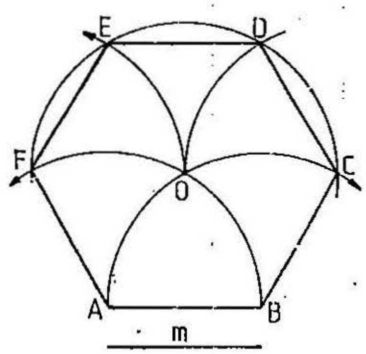


fig. A 3.10

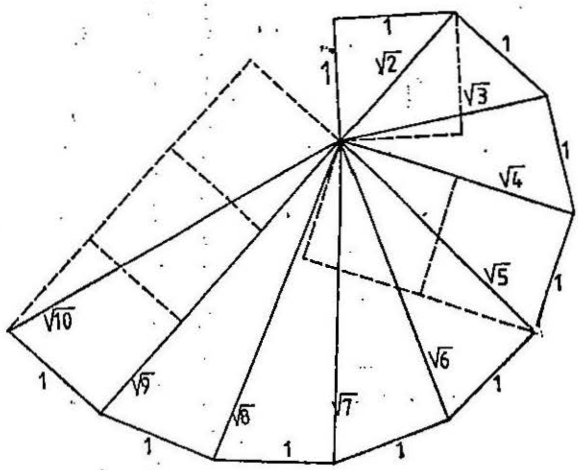


fig. A 3.11

Construcţii auxiliare de segmente de dreaptă aflate în rapoarte date. Avînd un segment de lungime egală cu unitatea, se pot construi pe rînd segmente egale cu $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{10}$ etc. Pentru aceasta se construiesc (fig. A3.11) triunghiuri dreptunghice succesive, ale căror ipotenuze sînt catetele mari ale triunghiurilor precedente. Astfel, $\sqrt{2}$ este diagonala pătratului de latură 1 (fig. A3.12). Construcţia se poate simplifica observînd că, de exemplu, $\sqrt{5}$ este diagonala unui dreptunghi de laturi 1, respectiv 2 (fig. A3.13), iar $\sqrt{10}$ este diagonala unui dreptunghi de laturi 1, respectiv 3 (fig. A3.14) ş.a.m.d.

Construcţia lui $\sqrt{2}/2$ se poate efectua luînd jumătate din unitate şi construind diagonala pătratului de această latură (fig. A3.15). În mod asemănător, $\sqrt{3}/3$ se poate obţine luînd a treia parte din unitate şi construind două triunghiuri dreptunghice succesive, astfel încît să se ajungă la raportul căutat (fig. A3.16).

Raportul $\sqrt{5}/2$, necesar construcţiei unor poliedre regulate şi a unor figuri plane uzuale (de exemplu, pentagonul regulat), se poate obţine luînd jumătate din diagonala unui dreptunghi de laturi 1, respectiv 2 (fig. A3.17).

Construirea unui heptagon regulat atunci cînd se cunoaşte latura. Se ridică în A (unde AB este latura heptagonului) o perpendiculară care se intersectează cu arcul de cerc de centru B şi rază dublul laturii (fig. A3.18); se obţin punctele I şi H. Bisectoarea unghiului ∡IBH se intersectează cu perpendiculara din A în punctul P. Cu rază BP se duc două arce de cerc cu centrele în A şi B; ele se întîlnesc în punctul O, centrul cercului circumscris heptagonului; se iau în compas laturi egale pe circumferinţă.

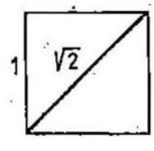


fig. A 3.12

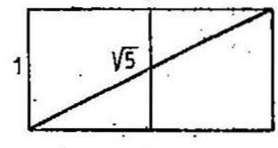


fig. A. 3.13

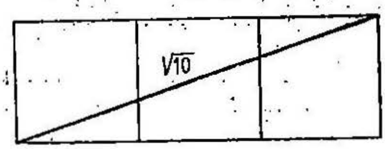


fig. A 3.14

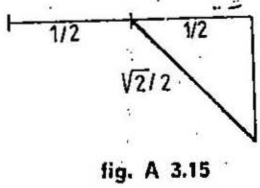


fig. A 3.15

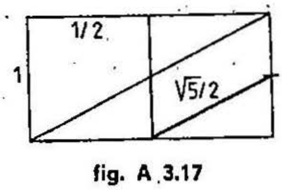


fig. A 3.17

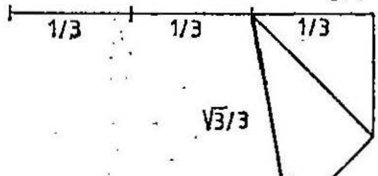


fig. A 3.16

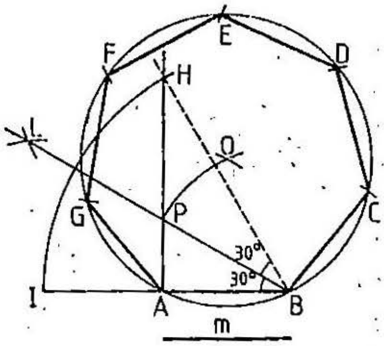


fig. A 3.18

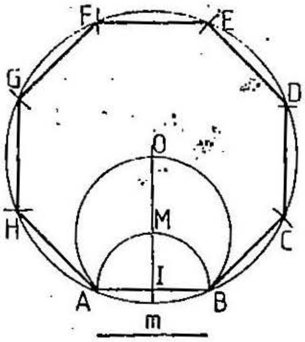


fig. A 3.19

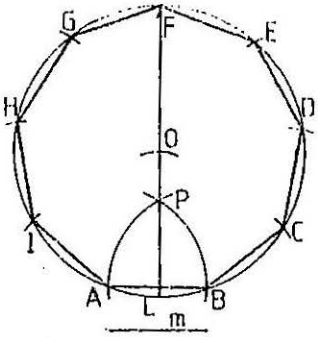


fig. A 3.20

Construirea unui octogon regulat atunci cînd se cunoaşte latura. Se duce mediatoarea segmentului AB şi apoi semicercul sprijinit pe segmentul AB (fig. A3.19). Mediatoarea şi semicercul se taie în punctul M. Cu centrul în punctul M şi raza AM se duce un arc de cerc care taie mediatoarea în punctul O, centrul cercului circumscris octogonului. Se ia latura în compas şi se construiesc laturile octogonului pe circumferinţă.

Construirea unui poligon regulat cu nouă laturi atunci cînd se cunoaşte latura. Cu centrul în punctele A şi B se duc arce de cerc cu raza egală cu latura, care se întîlnesc pe mediatoarea lui AB în punctul P (fig. A3.20). Se ia segmentul PO egal cu jumătatea laturii. Punctul O este centrul cercului circumscris.

Construirea unui poligon regulat cu oricîte laturi, atunci cînd se cunoaşte latura. Pentru a construi, de exemplu, un *decagon regulat* (poligon cu zece laturi egale), pe latura AB se construieşte un triunghi echilateral ANB (fig. A3.21). Se divide NB în şase părţi egale şi se aşază diviziuni egale pe mediatoarea segmentului AB, începînd de la punctul N în sus. Întrucît vrem să construim un decagon regulat, cea de a zecea diviziune este centrul cercului circumscris.

Înscrierea unui pentagon regulat într-un cerc de rază dată. Se duc două diametre perpendiculare, AM şi NP (fig. A3.22). Punctul H este jumătatea segmentului OP. Cu centrul în punctul H şi raza AH se duce un arc de cerc care taie diametrul NP în punctul Q. Segmentul AQ are lungimea egală cu latura pentagonului regulat înscris în cerc. Se va purta deci segmentul AQ pe circumferinţă, pentru a obţine pentagonul regulat înscris în cerc.

Înscrierea unui heptagon regulat într-un cerc de rază dată. Se duc două diametre perpendiculare AH şi IL în cercul de rază dată (fig. A3.23). Se duce un arc de cerc, cu centrul în H şi raza segmentul OH, care taie circumferinţa în M şi N. Jumătatea segmentului MN, adică PM, este latura heptagonului înscris în cerc. Acest segment se poartă pe circumferinţă, obţinîndu-se heptagonul.

Înscrierea unui poligon regulat cu nouă laturi într-un cerc de rază dată. Se duc două diametre perpendiculare AP şi MN (fig. A3.24). Cu centrul în punctul P şi raza PO, se duce un arc de cerc care taie circumferinţa în punctele G şi D. Cu centrul în R şi raza RL = OP se descrie un arc de cerc. Apoi, cu centrul în L şi cu aceeaşi rază se duce un alt arc de cerc. Cele două arce se taie în Q. Dreapta

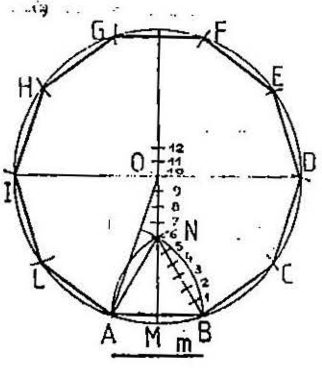


fig. A 3.21

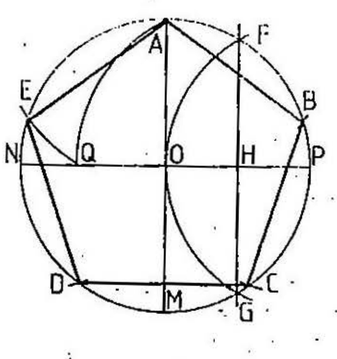


fig. A 3.22

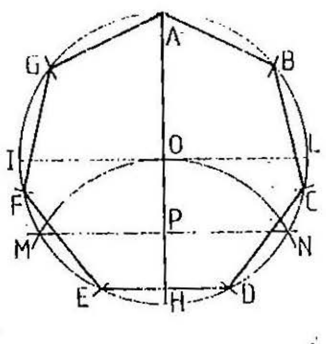


fig. A 3.23

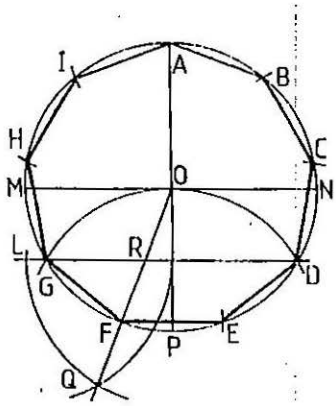


fig. A 3.24

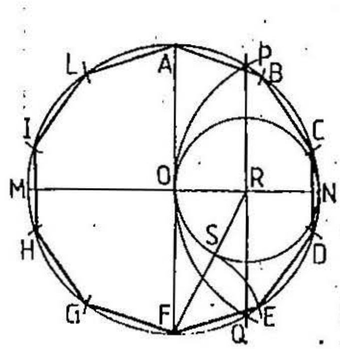


fig. A 3.25

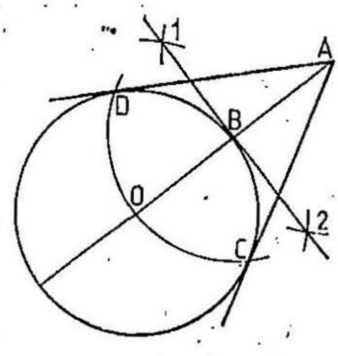


fig. A 3.27

OQ taie circumferința în F. Segmentul GF este latura poligonului regulat cu nouă laturi înscris în cerc.

Înscrierea decagonului regulat într-un cerc de rază dată. Se duc două diametre perpendiculare AF și MN (fig. A3.25). Cu centrul în punctul N și raza ON se duce un arc de cerc pînă în punctele P și Q. Rezultă punctul R pe MN. Se duce cercul cu centrul în R și raza RO. Cercul este tăiat de dreapta RF în punctul S. Segmentul SF este latura decagonului regulat înscris în cerc.

Împărțirea unui cerc într-un număr oarecare de părți egale. Se duc diametrele perpendiculare AN și PQ (fig. A3.26). Se împarte segmentul AN în unsprezece diviziuni egale. Cu centrele în punctele A și N și cu raza AN, se duc două arce de cerc care se taie în punctele R și S. Din aceste puncte se duc drepte prin diviziunile impare și se obțin vîrfurile poligonului regulat cu unsprezece laturi.

Construirea tangentelor la un cerc duse printr-un punct exterior dat. Se unește centrul O cu punctul A (fig. A3.27). Se obține mijlocul segmentului OA, punctul B, din care se duce un cerc de rază OB, obținîndu-se punctele de tangență D și C.

Construirea tangentelor comune a două cercuri inegale. În cercul mare, se construiește un cerc concentric de rază egală cu diferența razelor celor două cercuri date (fig. A3.28). Acest cerc interior este tăiat de cercul cu diametrul OP în punctele M și N. Dreptele OM și ON prelungite taie cercul mare în punctele **1** și **2**, puncte de tangență ale tangentelor comune celor două cercuri. Celelalte două puncte de tangență, **3** și **4**, se obțin ducînd prin punctul **P** paralele la dreptele **O1** și **O2**. Dreptele **13** și **24** sînt tangentele comune celor două cercuri date.

Construcția poligoanelor regulate pornind de la aceeași latură. Figura A3.29 ilustrează construcția poligoanelor regulate cu diverse numere de laturi, triunghi echilateral, pătrat, pentagon, hexagon, octogon, decagon și dodecagon. Toate laturile celor șapte poligoane regulate sînt egale. Se pot observa corespondențele vîrfurilor poligoanelor cu număr dublu de laturi, de exemplu, triunghiul echilateral cu hexagonul regulat și cu dodecagonul regulat etc.

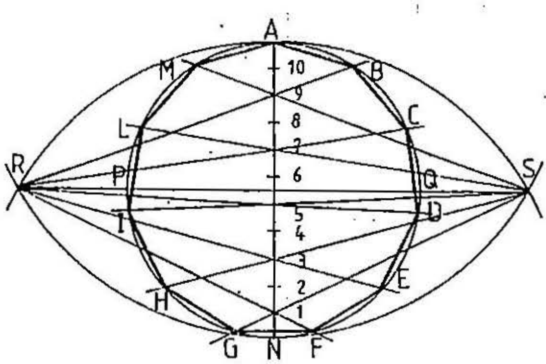


fig. A 3.26

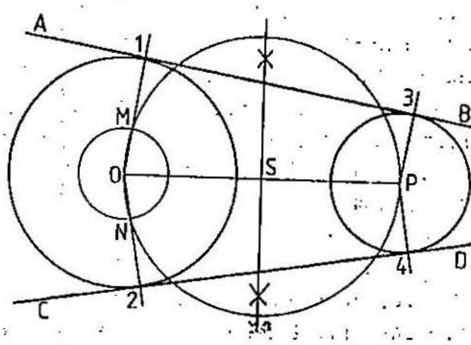


fig. A 3.28

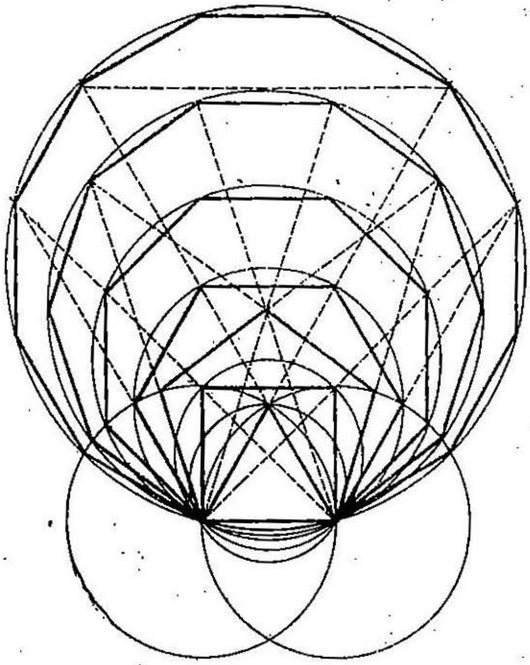


fig. A 3.29

EXEMPLU DE TRATARE EXHAUSTIVĂ A UNEI PROBLEME DE INTERSECȚIE DE POLIEDRE

Se dă un cub de muchie 6 cm, așezat cu un vîrf în planul orizontal de proiecție în așa fel încît una din diagonalele sale interioare să fie în poziție verticală. Proiecția orizontală a cubului este un hexagon regulat care, rotit cu 30° în jurul centrului său, constituie baza unei piramide drepte hexagonale cu înălțimea de 18 cm.
Desenați în dublă proiecție ortogonală și axonometrie izometrică intersecția dintre cub și piramidă, precum și solidul (corpul) comun. Desenați secțiuni orizontale caracteristice prin ansamblu. Desenați desfășurata ansamblului și realizați o machetă din hîrtie. Scoateți cubul din piramidă și așezați-l pe planul orizontal de proiecție (cu golul rămas în el); desenați-l în dublă proiecție ortogonală .Considerați apoi cubul plin și detașați cele două bucăți de piramidă. Așezați-le cu o față în planul orizontal de proiecție și desenați-le în dublă proiecție ortogonală.

ANEXA 4

PROBLEME ȘI APLICAȚII DE GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ ȘI AXONOMETRIE

Problemele și aplicațiile selectate de geometrie descriptivă și axonometrie sînt grupate în șapte categorii. Unele dintre probleme sînt foarte simple, altele sînt ceva mai complicate, iar altele sînt foarte dificile. Scopul problemelor îl constituie dezvoltarea, pe baza exercițiilor, a vederii și înțelegerii în spațiu. Deși nu este necesar să fie parcurse toate problemele, este foarte importantă tratarea aprofundată, chiar exhaustivă, a fiecărui exercițiu abordat. O analiză aprofundată evidențiază aspecte și laturi neașteptate ale problemei studiate și completează uneori în mod surprinzător cunoașterea sa. De aceea, în cazul problemelor mai complicate se recomandă analiza în proiecție dublu ortogonală sau în trei proiecții, construcția axonometriei, construcția de machete simple de hîrtie, studiul unor secțiuni paralele succesive (orizontale, verticale, de capăt sau oarecare), studiul desfășuratelor etc. Se pot propune sau inventa variante de aplicații pe o temă dată. Practic, nu există limite în tratarea creativă a unei asemenea probleme.

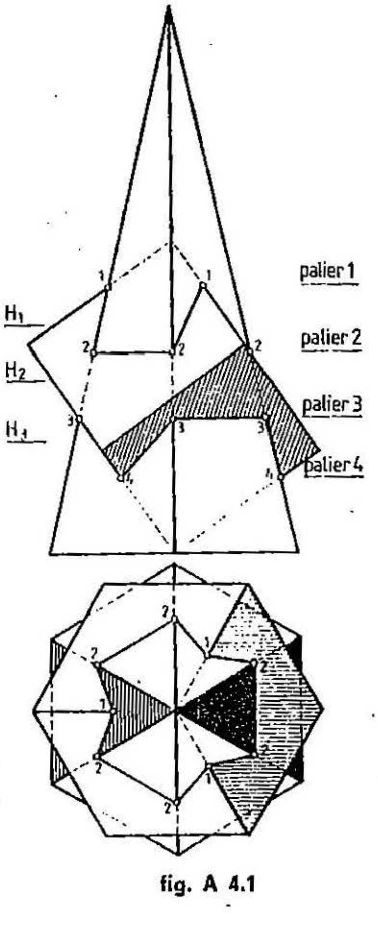


fig. A 4.1

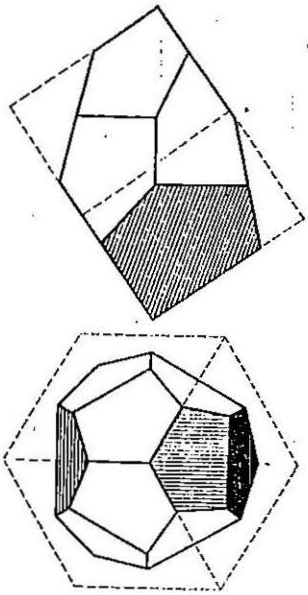


fig. A 4.2

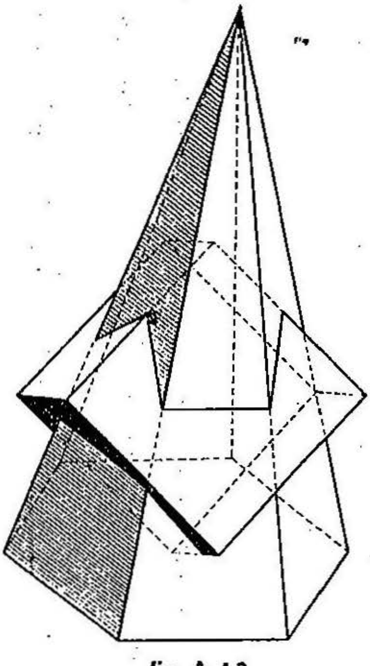


fig. A 4.3

Construcţia în dublă proiecţie ortogonală a cubului aşezat pe un vîrf se cunoaşte de la subcapitolul 5.2, iar construcţia piramidei se obţine imediat (fig. A4.1). Punctele de intersecţie a muchiilor celor două poliedre se obţin uşor, datorită proprietăţilor de simetrie şi coaxialitate ale ansamblului; ele se află situate pe patru paliere. Toate cele patru paliere se pot determina în proiecţie verticală, utilizînd intersecţia muchiilor cu două feţe ale cubului şi două feţe ale piramidei care se află toate în plane de capăt (trei din aceste feţe sînt reprezentate haşurat în proiecţie orizontală).
Figura A4.2 reţine din intersecţie corpul comun celor două poliedre. Corpul comun este reprezentat în proiecţie orizontală şi proiecţie verticală. Axonometria intersecţiei este ilustrată în figura A4.3, iar în figurile A4.4, A4.5 şi A4.6 sînt desenate secţiunile orizontale prin ansamblu la cotele H_1, H_2 şi H_3.

Macheta intersecţiei se poate realiza fie considerînd cubul întreg şi piramida secţionată (desfăşurata piramidei secţionate este cea din figura A4.7), fie considerînd piramida întreagă şi cubul secţionat (desfăşurata cubului secţionat este cea din figura A4.8). Dacă cubul secţionat se aşază pe planul orizontal de proiecţie, reprezentarea lui în dublă proiecţie ortogonală este cea din figura A4.9. În mod asemănător, piramida secţionată poate fi aşezată cu o faţă laterală în planul orizontal de proiecţie. Reprezentarea ei în dublă proiecţie ortogonală este cea din figura A4.10.

1. Probleme de secţiuni plane

Rezolvaţi secţiunile plane din figurile A4.11...
...A4.19.

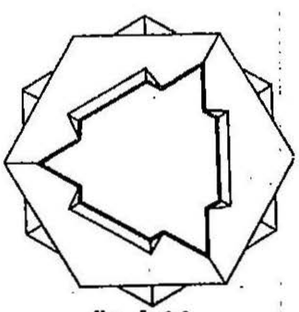


fig. A 4.4

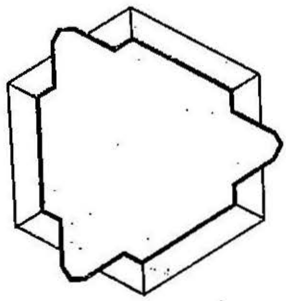


fig. A 4.5

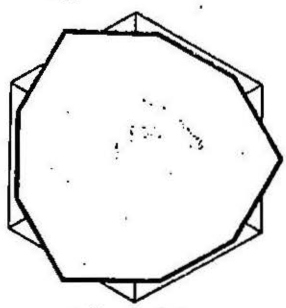


fig. A 4.6

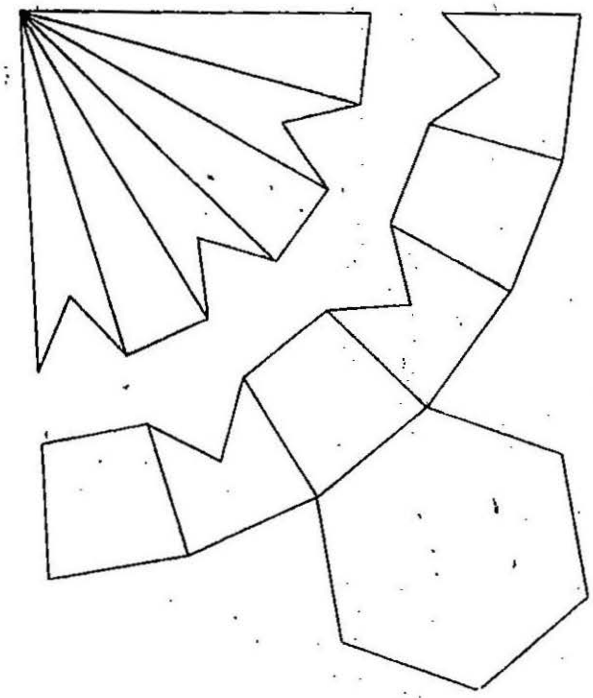


fig. A 4.7

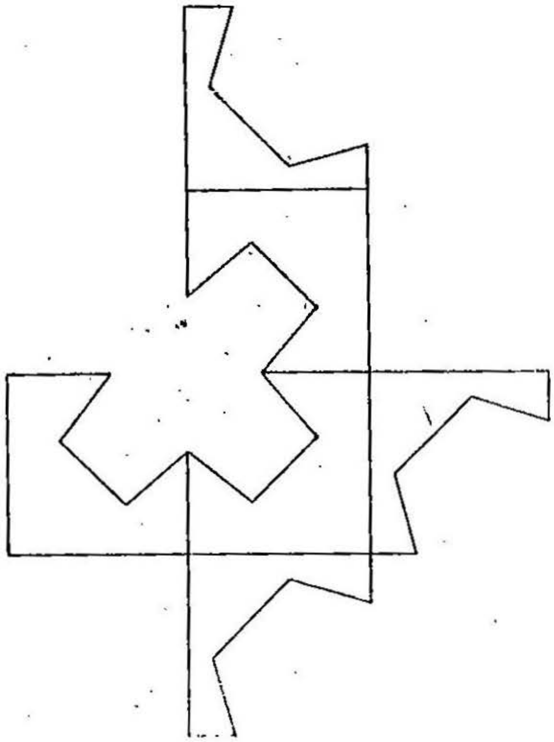


fig. A 4.8

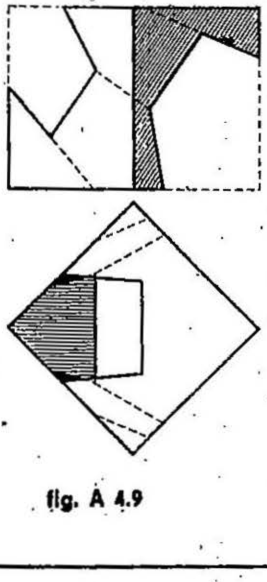


fig. A 4.9

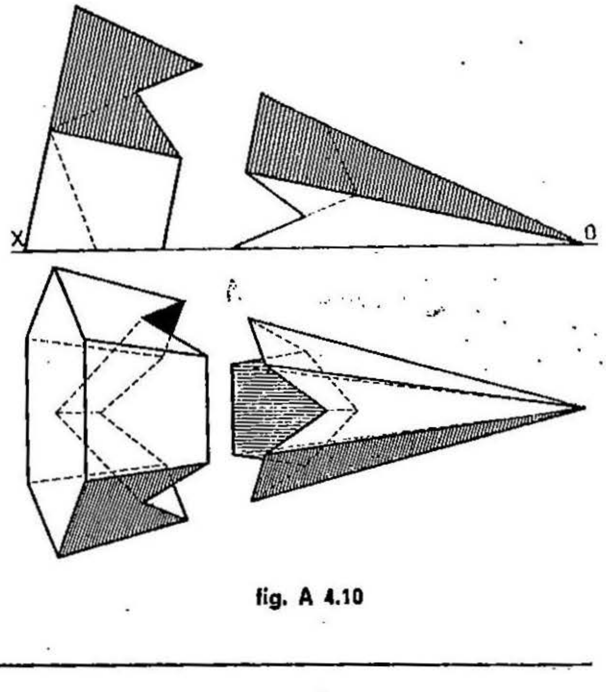


fig. A 4.10

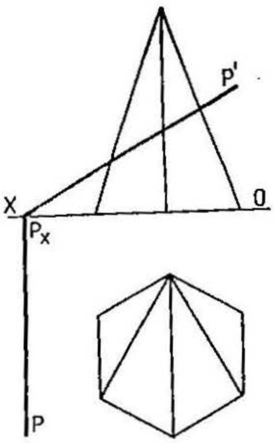


fig. A 4.11

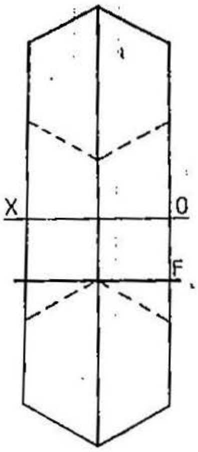


fig. A 4.12

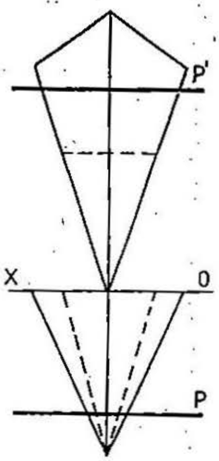


fig. A 4.13

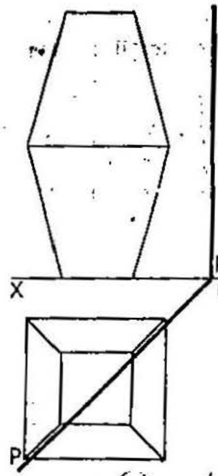


fig. A 4.14

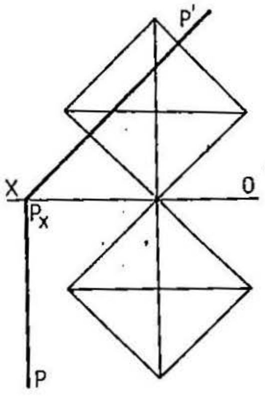


fig. A 4.15

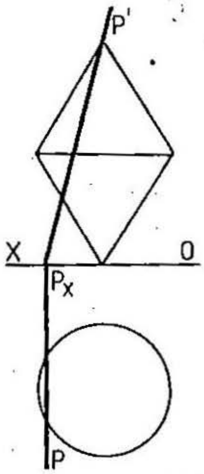


fig. A 4.16

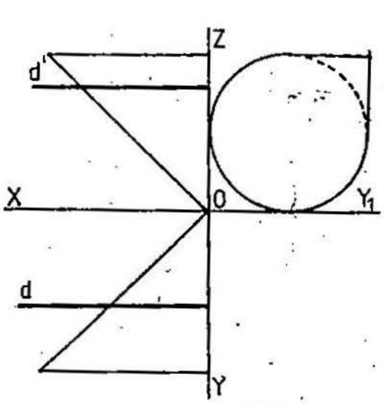


fig. A 4.17

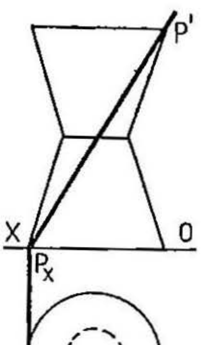


fig. A 4.18

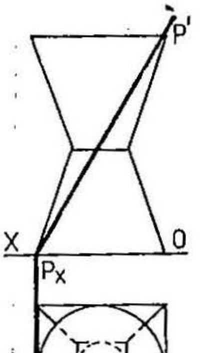


fig. A 4.19

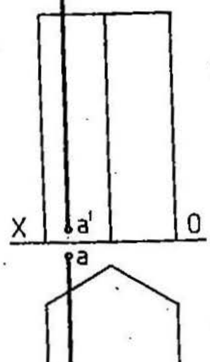


fig. A 4.20

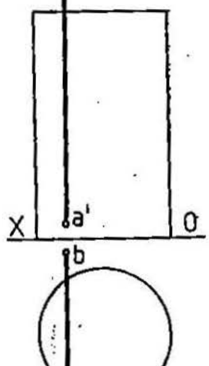


fig. A 4.21

2. Intersecții cu drepte

Rezolvați intersecțiile cu drepte ale volumelor din figurile A4.20...A4.39. Pentru economie de spațiu, pe unele figuri au fost desenate mai multe drepte care intersectează volumul respectiv.

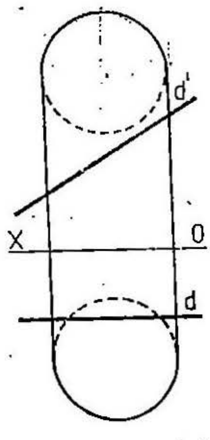


fig. A 4.22

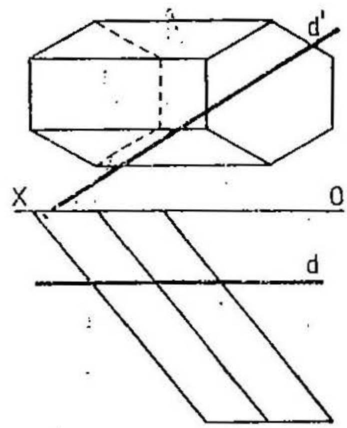


fig. A 4.23

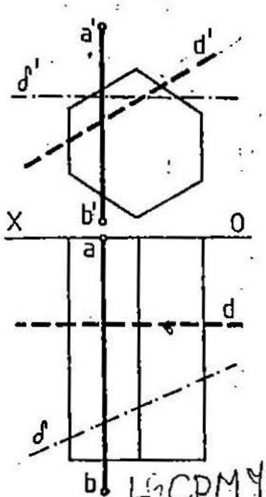


fig. A 4.24

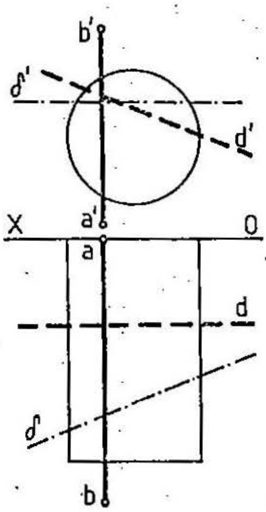


fig. A 4.25

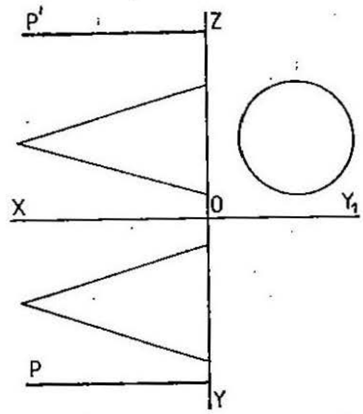


fig. A 4.26

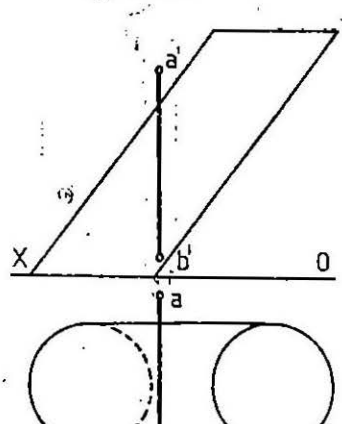


fig. A 4.27

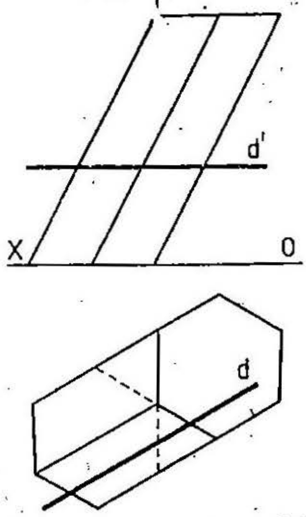


fig. A 4.28

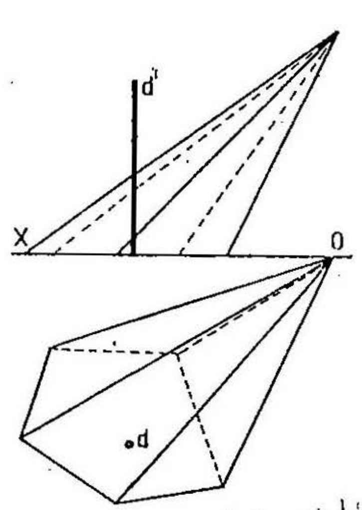


fig. A 4.29

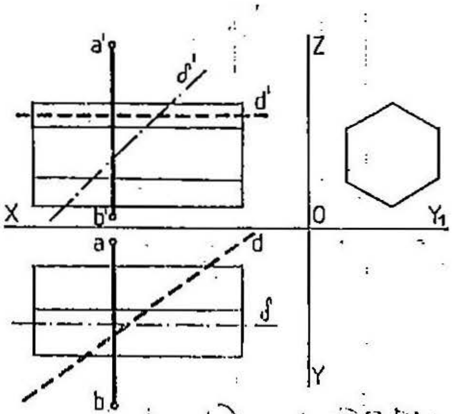


fig. A 4.30

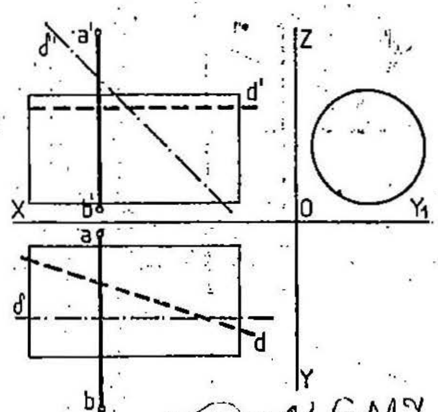


fig. A 4.31

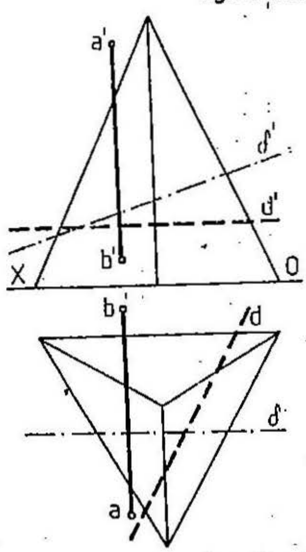


fig. A 4.32

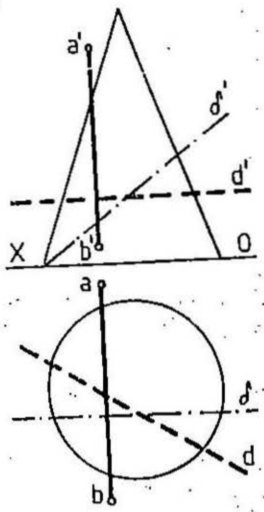


fig. A 4.33

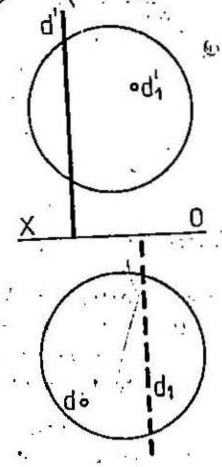


fig. A 4.34

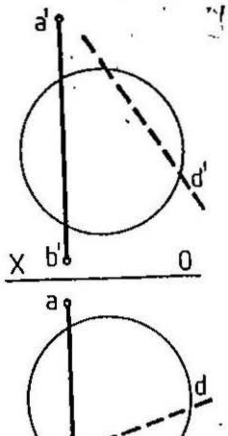


fig. A 4.35

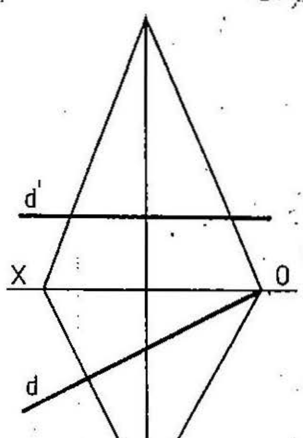


fig. A 4.36

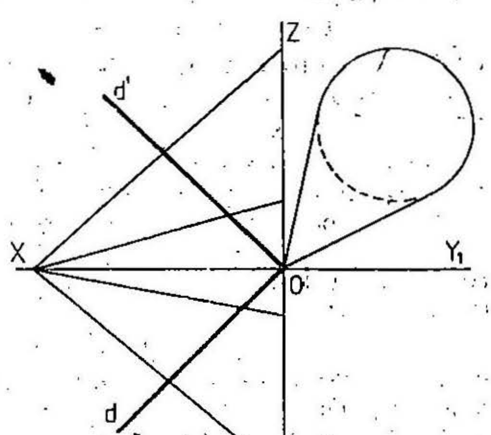


fig. A 4.37

3

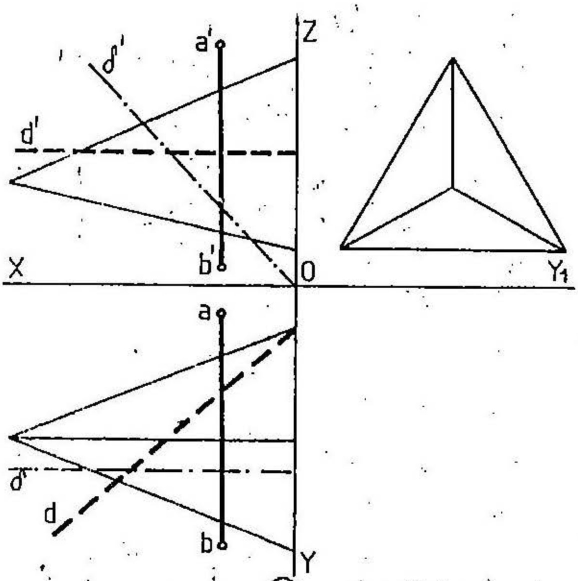


fig. A 4.38

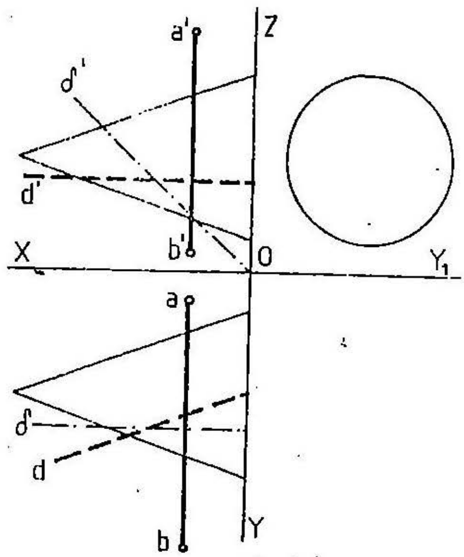


fig. A 4.39

3. Poliedre

3.1. Să se construiască în dublă proiecție ortogonală un tetraedru, cunoscînd fața ABC (laturile ei au 4 cm, 5 cm și, respectiv, 7 cm) și știind că triedrul opus este tridreptunghic. Discuție.

3.2. Să se construiască proiecțiile unei piramide pentagonale regulate, cunoscînd fața laterală care este așezată pe planul orizontal de proiecție. Muchiile piramidei sînt de 5 cm.

3.3. Să se construiască proiecțiile unui tetraedru regulat, cunoscînd o muchie orizontală și proiecția orizontală a unei muchii înclinate. Discuție.

3.4. Să se construiască proiecțiile unui tetraedru regulat de muchie 6 cm, care are două muchii opuse orizontale.

3.5. Așezați un cub cu muchia de 5 cm pe fața unui tetraedru regulat de muchie 18 cm, așezat cu baza în planul orizontal de proiecție și cu fețele laterale în plane oarecare. Desenați ansamblul celor două poliedre în dublă proiecție ortogonală și în axonometrie izometrică.

3.6. Să se așeze în planul PP_xP' un cub cu muchia de 5 cm, astfel încît să aibă o față în planul PP_xP', să atingă planul orizontal de proiecție cu un vîrf și să aibă o diagonală interioară în poziție orizontală. Planul PP_xP' este dat în figura A4.40. Desenați rezolvarea în dublă proiecție ortogonală și în axonometrie izometrică.

3.7. Se cere reprezentarea în triplă proiecție ortogonală a ansamblului din figura A4.41, în situația în care este așezat cu punctele A, B și C în planul orizontal de proiecție. Completați reprezentarea și cu o axonometrie anizometrică.

3.8. Un cub cu muchia de 6 cm așezat cu una din diagonalele sale interioare în poziție verticală se rotește cu 90° în jurul acestei diagonale și, simultan, se deplasează vertical în sens ascendent pe o lungime de 8 cm. Desenați în dublă proiecție ortogonală și în axonometrie volumul rezultat prin rototranslație.

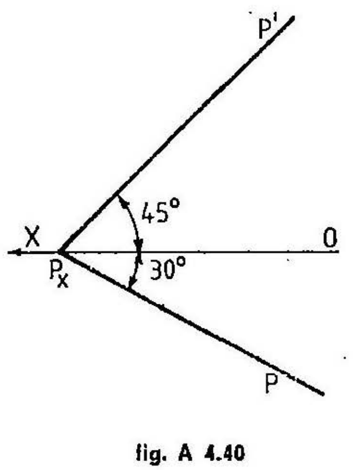


fig. A 4.40

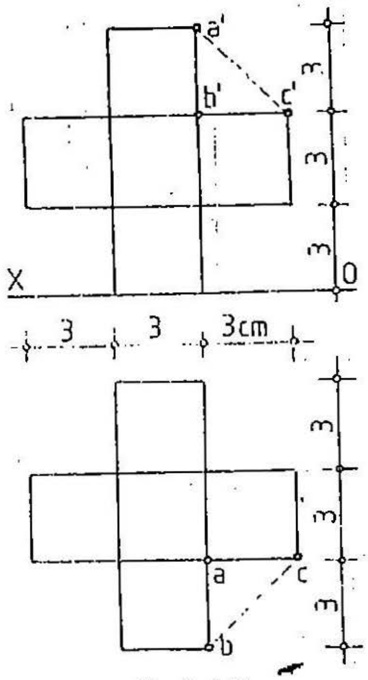


fig. A 4.41

3.9. Se dă un cub cu muchia de 6 cm, așezat cu o față în planul orizontal de proiecție. Rotiți acest cub cu 90° în jurul unei diagonale interioare și, simultan, deplasați-l paralel cu direcția diagonalei pe o distanță de 3 cm. Desenați în dublă proiecție ortogonală și în axonometrie izometrică intersecția poziției inițiale cu poziția finală a cubului.

3.10. Desenați cel mai mare cub care intră complet într-un dodecaedru regulat cu muchia de 4 cm.

3.11. Desenați cel mai mare dodecaedru regulat care intră complet într-un cub cu muchia de 10 cm.

3.12. Să se așeze pe fiecare din cele cinci fețe superioare ale unui icosaedru regulat cu un vîrf în planul orizontal de proiecție, cîte un icosaedru identic. Toți icosaedrii au muchia de 4 cm. Cei cinci icosaedri așezați pe fețele superioare ale primului icosaedru se intersectează între ei. Desenați ansamblul celor șase icosaedri în dublă proiecție ortogonală.

3.13. Un dodecaedru regulat cu muchia de 3 cm este așezat cu o față în planul orizontal de proiecție. Pe cele cinci fețe laterale superioare ale sale se așază cîte un dodecaedru identic. Desenați ansamblul celor șase dodecaedri în dublă proiecție ortogonală.

3.14. Se dă un dodecaedru regulat cu muchia de 3 cm. Pe fiecare față a sa se așază cîte o piramidă pentagonală regulată cu baza identică cu fața dodecaedrului și cu muchiile laterale în continuarea muchiilor dodecaedrului. Se va așeza ansamblul astfel rezultat în poziție de „repaus" — așezat pe trei vîrfuri. Desenați ansamblul în dublă proiecție ortogonală.

3.15. Introduceți într-un tetraedru regulat cu muchia de 12 cm, pe rînd, cel mai mare cub, octaedru regulat, dodecaedru regulat și icosaedru regulat care poate fi conținut. Reprezentare în dublă proiecție ortogonală.

3.16. Introduceți într-un cub cu muchia de 10 cm, pe rînd, cel mai mare tetraedru regulat, octaedru regulat, dodecaedru regulat și icosaedru regulat care poate fi conținut. Reprezentare în dublă proiecție ortogonală.

3.17. Introduceți într-un octaedru cu muchia de 8 cm, pe rînd, cel mai mare tetraedru regulat, cub, dodecaedru regulat și icosaedru regulat care poate fi conținut. Reprezentare în dublă proiecție ortogonală.

3.18. Introduceți într-un dodecaedru regulat cu muchia de 5 cm, pe rînd, cel mai mare tetraedru regulat, cub, octaedru regulat și icosaedru regulat care poate fi conținut. Reprezentare în dublă proiecție ortogonală.

3.19. Introduceți într-un icosaedru regulat cu muchia de 8 cm, pe rînd, cel mai mare tetraedru regulat, cub, octaedru regulat și dodecaedru regulat care poate fi conținut. Reprezentare în dublă proiecție ortogonală.

3.20. Se dă un cub cu muchia de 8 cm și se ia punctul A, centrul feței superioare a cubului. Desenați în dublă proiecție ortogonală cel mai mare cub care intră complet în cubul dat și are un vîrf în punctul A.

3.21. Se dă un tetraedru regulat cu muchia de 12 cm și se ia punctul A, centrul unei fețe laterale. Desenați în dublă proiecție ortogonală cel mai mare cub care intră complet în tetraedru și are un vîrf în punctul A.

4. Intersecții de volume

4.1. Doi tetraedri regulați cu muchia de 8 cm au două fețe suprapuse perfect și într-o poziție orizontală. Fiecare din muchiile laterale ale celor doi tetraedri este înălțimea unei piramide pătrate drepte cu latura bazei de 9 cm și cu două din laturile bazei în poziție orizontală. Desenați ansamblul rezultat în dublă proiecție ortogonală și în axonometrie.

4.2. Punctul O este centrul comun a trei hexagoane regulate egale cu latura de 3 cm, orientate respectiv după direcțiile OX, OY și OZ. Construiți șase piramide drepte hexagonale cu bazele respectiv cele trei hexagoane și cu înălțimile de 10 cm, luate de o parte și de alta a bazei, după direcțiile OX, OY și OZ. Desenați ansamblul celor șase piramide în axonometrie izometrică. Discuție.

4.3. Se dă un cub cu muchia de 6 cm, din care se alcătuiesc doi tetraedri regulați intersectați între ei, ale căror vîrfuri sînt cele opt vîrfuri ale cubului. Așezați volumul pe un plan orizontal și lipiți pe el la partea superioară un volum identic, prin suprapunerea perfectă a două fețe triunghiulare. Desenați ansamblul în dublă proiecție ortogonală. Construiți desfășurata ansamblului.

4.4. Fețele superioară și inferioară ale unui dodecaedru regulat cu muchia de 4 cm sînt bazele unor piramide drepte cu înălțimea de 10 cm. Desenați în dublă proiecție ortogonală și în axonometrie intersecția celor două piramide și corpul comun.

4.5. Se dă un hexagon regulat cu latura de 3 cm, așezat în planul orizontal de proiecție. Se ridică hexagonul cu 3 cm și se rotește în jurul verticalei care trece prin centrul lui cu un unghi de 15°. Primul hexagon este baza unei piramide drepte cu înălțimea de 8 cm, iar al doilea hexagon este baza unei piramide drepte cu înălțimea de 10 cm, așezate cu vîrful în jos. Desenați intersecția celor două piramide și corpul comun în dublă proiecție ortogonală și axonometrie. Desenați desfășurata corpului comun.

4.6. Un hexagon stelat înscris într-un cerc cu raza de 3 cm este baza unei prisme drepte cu înălțimea de 12 cm. Două asemenea prisme au același centru de greutate și axele longitudinale orizontale și perpendiculare una pe cealaltă. Hexagonul stelat al unei prisme are patru laturi verticale, iar cel al celei de a doua prisme are o diagonală verticală. Desenați în dublă proiecție ortogonală și în axonometrie intersecția dintre cele două prisme.

4.7. Măriți de două ori desenele din figurile A4.42...A4.47, rezolvați intersecțiile în dublă proiecție ortogonală și studiați vizibilitatea. Desenați desfășuratele intersecțiilor și, cu ajutorul lor, realizați din hîrtie machetele intersecțiilor.

4.8. Desenați în dublă proiecție ortogonală și în axonometrie izometrică intersecția dintre două cuburi egale (cu muchia de 6 cm), care au centrul de greutate comun. Unul din cele două cuburi are două fețe orizontale, iar celălalt cub are o diagonală interioară în poziție verticală. Una din muchiile superioare ale cubului cu diagonala verticală se intersectează cu una din muchiile laterale ale cubului cu două fețe orizontale.

4.9. În problema precedentă, se unesc mijloacele muchiilor fiecărui cub între ele, obținîndu-se astfel doi cuboctaedri. Desenați intersecția lor.

4.10. Desenați în dublă proiecție ortogonală și în axonometrie izometrică intersecția dintre patru cuburi cu diagonala interioară în poziție verticală. Cuburile sînt egale, au muchia de 6 cm și sînt așezate ca în figura A4.48.

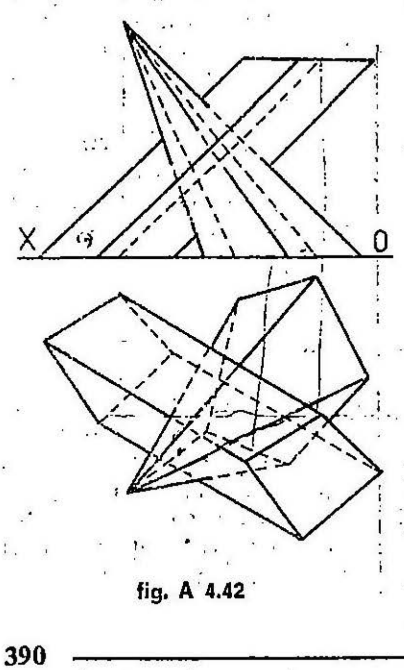


fig. A 4.42

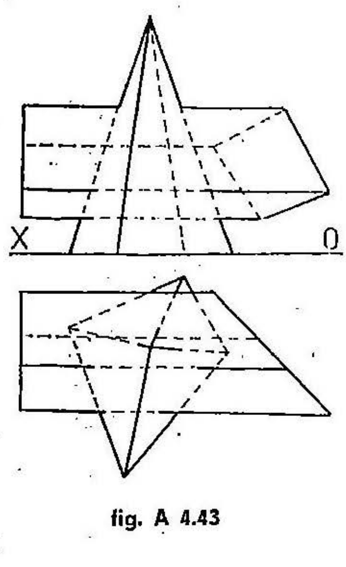


fig. A 4.43

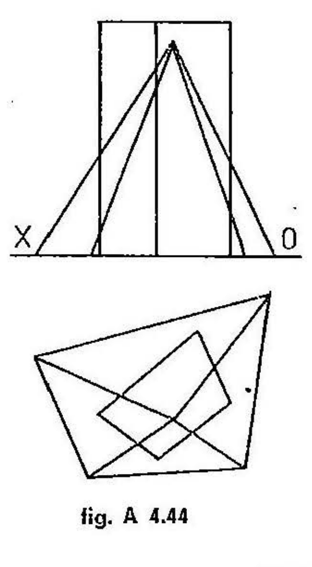


fig. A 4.44

4.11. Se dă un tetraedru regulat cu muchia de 8 cm, așezat cu una din fețe într-un plan de nivel. Construiți încă patru tetraedri identici ale căror centre de greutate coincid cu centrul de greutate al tetraedrului inițial. Direcțiile înălțimilor celor patru tetraedri coincid cu direcțiile înălțimilor tetraedrului inițial, dar sînt orientate cu vîrfurile în sens opus acestora. Desenați în dublă proiecție ortogonală și în axonometrie ansamblul celor cinci tetraedri.

4.12. Desenați în axonometrie izometrică o prismă înaltă de 6 cm, ale cărei dimensiuni în plan sînt de 6×7 cm. Prisma este așezată pe planul orizontal de proiecție. Așezați pe fața sa superioară trei cuburi identice cu muchia de 6 cm, în așa fel încît acestea să stea în echilibru stabil. Cele trei cuburi se vor sprijini toate pe prismă și nu unul pe celălalt.

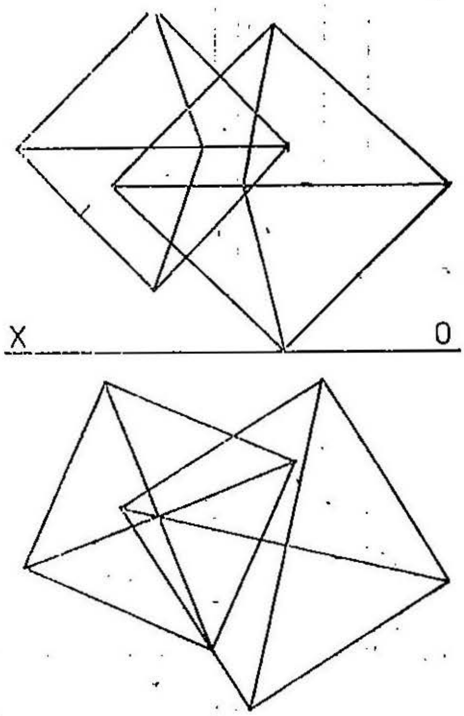


fig. A 4.45

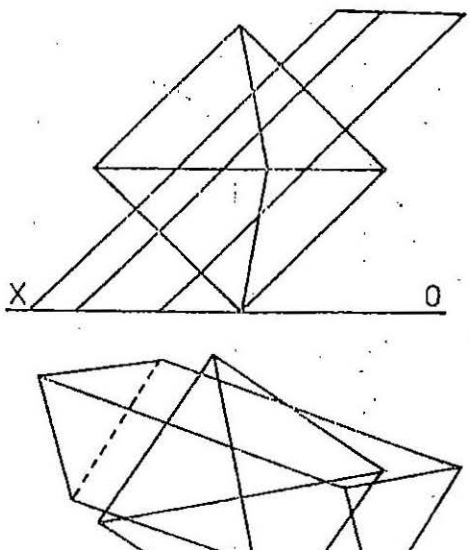


fig. A 4.46

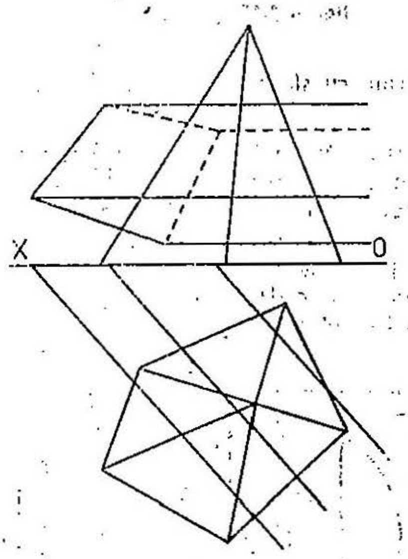


fig. A 4.47

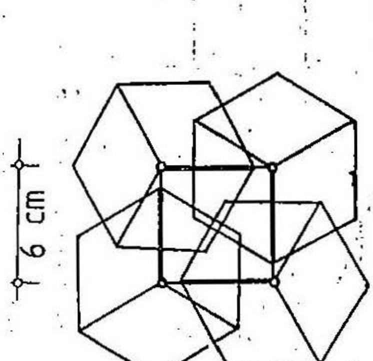


fig. A 4.48

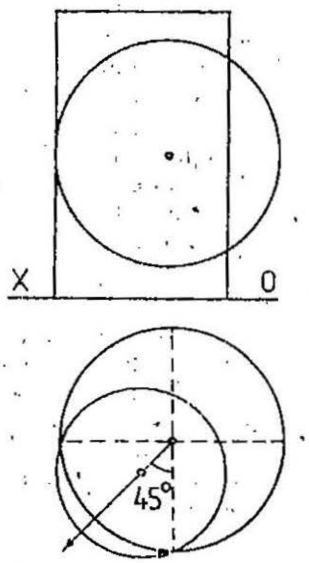


fig. A 4.49

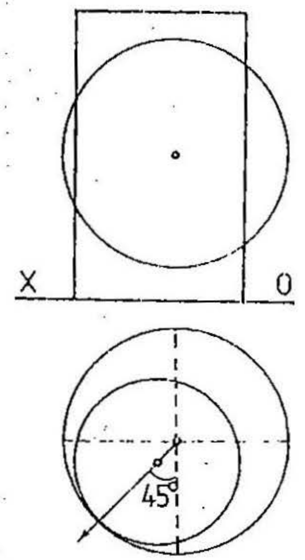


fig. A 4.50

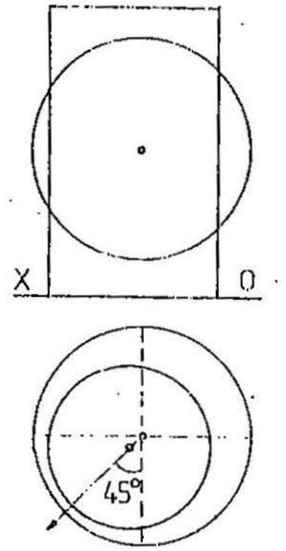


fig. A 4.51

5. Probleme cu sfere

5.1. Desenați în dublă proiecție ortogonală intersecția dintre un cub cu muchia de 6 cm și o sferă cu diametru variabil, în următoarele situații:
— sfera este înscrisă în cub;
— sfera penetrează cubul;
— calotele sferice de pe fețele cubului se întîlnesc pe muchiile cubului;
— diametrul sferei crește; se văd numai o parte din muchiile cubului;
— sfera este circumscrisă cubului.

5.2. Desenați în dublă proiecție ortogonală intersecția dintre o sferă și un cilindru în situațiile din figurile A4.49...A4.51.

5.3. Desenați în dublă proiecție ortogonală intersecția dintre o sferă și o prismă în situațiile din figurile A4.52...A4.54.

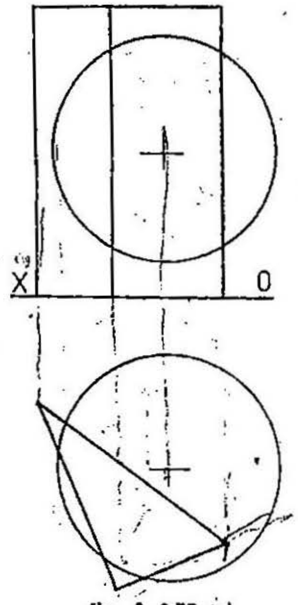


fig. A 4.52

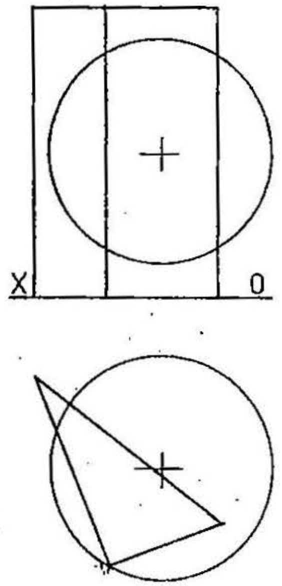


fig. A 4.53

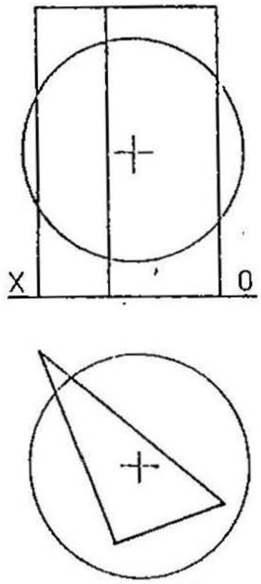


fig. A 4.54

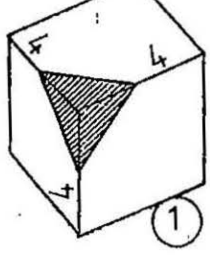


fig. A 4.55

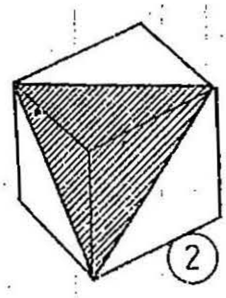


fig. A 4.56

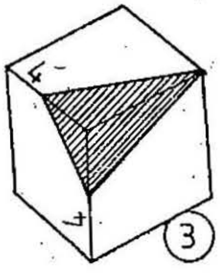


fig. A 4.57

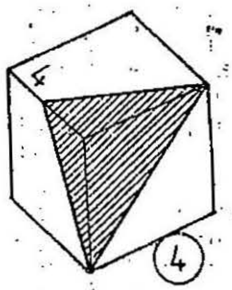


fig. A 4.58

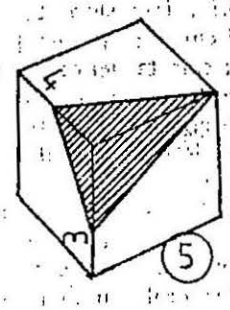


fig. A 4.59

5.*4*. Așezați un con circular drept (diametrul bazei de 6 cm, înălțimea de 10 cm) culcat pe planul orizontal de proiecție și așezați o sferă de rază 3 cm pe același plan orizontal, în așa fel încît să fie tangentă la con într-un punct aflat la o treime de vîrf și două treimi de baza conului. Desenați ansamblul în dublă proiecție ortogonală.

5.*5*. Se dau două emisfere cu raza de 3 cm, așezate cu ecuatorul în planul orizontal de proiecție și tangente între ele. Centrele lor se notează cu O_1 și O_2. Se ia apoi un alt punct în planul orizontal de proiecție, notat cu M, astfel încît triunghiul O_1O_2M să fie echilateral. Așezați un cilindru circular drept cu raza de 2 cm și înălțimea de 12 cm, astfel încît să fie tangent la cele două emisfere și să se sprijine în punctul M din planul orizontal de proiecție.

5.*6*. Trei conuri circulare drepte au bazele cercuri cu raza de 4 cm, situate în planul orizontal de proiecție și tangente între ele două cîte două. Înălțimile celor trei conuri drepte sînt respectiv de 12, 9 și 8 cm. Desenați în dublă proiecție ortogonală sfera cu raza de 3 cm, care este tangentă simultan celor trei sfere.

5.7. Un tetraedru regulat cu muchia de 12 cm este așezat pe planul orizontal de proiecție. Așezați trei sfere egale care să fie tangente între ele două cîte două și tangente interior tetraedrului. Toate cele trei sfere vor fi așezate pe planul orizontal de proiecție. Desenați ansamblul în dublă proiecție ortogonală.

5.*8*. Un tetraedru regulat cu muchia de 14 cm este așezat cu un vîrf în jos și are o față orizontală. În tetraedru (care este gol pe dinăuntru) se plasează o sferă de rază 2,5 cm. Se cere să se așeze încă alte trei sfere egale care să fie tangente exterior sferei mari și tangente interior tetraedrului. Desenați ansamblul în dublă proiecție ortogonală.

5.*9*. Se dă un cub cu muchia de 8 cm, secționat în diverse moduri, conform schițelor din figurile A4.55...A4.59. Introduceți în fiecare caz cea mai mare sferă care poate fi conținută. Desenați volumele în dublă proiecție ortogonală.

5.*10*. Desenați în dublă proiecție ortogonală cele mai mari două sfere egale care intră într-un cub cu muchia de 8 cm.

5.*11*. Desenați în dublă proiecție ortogonală cele mai mari trei sfere egale care intră complet într-un cub cu muchia de 8 cm.

5.*12*. Desenați în dublă proiecție ortogonală cele mai mari patru sfere egale care intră complet într-un cub cu muchia de 8 cm.

5.*13*. Așezați cît mai multe sfere egale cu diametrul de 3 cm într-un cub cu muchia de 8 cm. Desenați în dublă proiecție ortogonală, considerînd cubul transparent și sferele opace.

5.*14*. Se dă un triunghi echilateral cu latura de 9 cm, situat în planul orizontal de proiecție. Din vîrfurile triunghiului se ridică verticale la cotele de 12, 10, 9 cm. Vîrfurile verticalelor se unesc fiecare cu centrul triunghiului și cu mijloacele laturilor adiacente ale triunghiului, dînd naștere astfel la trei piramide triunghiulare oblice. Așezați între cele trei piramide, și tangentă la ele, o sferă cu raza de 3 cm.

5.*15*. Se dă un pătrat cu latura de 12 cm, situat în planul orizontal de proiecție. Din vîrfurile pătratului se ridică verticale la cotele de 12, 9, 7 și, respectiv, 4 cm. Vîrfurile verticalelor se unesc fiecare cu centrul pătratului și cu mijloacele laturilor adiacente, situate în planul orizontal de proiecție, dînd astfel naștere la patru piramide pătrate oblice. Așezați între cele patru piramide, și tangentă la ele, o sferă cu raza de 4 cm.

5.*16*. Trei sfere cu razele de 3, 3,5 și, respectiv, 4 cm sînt așezate pe planul orizontal de proiecție și sînt tangente între ele două cîte două. Desenați în dublă proiecție ortogonală o altă sferă cu raza de 4,5 cm așezată peste ele (tangentă la primele trei sfere).

5.*17*. Trei sfere cu razele de 3, 3,5 şi, respectiv, 4 cm, sînt aşezate pe planul orizontal de proiecţie şi sînt tangente între ele două cîte două. Aşezaţi peste ele un cub cu muchia de 6 cm, care are o diagonală interioară în poziţie verticală. Trei din feţele cubului sînt tangente la cele trei sfere. Discuţie.

5.*18*. Într-un cub cu muchia de 12 cm se înscrie un octaedru regulat. Pe fiecare faţă a octaedrului se construieşte cîte un tetraedru regulat avînd muchia egală cu muchia octaedrului. În spaţiile care rămîn libere între feţele laterale ale piramidelor şi feţele cubului (în total 12 spaţii), se vor înscrie sfere tangente exterior la cîte doi tetraedri şi tangente interior cubului.

5.*19*. Introduceţi într-o sferă de rază dată cele mai mari două cuburi egale care pot fi conţinute.

5.*20*. Introduceţi într-o sferă de rază dată cele mai mari trei cuburi egale care pot fi conţinute.

5.*21*. Introduceţi într-o sferă de rază dată cele mai mari şase cuburi egale care pot fi conţinute.

6. Acoperişuri

Rezolvaţi în plan acoperişurile din figurile A4.60... ...,A4.66. Desenaţi două elevaţii şi desfăşurata şi realizaţi macheta din hîrtie pentru fiecare acoperiş. În cazul acoperişurilor denivelate sînt indicate punctele în care coamele orizontale ale părţilor supraînălţate pătrund în versanţii acoperişului.

7. Umbre

Desenaţi în dublă proiecţie ortogonală şi în axonometrie umbrele ansamblurilor din figurile A4.67... ...,A4.69, mărind desenul de trei ori.

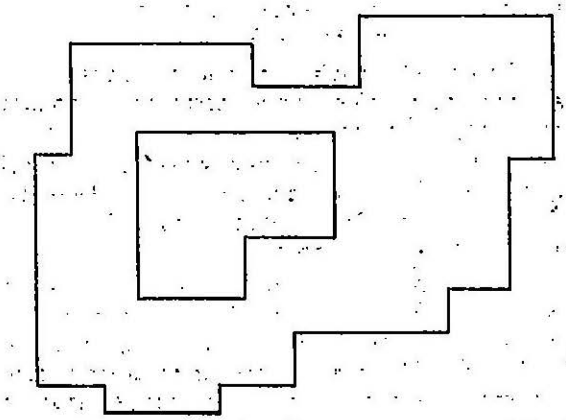


fig. A 4.60

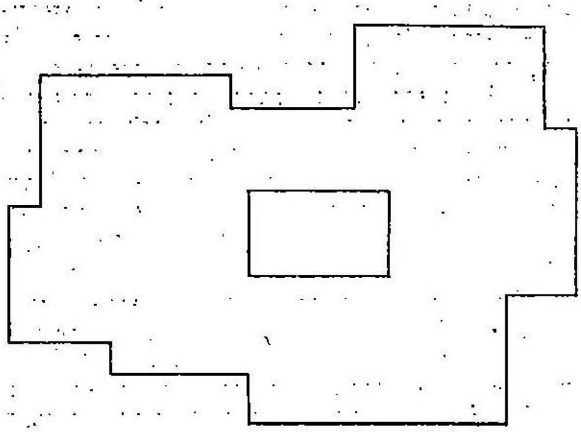


fig. A 4.61

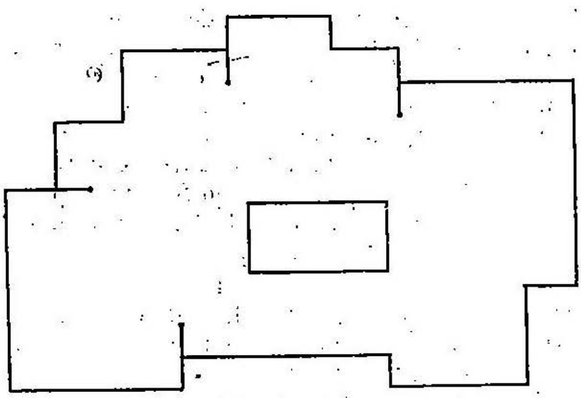


fig. A 4.62

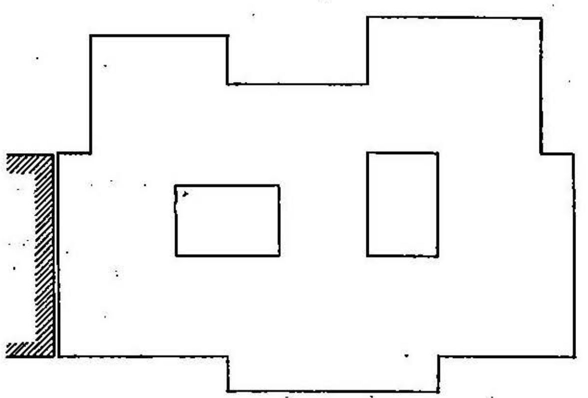


fig. A 4.63

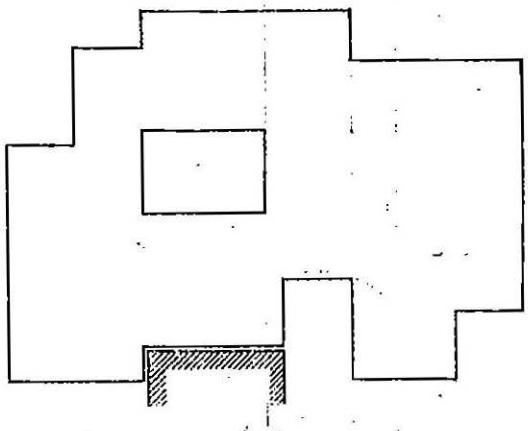


fig. A 4.64

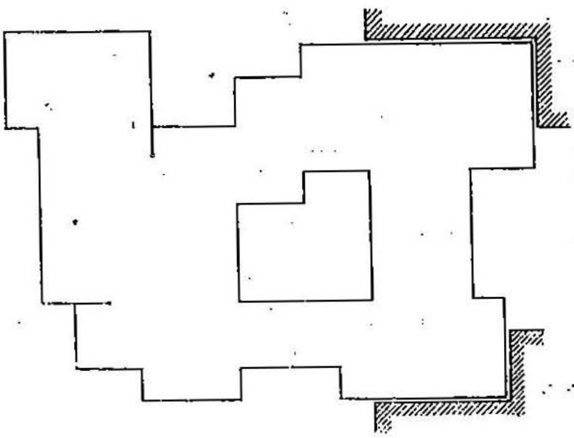


fig. A 4.65

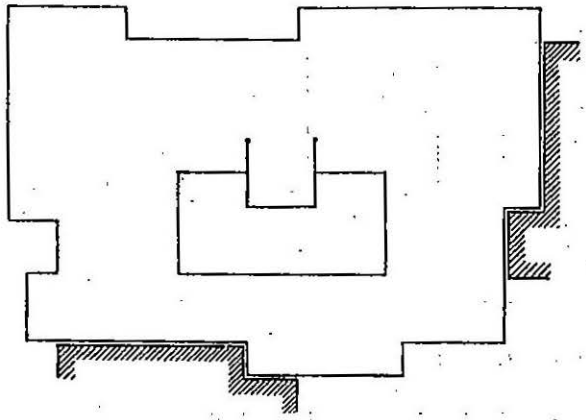


fig. A 4.66

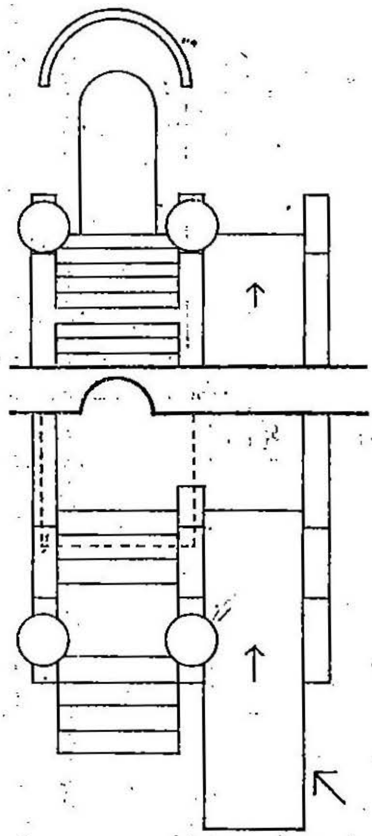


fig. A 4.67

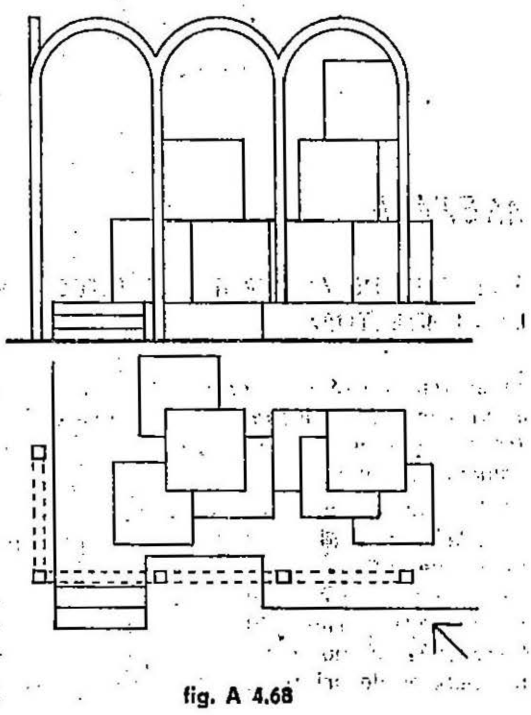


fig. A 4.68

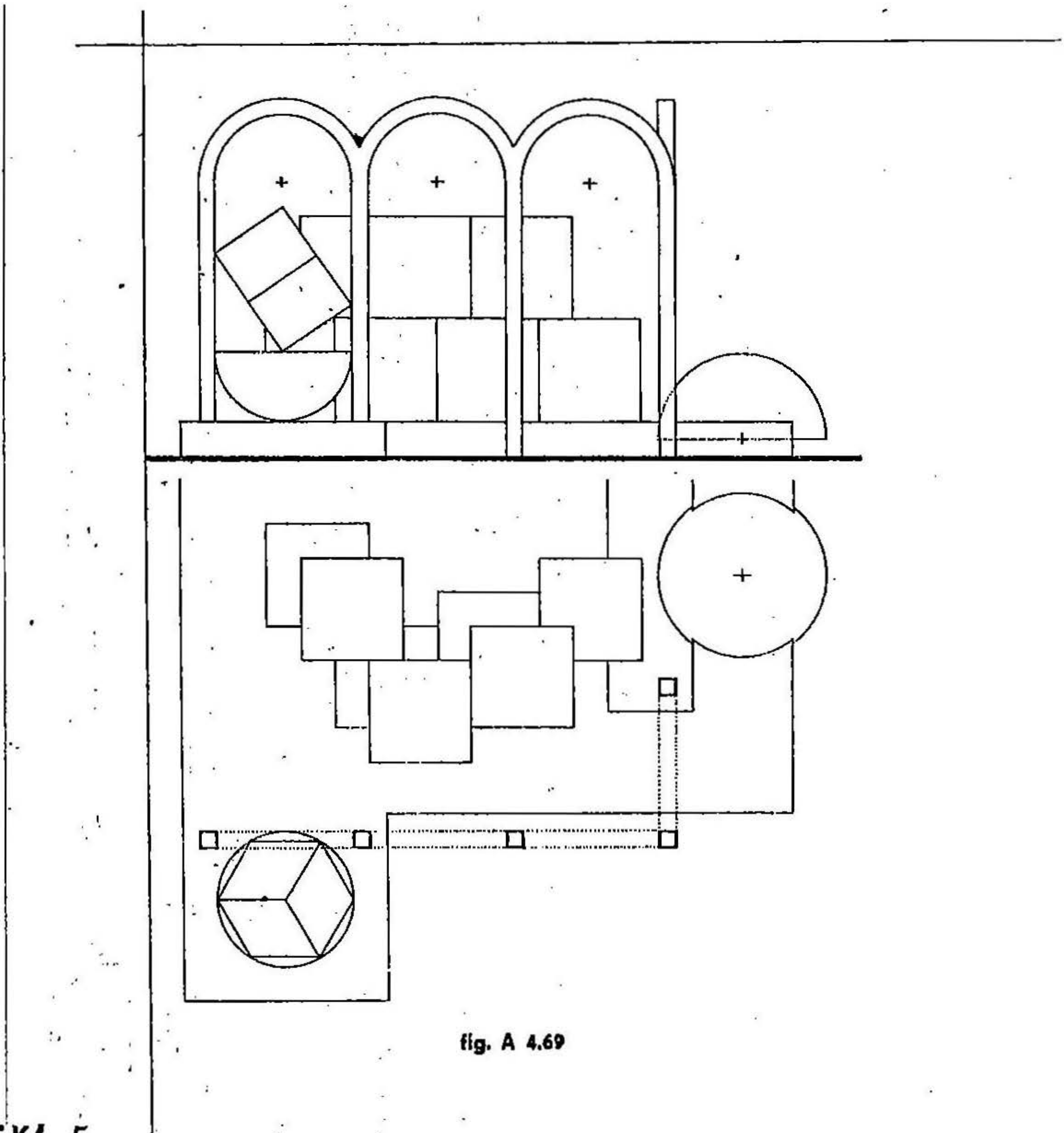


fig. A 4.69

ANEXA 5

ELEMENTE DE ANTURAJ ÎN PERSPECTIVA DE ARHITECTURĂ

În această anexă se prezintă cîteva elemente de anturaj mai des folosite în perspectivele de arhitectură (elemente de vegetaţie, autovehicule, oameni, avioane etc.).

Fără a avea intenţia de a epuiza acest capitol sau de a face un studiu în sine, aceste tipuri de elemente de anturaj sînt ilustrate în diferite maniere de prezentare; ele vin în ajutorul celor care abordează pentru prima dată perspectiva de arhitectură. Deoarece nu este necesar ca desenatorul unei perspective de arhitectură să posede uşurinţa de a reprezenta liber absolut toate elementele de anturaj, se propune alcătuirea unei documentaţii proprii cu astfel de elemente. Dar încă de la prima perspectivă, elementele de anturaj vor fi plasate în tablou, ţinîndu-se seama de scara metrică. După un număr de exerciţii corect abordate, perspectiva construită a elementelor de arhitectură şi plasarea liberă a elementelor de anturaj se vor contopi într-o manieră unitară, rezultînd o perspectivă care să satisfacă din toate punctele de vedere.

